
Exercice 1 (4,5 points =1,5+1,5+1,5).

1.1) Soit $\varphi \in D(\Omega)$. On a : $|\varphi(x_1,x_2)|^p = \left|\int_0^1 1_{]0,x_2]}(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1,t)dt\right|^p \le x_2^{p-1}\int_0^1 \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1,t)\right|^p dt$ et donc $\int_0^1 |\varphi(x_1,x_2)|^p dx_2 \le \left(\int_0^1 x_2^{p-1}dx_2\right)\int_0^1 \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1,t)\right|^p dt = \frac{1}{p}\int_0^1 \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1,t)\right|^p dt$. D'où $\|\varphi\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega|\varphi(x_1,x_2)|^p dx_1dx_2 = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^1 |\varphi(x_1,x_2)|^p dx_2\right)dx_1 \le \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^1 \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1,t)\right|^p dt\right)dx_1 = \frac{1}{p}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right\|_{L^p(\Omega)}^p$.

Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et soit $(\varphi_j) \subset D(\Omega)$ avec $\varphi_j \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, alors $\varphi_j \to u$ dans $L^p(\Omega)$ et $\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_2} \to \frac{\partial u}{\partial x_2}$ dans $L^p(\Omega)$, donc $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \lim_j\|\varphi_j\|_{L^p(\Omega)} \le \lim_j \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_2}\right\|_{L^p(\Omega)} = \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|_{L^p(\Omega)}$.

1.2) Soit $F = \left(\{\nabla u; u \in W_0^{1,p}(\Omega)\}, \|\ \|_{(L^p(\Omega))^2}\right)$, il suffit de montrer que F est complet. De l'inégalité (partie 1.1), on tire $\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-\frac{1}{p}}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^2} \le \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ prouvant ainsi que l'application (linéaire) $u \mapsto \nabla u$ est un isomorphisme topologique de $W_0^{1,p}(\Omega)$ sur F. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ étant de Banach, F est donc complet.

2) On a : $v \in C^\infty(\Omega)$, $\frac{\partial v}{\partial x_1}(x) = \frac{2rx_1v(x)}{1+x_1^2}$ et $\frac{\partial v}{\partial x_2}(x) = 0, \forall x = (x_1,x_2) \in \Omega$. Donc $\left|\frac{\partial v}{\partial x_1}\right| \le |r||v|$ et $\frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$.
D'où les équivalences : $v \in W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega|v|^p dx < \infty \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}}(1+x_1^2)^{rp}dx_1 < \infty \Leftrightarrow rp < -\frac{1}{2}$.
Cependant $v \notin W_0^{1,p}(\Omega)$ car sinon l'inégalité (partie 1.1) serait fausse, puisque $\frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$ et $v \neq 0$.

Exercice 2 (4 points = 3+1).

1) <u>Étape 1</u> : On vérifie que la relation $(f,g) \mapsto fg$ définit une application (bilinéaire) continue de $L^4(\mathbb{R}^n) \times L^4(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. En effet, si $(f,g) \in L^4(\mathbb{R}^n) \times L^4(\mathbb{R}^n)$, alors $\int_{\mathbb{R}^n}|fg|^2dx = \int_{\mathbb{R}^n}|f|^2|g|^2dx \le \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^4dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g|^4dx\right)^{\frac{1}{2}}$, donc $fg \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\|fg\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^4(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^4(\mathbb{R}^n)}$.

<u>Étape 2</u> : Soit $(u,v) \in W^{k,4}(\mathbb{R}^n) \times W^{k,4}(\mathbb{R}^n)$ et soit $\alpha \in \mathbb{N}^n\ avec\ |\alpha| \le k$. On a (étape 1) : $uv \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\sum_{\beta\le\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}D^\beta uD^{\alpha-\beta}v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Il ne reste qu'à prouver que : $D^\alpha(uv) = \sum_{\beta\le\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}D^\beta uD^{\alpha-\beta}v$ (*).

<u>Preuve de (*)</u> : $D(\mathbb{R}^n)$ étant dense dans $W^{k,4}(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite $(\varphi_j) \subset D(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi_j \to u$ dans $W^{k,4}(\mathbb{R}^n)$. On a (étape 1) $\varphi_j v \to uv$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et, sachant que $L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$ et que l'opérateur D^α est continu sur $D'(\mathbb{R}^n)$, donc $D^\alpha(\varphi_j v) \to D^\alpha(uv)$ dans $D'(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, comme $D^\alpha(\varphi_j v) = \sum_{\beta\le\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}D^\beta uD^{\alpha-\beta}v$, alors (étape 1) $D^\alpha(\varphi_j v) \to \sum_{\beta\le\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}D^\beta uD^{\alpha-\beta}v$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et, vu que $L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow D'(\mathbb{R}^n)$, donc $D^\alpha(\varphi_j v) \to \sum_{\beta\le\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}D^\beta uD^{\alpha-\beta}v$ dans $D'(\mathbb{R}^n)$. Par unicité de la limite, $D'(\mathbb{R}^n)$ étant séparé, on en déduit que $D^\alpha(uv) = \sum_{\beta\le\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}D^\beta uD^{\alpha-\beta}v$ dans $D'(\mathbb{R}^n)$.

2) On a $W^{2,2}(\mathbb{R}^3) \subset C_0(\mathbb{R}^3)$ et $W_{loc}^{2,2}(\mathbb{R}^3) \subset C(\mathbb{R}^3)$ parce que $2 > \frac{3}{2}$. Soit $u \in W^{2,4}(\mathbb{R}^3)$. Alors (partie 1), $\forall\psi \in D(\mathbb{R}^3)$, $\psi u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^3)$. D'où $u \in W_{loc}^{2,2}(\mathbb{R}^3)$ et donc $u \in C(\mathbb{R}^3)$. D'autre part, étant donné que (partie 1) $u^2 \in W^{2,2}(\mathbb{R}^3)$, on a $u^2 \in C_0(\mathbb{R}^3)$, ainsi $\lim_{|x|\to\infty}(u(x))^2 = 0$ et donc $\lim_{|x|\to\infty}u(x) = 0$.

Exercice 3 (11,5 points = 2+2+2+2+2+1,5).

On a : $(\theta_j) \subset D(\mathbb{R}^n)$, $\theta_j \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \theta_j dx = 1$, $supp\, \theta_j \subset \bar{B}(0, \varepsilon_j)$ avec $\varepsilon_j \to 0$, $(\theta_j * f) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\theta_j * f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(\theta_j * f) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\theta_j * f \to f$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1.1) Soit $u \in W^{-k,p}(\mathbb{R}^n)$. Alors $u = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f_\alpha$ avec $f_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Pour chaque $|\alpha| \leq k$, on a : $\theta_j * f_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\theta_j * f_\alpha \to f_\alpha$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et D^α applique continûment $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{-k,p}(\mathbb{R}^n)$. Donc $\theta_j * u = \sum_{|\alpha| \leq k} \theta_j * D^\alpha f_\alpha = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha (\theta_j * f_\alpha) \in W^{-k,p}(\mathbb{R}^n)$ et $\theta_j * u \to \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f_\alpha = u$ dans $W^{-k,p}(\mathbb{R}^n)$.

1.2) Soit $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Comme $D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $(\theta_j * u) \subset S(\mathbb{R}^n)$ et $\theta_j * u \to u$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Il ne reste qu'à prouver que $(\theta_j * u)$ est bornée dans $S(\mathbb{R}^n)$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, on a : $q^*_{\alpha,\beta}(\theta_j * u) = \|M^\alpha D^\beta (\theta_j * u)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|M^\alpha (\theta_j * D^\beta u)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \left\| \sum_{\gamma \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} \left((M^\gamma \theta_j) * (M^{\alpha-\gamma} D^\beta u) \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq$
$\sum_{\gamma \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} \|M^{\alpha-\gamma} D^\beta u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|M^\gamma \theta_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ et $\|M^\gamma \theta_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |x^\gamma| \theta_j dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{\frac{|\gamma|}{2}} \theta_j(x) dx$
$= \int_{\bar{B}(0,\varepsilon_j)} (1 + |x|^2)^{\frac{|\gamma|}{2}} \theta_j(x) dx \leq (1 + \varepsilon_j^2)^{\frac{|\gamma|}{2}} \int_{\bar{B}(0,\varepsilon_j)} \theta_j(x) dx = (1 + \varepsilon_j^2)^{\frac{|\gamma|}{2}}$, donc $\sup_{j \in \mathbb{N}} q^*_{\alpha,\beta}(\theta_j * u) < \infty$.

1.3) Soit $u \in S'(\mathbb{R}^n)$. Comme $D(\mathbb{R}^n) \subset O'_C(\mathbb{R}^n)$, $(\theta_j * u) \subset S'(\mathbb{R}^n)$. Soit $f \in S(\mathbb{R}^n)$. On a : $\langle \theta_j * u, f \rangle = \langle u, \check{\theta}_j * f \rangle$ et $\check{\theta}_j * f = \left(\widecheck{\theta_j * \check{f}} \right) \to (\check{\check{f}}) = f$ dans $S(\mathbb{R}^n)$ (partie 1.2), donc $\langle \theta_j * u, f \rangle \to \langle u, f \rangle$.

1.4) Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $v \mapsto A_s(v) = \left(\mathcal{F}\left((1 + |M|^2)^{\frac{s}{2}} \right) \right) * v$ étant un isomorphisme topologique de $H^s(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $A_s^{-1} = A_{-s}$, donc $\theta_j * u = A_{-s} \left(\theta_j * A_s(u) \right) \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et $\theta_j * u \to A_{-s}(A_s(u)) = u$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.

2) Si $s < -\frac{n}{2}$, alors $\delta \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et donc (partie 1.4) $\theta_j = \theta_j * \delta \to \delta$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$. Inversement, si $\theta_j \to u$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$, alors, sachant que $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$, $\theta_j \to u$ dans $S'(\mathbb{R}^n)$ et, vu que (partie 1.3) $\theta_j = \theta_j * \delta \to \delta$ dans $S'(\mathbb{R}^n)$ et que $S'(\mathbb{R}^n)$ est séparé, $\delta = u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, donc $s < -\frac{n}{2}$.

3) Si $s < -\frac{n}{2}$, alors (partie 2) (θ_j) converge dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ et donc elle est bornée dans $H^s(\mathbb{R}^n)$. Dans le sens inverse, vu que $(\theta_j) \subset H^s_{\bar{B}(0, \sup_{j \in \mathbb{N}} \varepsilon_j)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow\hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\varepsilon > 0$, si (θ_j) est bornée dans $H^s(\mathbb{R}^n)$, alors elle a une sous-suite qui converge dans $H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, donc (partie 2) $s - \varepsilon < -\frac{n}{2}$ et, lorsque $\varepsilon \to 0$, $s \leq -\frac{n}{2}$.