Corrigé type de l'examen de l'algèbre 3, 19 Janvier 2019

Exercice 1

a Pour déterminer le polynôme minimal de A et sa forme réduite de Jordan, nous déterminons en premier lieu son polynôme caractéristique.

$$C(X) = \det(XI_3 - A) = (X-2)(X-4)^2 \quad (\textbf{1 point})$$

Le polynôme minimal $m(X)$ doit contenir tous les diviseurs de $C(X)$, de degré minimal tel que $m(A) = 0$. Ainsi

$$m(X) = (X-2)(X-4), \; (\textbf{1 point})$$

Car

$$m(A) = (A - 2I_3)(A - 4I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\textbf{1 point})$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$; les racines de $c(X)$. (**1 point**)

Les vecteurs propres associés: (**1.5 point**)

Pour $\lambda_1 = 2$. Soit $v_1 = (x;, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tel que $Av = 2v \iff (A - 2I_3)v = 0$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = 0, \; y = z$$

ce qui donne $v_1 = (0, 1, 1)$. De la même manière on trouve $v_2 = (-1, 2, 2)$, $v_3 = (-1, 0, 2)$ les vecteurs associés à $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$. On a trois vecteurs propres qui forment une base de $\mathbb{R}^3$, d'où, la matrice de passage à la base des vecteurs propres est $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi la forme réduite de Jordan est la suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\textbf{0.5 point})$$

b Résolution du système d'équations différentielles linéaires:

Mettons d'abord, le système linéaire sous la forme matricielle:

$$X'(t) = AX(t),$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\textbf{1 point})$$

La solution est sous la forme

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \quad (\textbf{1 point})$$

De ce qui précède dans a), nous avons

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1 e^{2t}(0,1,1) + c_2 e^{4t}(-1,2,2) + c_3 e^{4t}(-1,0,2) \\ &= \left(-c_2 e^{4t} - c_3 e^{4t}, c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{4t}, c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{4t} + 2c_3 e^{4t}\right) \quad (\textbf{1 point}) \end{aligned}$$

<u>Exercice 2</u>

a. On a $A^2 = 2A - I \Longrightarrow A^2 - 2A + I = 0 \Longrightarrow \exists f(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, tel que $f(A) = 0$. Si $m(X) = (X-1)$ est le polynôme minimal de A, alors $m(A) = 0 \Longrightarrow A = I_3$, ce qui contredit l'hypothèse, donc $m(X) = (X-1)^2$. (**2 points**)

Comme le polynôme caractéristique $c(X)$ est de degré égal à l'ordre de la matrice et doit contenir les mêmes facteurs de $m(X)$, alors $c(X) = (X-1)^3$. (**1 point**)

b. Les formes réduites de Jordan possibles pour la matrice A.

Comme $c(X) = (X-1)^3$, alors, soit P la matrice de passage à une base de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle

$$P^{-1}AP = J_n(\lambda) = J_3(1) \quad (\textbf{0.5 point})$$

Comme $m(X) = (X-1)^2$, alors l'un des blocs de Jordan doit être d'ordre 2, la multiplicité de la valeur propre $\lambda = 1$ dans le polynôme minimal, et les restes des blocs sont d'ordre ≤ 1, ce qui donne une seule forme réduite:

$$P^{-1}AP = J_2(1) \oplus J_1(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\textbf{1 point})$$

Il est clair que la matrice n'est pas diagonalisable, car elle contient un bloc de Jordan d'ordre > 1. (**0.5 point**)

Exercice 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

a La deuxième colonne et la troisième colonne sont juste des multiples de la première colonne de la matrice A, ce qui donne $rang\,(A) = 1$ (**2 points**)

b De la question 1, il existe une valeur propre λ_1 telle que $A^2 = \lambda_1 A$. Ainsi, on a

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -5 & -10 & -15 \\ 10 & 20 & 30 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda_1 = 5 \quad (\textbf{1 point})$$

D'autre part , on a si λ_1, λ_2, λ_3 sont les valeurs propres de A, alors

$$tr\,(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5 \quad (\textbf{1 point})$$

et

$$\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0 \ \ (\textbf{1 point})$$

ce qui donne $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc les valeurs propres de A sont

$$\lambda_1 = 5 \text{ et } \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

c En déduit que le polynôme caractéristique de A est

$$c\,(X) = (X - \lambda_1)\,(X - \lambda_2)^2 = (X - 5)\,X^2 = X^2\,(X - 5) \quad (\textbf{1 point})$$