

Niveau : 2^{ème} Année LMD Physique

Correction de l'examen du Module séries et équations différentielles

Exercice 1 (5pts)

Vérifions

$$\text{a) } \frac{3}{x^3+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2-x+1}$$

$$\text{b) } x^2-x+1 = \frac{3}{4} \left(\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right)$$

La décomposition en éléments simples sur le corps des réels donne l'identité suivante :

$$(1) \quad \frac{3}{x^3+1} = \frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1},$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} 3 \int_0^X \frac{dx}{x^3+1} &= \int_0^X \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int_0^X \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{3}{2} \int_0^X \frac{dx}{x^2-x+1} \\ &= |\text{Log}(x+1)|_0^X - \frac{1}{2} |\text{Log}(x^2-x+1)|_0^X + \frac{3}{2} \left| \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right|_0^X \\ &= \text{Log}(X+1) - \frac{1}{2} \text{Log}(X^2-X+1) + \sqrt{3} \left\{ \text{Arctg} \frac{2X-1}{\sqrt{3}} - \text{Arctg} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}, \end{aligned}$$

donc

$$3 \int_0^X \frac{dx}{x^3+1} = \text{Log} \frac{X+1}{\sqrt{X^2-X+1}} + \sqrt{3} \left\{ \text{Arctg} \frac{2X-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6} \right\}$$

et, par suite,

$$3 \int_0^X \frac{dx}{x^3+1} \underset{X \rightarrow \infty}{\rightarrow} \sqrt{3} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right] = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

L'intégrale proposée est donc convergente, de valeur $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 2 (5pts)

L'équation de (AB) est $y = x$,

donc le triangle peut être décrit par les inéquations

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x.$$

La surface du triangle est $S = \iint_T dx dy = \int_0^1 \int_0^x dy dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$

Et sa masse est $M = s\sigma = \frac{\sigma}{2}$

La coordonnée x_G du centre de gravité

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M} \iint_T x \sigma dx dy = \frac{1}{s} \iint_T x dx dy = 2 \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x x dx dy = 2 \int_{x=0}^1 x^2 dx \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

De même, la coordonnée

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{M} \iint_T y \sigma dx dy = \frac{1}{s} \iint_T y dx dy = 2 \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{y=x} y dy dx \\ &= 2 \int_{x=0}^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercice 3 (5pts)

Rappel : problème de Cauchy (admet une solution et une seule sur I)

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x} \quad (E)$$

Equation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants

soit $y'' + 2y' + y = 0$ (E_0) l'équation sans second membre

et $r^2 + 2r + 1 = 0$ l'équation caractéristique

qui admet une racine réelle double $r_1 = r_2 = -1$

$$y_{SG}(E_0) = (C_1 x + C_2) e^{-x} \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

le second membre $\varphi(x) = 2e^{-x}$ est de la forme e^{mx} avec $m = -1 = r_1 = r_2$

il existe donc une solution particulière sous la forme $y = Ax^2e^{-x}$ avec A constante réelle à déterminer

$$y = Ax^2e^{-x}$$

$$y' = A(2x - x^2)e^{-x}$$

$$y'' = A(2 - 4x + x^2)e^{-x}$$

en reportant dans l'équation différentielle, on obtient

$$y'' + 2y' + y = 2Ae^{-x} = 2e^{-x} \text{ d'où } A = 1$$

$$y_{SP(E)} = x^2e^{-x}$$

d'après le principe de superposition des solutions

$$y_{SG(E)} = (x^2 + C_1x + C_2)e^{-x} \text{ avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

pour déterminer les constantes, on utilise les deux conditions initiales

$$y(x) = (x^2 + C_1x + C_2)e^{-x} \Rightarrow y(0) = C_2 = 3$$

$$y'(x) = (-x^2 + (-C_1 + 2)x + C_1 - C_2)e^{-x} \Rightarrow y'(0) = C_1 - C_2 = 1 \text{ soit } C_1 = 4$$

et la solution Y du problème avec conditions initiales est

$$Y(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$$

Exercice 4 (5pts)

1) Il est immédiat que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$ est convergente on applique le critères des

séries alternées, on a $\frac{1}{3n+2} \xrightarrow{\infty} 0$, $\frac{1}{3n+2}$ décroissante, et que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$ est

divergente car $\frac{1}{3n+2} \not\sim \frac{1}{3n}$;

la série $\left(\frac{1}{3n}\right)_{n \geq 1}$ est div, parce que l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ est div

2) Considérons la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$

a) On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{3n+4}}{\frac{1}{3n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3n+1}{3n+4} \right| = 1$ donc le rayon de convergence $R = 1$ donc le domaine de

convergence est $]-1, 1[$

Maintenant la somme ; En dérivant terme à terme dans le domaine de convergence $]-1, 1[$, on obtient

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} (x^3)^n = \frac{x}{1-x^3}$$

b) Cherchons la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$

Une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{6x}{1-x^3} = \frac{2}{1-x} + \frac{2x-2}{x^2+x+1},$$

D'où, par intégration et compte tenu de $f(0) = 0$

$$\int_0^x \frac{6t}{1-t^3} dt = \int_0^x \frac{2}{1-t} dt + \int_0^x \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt - 4 \int_0^x \frac{1}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dt$$

$$= \left[\ln \left(\frac{1+t+t^2}{(1-t)^2} \right) - 2\sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^x$$

$$= \ln \frac{1+x+x^2}{(1-x)^2} - 2\sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$= \ln \frac{1+x+x^2}{(1-x)^2} - 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{2+x}$$

$$f(x) = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{x\sqrt{3}}{2+x}, x \in]-1, 1[$$

$f(-1) = S$ **et** $f(1)$ **n'est pas défini ; on a** $R=1$. **la fonction** f **est continue au point** $x=-1$ **et**
l'on a

$$S = \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = -\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$