Correction d'examen : Programmation linéaire

Exercice 1 : (P_2) :

$$\begin{cases} \text{Max } W = 3x_1 + x_2 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 - e_1 + t_1 = 10 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + t_2 = 7 \\ x_1 + 3x_3 + e_3 = 8 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$ (1)

(0,5)

Phase I : $\text{Min}(t_1 + t_2) = \text{Min}(17 - 4x_1 + e_1 - x_3)$
$= -\text{Max}(-17 + 4x_1 + x_3 - e_1)$. (1)

x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	t_1	t_2	d_i	
1	1	0	-1	0	0	1	0	10	t_1
3	-1	1	0	0	0	0	1	7	t_2
1	0	3	0	0	1	0	0	8	e_3
4	0	1	-1	0	0	0	0	17	c_i

x_1 entre, t_2 sorte.

(1)

x_1	x_2	x_3	e_1		e_3	t_1	t_2	d_i	
0	$\frac{4}{3}$	$\frac{-1}{3}$	-1		0	1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{23}{3}$	t_1
1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0		0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	x_1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	0		0	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{17}{3}$	e_3
0	$\frac{4}{3}$	$\frac{-1}{3}$	-1		0	0	-1	$\frac{23}{3}$	c_i

x_2 entre, t_1 sorte

(1)

x_1	x_2	x_3	e_1		e_3	t_1	t_2	d_i	
0	1	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-3}{4}$		0			$\frac{23}{4}$	x_2
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$		0			$\frac{17}{4}$	x_1
0	0	$\frac{25}{12}$	$\frac{1}{4}$		1			$\frac{15}{4}$	e_3
0	0	0	0		0			0	c_i

$2^{\text{ème}}$ **Phase** avec la fonction objective $\text{Max}\,W = 3x_1 + x_2 - 2x_3$

x_1	x_2	x_3	e_1	e_3	d_i	
0	1	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	0	$\frac{23}{4}$	x_2
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{17}{4}$	x_1
0	0	$\frac{25}{12}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{15}{4}$	e_3
3	1	-2	0	0	0	C_i

x_1	x_2	x_3	e_1	e_3	d_i	
0	1	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	0	$\frac{23}{4}$	x_2
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{17}{4}$	x_1
0	0	$\frac{25}{12}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{15}{4}$	e_3
0	1	$\frac{-11}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{-51}{4}$	C_i

x_1 sorte, x_1 entre

x_2 sorte, x_2 entre

x_1	x_2	x_3	e_1	e_3	d_i	
0	1	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	0	$\frac{23}{4}$	x_2
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{17}{4}$	x_1
1	0	$\frac{25}{12}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{15}{4}$	e_3
0	0	$\frac{-10}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	z	C_i

x_1	x_2	x_3	e_1	e_3	d_i	
3	1	6	0	3	17	x_2
2	0	$\frac{28}{12}$	0	1	8	x_1
4	0	$\frac{25}{3}$	1	4	15	e_3
-6	0	-15	0	-6	z	C_i

La solution est $x^* = (8, 17, 0)^T$. $Z = 41$

P_1 :

$$\text{Min}\,Z = -\text{Max}\,(2x_1 + 3x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + e_1 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + e_2 = 5 \end{cases}$$

x_1	x_2	e_1	e_2	d_i	
1	-2	1	0	3	e_1
2	1	0	1	5	e_2
2	3	0	0	0	C_i

x_1	x_2	e_1	e_2	d_i	
5	0	1	2	13	e_1
2	1	0	1	5	x_2
-4	0	0	-3	-15	C_i

stop

x_2 entre, e_2 sorte

La solution est $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Correction d'exercice 2/ (4.5 pts)
Commençons par trouver la fonction économique à optimiser. Si on nomme F_1 le nombre de tonnes de fromage AOC vendues en une année et F_2 le nombres de tonnes de l'autre fromage, la marge annuelle (exprimée en k DA) de l'entreprise est :

$$Z = 600 \times 1000 \times F_1 + 200 \times 1000 \times F_2.$$

Les ressources imposent des contraintes sur la production :La laiterie reçoit 4 millions de litres de lait de la zone AOC, et la tonne de fromage AOC en utilise 10 000 litres :

$$10000 \times F_1 \leq 4000000$$

La laiterie reçoit 10 millions de litres de lait (4 millions de la zone AOC et 6 millions d'autres zones), et tout ce qui n'est pas utilisé par le fromage AOC ($10000 \times F_1$) peut être utilisé pour le second
fromage qui en utilise 7500 litres par tonne :

$$7500 \times F_2 \leq 10000000 - 10000 \times F_1$$

La tonne de fromage AOC nécessite 30 heures de travail, et celle de l'autre fromage 15 heures. La
laiterie dispose de 21000 heures :

$$30 \times F_1 + 15 \times F_2 \leq 21000.$$

Donc on obtient

$$\begin{cases} \max Z = 600000F_1 + 200000F_2 \\ 10000F_1 \leq 4000000 \\ 10000F_1 + 7500F_2 \leq 10000000 \\ 30F_1 + 15F_2 \leq 21000 \\ F_1, F_2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \max Z = 600000F_1 + 200000F_2 \\ F_1 \leq 400 \\ 4F_1 + 3F_2 \leq 4000 \\ 2F_1 + F_2 \leq 1400 \\ F_1, F_2 \geq 0 \end{cases}$$

Correction d'exercice 3: (5 pts)
Une barre de 200cm peut être découpe de façons:
1. Une plaque de 110cm et une plaque de 50cm; les chutes seront de 40 cm
1. Une plaque de 110cm et une plaque de 75cm; les chutes seront de 15 cm
1. Deux plaques de 75cm et une plaque de 50cm; les chutes seront de 0 cm
1. 4 plaques de 50cm; les chutes seront de 0 cm

soit x_i le nombre de plaques à deouper par la façons i; alors le programme s'écrit

$$(P): \begin{cases} \min W = 40x_1 + 15x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 30 \\ x_2 + 2x_3 \geq 40 \\ x_1 + x_3 + 4x_4 \geq 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$