جَامعة عمَارثليجي بِالَأَغوَاط

كلية التكنولوجية	ألتصحيح النموذجي	ألّسنة الجّامعية 2018/2017
قسم الجذع المشترك لعلوم التقنية	ألتّاريخ : 2018/01/11	ألّمقرّر : تَحليل 3
ألمستوَى : ألسنة الثّانية ST	أٍلامتحَان النِهَائِي	ألفَصيلة L, G, K

تمرين 1

١- D هو القرص ذَا المركز $(0,0)$ و نصف القطر $r = 1$

٢- حسَاب قيمة التكَامل:

$I = \iint\limits_D \left(2x^2 - y^2\right) dxdy$ نستعمل التحويل في المتغير التَالي:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ dxdy = rdrd\theta, \\ 0 \le r < 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

و عليه التكَامل I يحول بِالشكل التَالي:

$$\begin{aligned} I = \iint\limits_D \left(2x^2 - y^2\right) dxdy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(2r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta\right) rdrd\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \left(2\cos^2\theta - \left(1 - \cos^2\theta\right)\right) drd\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \left(3\cos^2\theta - 1\right) drd\theta \\ &\overset{Fubini}{=} \int_0^1 \left(r^3 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 3\frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta - \int_0^{2\pi} d\theta\right) \\ &= \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 \left[\frac{3\theta}{2} + 3\frac{\sin 2\theta}{4} - \theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

٣- حسَاب قيمة التكَامل: $J = \int_0^1 \int_0^1 x\sqrt{y}dxdy$

$$J = \int_0^1 \int_0^1 x\sqrt{y}dxdy \overset{Fubini}{=} \left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_0^1 \sqrt{y}dy\right)$$

$$= \left(\int_0^1 x dx\right)\left(\int_0^1 y^{\frac{1}{2}} dy\right) = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

تمرين 2

حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعَادلة التفَاضلية $y''(x) - y(x) = xe^{-2x}$:

اَلمعَادلة المُميزة هي: $r^2 - 1 = 0 \Leftarrow \left(r_1 = 1 \text{ أو } r_2 = -1\right)$

ومِنه الحل العَام للمعَادلة المتجَانسة(بدون طرف ثَاني) هي:

$$y_s = Ae^{-x} + Be^{x}, \ \ A, \ B \in \mathbb{R}$$

اَلطرف الثَاني هو الجدَاء $P(x)e^{sx}$ لكثير حدود من الدرجة 1 و دَالة اسية، و لكن نلَاحظ انَ: $s = -2$ **ليس جذرًا** للمعَادلة المُميزة، إذن نبحث عن حل خَاص علَى شكل جدَاء $Q(x)e^{-2x}$ حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة 1 يعني $y_p(x) = (ax + b)e^{-2x}$، اذن:

$$\begin{aligned}
& y''(x) - y(x) \\
= \ & (4ax + (4b - 4a) + (-ax - b))e^{-2x} \\
= \ & (3ax + 3b - 4a)e^{-2x} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 3b - 4a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, \ b = \frac{4}{9}, \\
\Rightarrow \ & y_p(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\right)e^{-2x}
\end{aligned}$$

إذن الحل العَام للمعَادلة التفَاضلية يكون علَى الشكل التَالي:

$$y_g = y_p + y_s = \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\right)e^{-2x} + Ae^{-x} + Be^{x}, \ \ A, \ B \in \mathbb{R}.$$

تمرين 3

تعين طبيعة السلسِلتَان العدَديتَان:

١) اَلسلسِلة العدَدية: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{n!}$ متبَاعدة لِانه بِاستعمَال مقيَاس دَالمبير d'Alembert مثلَا نجد:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{(n+1)!}}{\frac{n^{2n}}{n!}} = \frac{(n+1)^{2n+2}}{(n+1)\,n!}\frac{n!}{n^{2n}} = \\
&= \frac{(n+1)^{2n}(n+1)^2}{(n+1)\,n^{2n}} = (n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \\
&= (n+1)\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^2,
\end{aligned}$$

و بِالمرور لّلنهَاية:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2=e^2(+\infty)=+\infty>1$$

٢) اَلسِلسِلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}e^{-3n}$ متقَاربة لِانه بِاستعمَال مقيَاس كوشي Cauchy نجد ان:

$$\lim_{n\to\infty}u_n^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n e^{-3}=e^2e^{-3}=\frac{1}{e}<1.$$

تمرين 4

ميدَان التقَارب لّلسلسِلة الصحيحة: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

١) نصف قطر التقَارب هو $R=1$, لِانه بِاستعمَال قَاعدة كوشي Cauchy نجد

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|^{\frac{1}{n}}\right)=|x|<1\Rightarrow R=1$$

و مِنه ميدَان التقَارب لّلسلسِلة الصحيحة هو $]-1,1[$ (غير مطلوب درَاسة التقَارب عند اطرَاف المجَال)

٢) حسَاب المجموع، نضع: $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$, إِن S قَابل لّلِاشتقَاق علَى المجَال $]-1,1[$ و لدينَا

$$\frac{d}{dx}S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\frac{1}{1+x},\ \forall x\in]-1,1[$$

و بِالمكَاملة نجد: (غير مطلوب تبرير الِاشتقَاق او المكَاملة او تبَادل الرمزين بِالنسبة لّلسِلسِلة)

$$S(x)=\int\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)+C,\quad \forall x\in]-1,1[$$

بمَاءن $S(0)=0$, إِذن $C=S(0)+\ln(0)=0$,

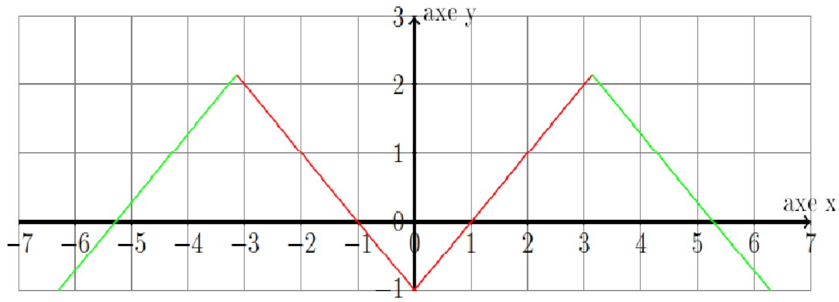
و في الأَخير

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\ln(1+x),\quad \forall x\in]-1,1[$$

تمرين 5

f دَالة حقيقية دورية و دورهَا $w=2\pi$ علَى $\mathbb{R}$ تحقِق $f(x)=|x|-1$ علَى المجَال $[-\pi,\pi]$

١- رسم المنحنَى (C) المُمثل لّلدَالة f في المجَال $[-2\pi,2\pi]$:



٢- نشر f و فق سِلسِلة فوري

اولَا نلَاحظ ان الدَالة f دَالة زوجية علَى المجَال المعطَى و بِالتَالي $b_n = 0$ و

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-1)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^{\pi} = \pi - 2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-1)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[(x-1)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(\pi n) - 1\right) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

نميز الأَدلة الزوجية من الفردية و يكون لدينَا:

$$a_{2n} = 0;$$

$$a_{2n+1} = \frac{-4}{\pi(2n+1)^2}$$

و بِالتَالي نشر فوري لّلتَابع f هو:

$$f(x) = |x| - 1 \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$$

إِستنتَاج المجموع:

بِاستعمَال نظرية ديرشلي Dirichlet عند الصفر شروط النظرية محقَقة، أَنظر الشكل) نجد ان:

$$f(0) = |0| - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

بِالتوفيق و النجَاح.