Corrigé type de l'examen de "Probabilités"

Exercice 01 (12 points)

1. La densité du couple (T,Z) est :

$$f_{T,Z}(t,z) = |J|\, f_{X,Y}\big(H(t,z), G(t,z)\big),$$

où J est le jacobien (0,5)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial H(t,z)}{\partial t} & \frac{\partial H(t,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial G(t,z)}{\partial t} & \frac{\partial G(t,z)}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

On a : $\left.\begin{array}{l} T = XY \\ \text{et } Z = X/Y \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} X = \sqrt{TZ} = H(T,Z) \\ Y = \sqrt{\frac{T}{Z}} = G(T,Z) \end{array}$

Donc $J = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{t}} & \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{z}} \\ \frac{1}{2\sqrt{tz}} & \frac{-\sqrt{t}}{2z\sqrt{z}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2z}$. (0,5)

et : $f_{T,Z}(t,z) = \left|\frac{-1}{2z}\right| f_X(\sqrt{tz})\, f_Y\left(\sqrt{\frac{t}{z}}\right)$,

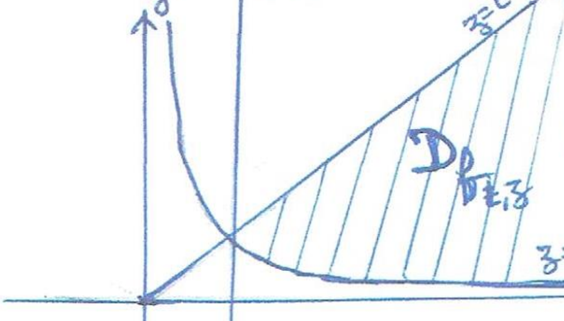
car X et Y sont indépendantes.

Donc : $f_{T,Z}(t,z) = \frac{9}{2zt^4}$. (0,5)

où le domaine de définition est

(0,5)

$$D_{f_{T,Z}} = \left\{(t,z) \in \mathbb{R}^2 : t \geqslant 1 \text{ et } \frac{1}{t} \leqslant z \leqslant t\right\}.$$



(0,75)

2. Les densités marginales de T et Z :

- $f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{T,Z}(t,z)\,dz$ (0,25)

$$= \int_{1/t}^{t} \frac{9}{2zt^4}\,dz = \frac{9}{2t^4}\int_{1/t}^{t}\frac{1}{z}\,dz. \quad (0,25)$$

Donc : $f_T(t) = \frac{9\ln t}{t^4}$, $t \geqslant 1$. (0,5)

- $f_Z(z) = \int_{\sup(\frac{1}{z}, z)}^{+\infty} f(t,z)\,dt$.

On a deux cas : car $z \in]0,+\infty[$:

- **Cas 1** : $z \in]0,1[$:

$$f_Z(z) = \int_{1/z}^{+\infty} \frac{9}{2zt^4}\,dt = \frac{9}{2z}\int_{\frac{1}{z}}^{+\infty}\frac{1}{t^4}\,dt.$$

Donc : $f_Z(z) = \frac{3}{2}z^2$. (0,75)

- **Cas 2** : $z \in [1,+\infty[$:

$$f_Z(z) = \int_{z}^{+\infty}\frac{9}{2zt^4}\,dt = \frac{3}{2z^4}. \quad (0,75)$$

Donc : $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{2}z^2 & \text{si } z \in]0,1[\\ \frac{3}{2z^4} & \text{si } z \in [1,+\infty[. \end{cases}$

3. La covariance entre T et Z est :

(0,25)

$$\mathrm{cov}(T,Z) = E(TZ) - E(T)E(Z),$$

où : $E(T) = \int_1^{+\infty} t f_T(t)\,dt = \int_1^{+\infty}\frac{9\ln t}{t^3}\,dt = \frac{9}{4}$.

(0,75)

• $E(Z)=\int_0^1 \frac{3}{2} z^3\,dz+\int_1^{+\infty} \frac{3}{2z^3}\,dz = \frac{9}{8}$ 1

et $E(TZ)=\int_1^{+\infty}\int_{1/t}^{t} tz\left(\frac{9}{2zt^4}\right)dz\,dt$ 0,25

$$=\frac{9}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^3}\left(\int_{1/t}^{t}1\,dz\right)dt = 3.$$ 0,5

Donc : $cov(T,Z)=3-\frac{9}{4}\times\frac{9}{8}=\frac{15}{32}$ 0,5

4. Les densités conditionnelles de $T|Z$ et $Z|T$

On a : • $f_{T|Z}(t|z)=\frac{f_{T,Z}(t,z)}{f_Z(z)}$ 0,25

Donc :

$$f_{T|Z}(t|z)=\begin{cases}\frac{3}{z^3t^4} & \text{si } z\in]0,1[\\ \frac{3z^3}{t^4} & \text{si } z\in[1,+\infty[\end{cases}$$ 0,25 0,25

• $f_{Z|T}(z|t)=\frac{f_{T,Z}(t,z)}{f_T(t)}=\frac{1}{2z\ln t}\,;\ t>1.$ 0,5

Donc l'espérance conditionnelle

$$E(Z/T=t)=\int_{\frac{1}{t}}^{t} z\,f_{Z|T}(z|t)\,dz$$ 0,5

$$=\int_{1/t}^{t}\frac{z}{2z\ln t}\,dz=\frac{t^2-1}{2t\ln t}\,;\ t>1.$$ 0,75

5. La densité de $V=\sqrt{T}$ est :

$$f_V(v)=2v\,f_T(v^2)$$ 0,5

$$=2v\frac{9}{(v^2)^4}\ln(v^2)$$ 0,25

Donc : $f_V(v)=\frac{36\ln v}{v^7}\,;\ v\geqslant 1.$ 0,5

Exercice 2 (06 points)

1. On a : $X_n=\left(\prod_{k=1}^{n}U_k\right)^{\alpha/n}=e^{\frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(U_k)}$ 0,25

et d'après la loi forte des grands nombres on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(U_k)\xrightarrow{p.s}E(\ln(U))$$ 0,5

où $E(\ln(U))=\int_0^1\ln u\,du=-1.$ 0,5

Puisque la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, on a : 0,25

$$X_n=e^{\frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(U_k)}\xrightarrow{p.s}e^{-\alpha}$$ 0,5

c'est-à-dire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement et sa limite est $e^{-\alpha}$. 0,25

• On a si $X_n\xrightarrow{p.s}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{P}X$

Alors $X_n\xrightarrow{P}e^{-\alpha}$. 0,5

2. La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{L}^p$ vers 0 ssi :

$$\lim_{n\to+\infty}E(|Y_n|^p)=0.$$ 0,5

On a : $E(|Y_n|^p)=\int_0^1 y^p f_{Y_n}(y)\,dy.$ 0,25

où : $f_{Y_n}(y)=F'_{Y_n}(y)=\left(P(Y_n\leq y)\right)'$

Or : $P(Y_n\leq y)=P(\min(U_k)\leq y)$

$$=1-P(\min(U_k)>y)$$

et comme les variables U_k $(k=1,2,\dots,n)$ sont indépendantes, on a :

(0,25)

$$P(Y_n \leq y) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(U_k > y)$$

$$= 1 - \prod_{k=1}^{n} \left[1 - P(U_k \leq y)\right],$$

et comme les variables U_k $(k=1,2,\dots,n)$ ont le même Loi :

(0,5)

$$P(Y_n \leq y) = 1 - (1-y)^n \; ; \; y \in [0,1].$$

Donc :

$$f_{Y_n}(y) = n(1-y)^{n-1} \quad (0{,}25)$$

et $$E(|Y_n|^p) = n\int_0^1 y^p (1-y)^{n-1} dy$$

$$(0{,}5) \leq n\int_0^1 y(1-y)^{n-1} dy \quad (p \geq 1)$$

L'intégration par parties donne

(0,5)

$$n\int_0^1 y(1-y)^{n-1} dy = \int_0^1 (1-y)^n dy = \frac{1}{n+1}$$

c'est-à-dire : $E(|Y_n|^p) \leq \frac{1}{n+1}$. (0,25)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E(|Y_n|^p) = 0$, (0,25)

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Enfin : $Y_n \xrightarrow{\mathbb{L}^p} 0$.

Exercice 03 : (02 points)

On a : $$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_X(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 < +\infty. \quad (0{,}75)$$

Donc, ϕ_X est intégrable et la densité de probabilité de X est :

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \phi_X(t) dt$$

(0,5)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-2|t|} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{(2-ix)t} dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-(2+ix)t} dt$$

(0,25)

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2-ix} + \frac{1}{2+ix}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi(4+x^2)} \; ; \forall x \in \mathbb{R}.$$

(0,5)

Enseignant : BENKHELIFA.