

Université Larbi Ben M'Hidi, Oum El Bouaghi
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques et Informatique

Première année Master
Mathématiques appliquées

Année Universitaire 2018/2019
Jeudi 10/01/2019 (08:30-10:00)

Examen (Matière: Probabilités)

Exercice 1: (12 points). Soit U une variable aléatoire, sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , de densité:

$$f_U(u) = \frac{3}{u^4} \mathbf{1}_{[1, +\infty[}(u).$$

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi que U et soient T et Z deux variables aléatoires telles que: $T = XY$ et $Z = X/Y$.

1. Déterminer la densité du couple (T, Z) et tracer son domaine de définition.
2. Déterminer les densités marginales de T et Z .
3. Calculer la covariance entre T et Z .
4. Déterminer les densités conditionnelles de $T|Z=z$ et $Z|T=t$ puis calculer l'espérance conditionnelle $E(Z | T = t)$.
5. On pose $V = \sqrt{T}$, calculer la densité de probabilité de V .

Exercice 2: (6 points). Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$: $F_U(u) = u \mathbf{1}_{[0,1]}(u)$. On pose

$$X_n = \left(\prod_{k=1}^n U_k \right)^{\frac{\alpha}{n}} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad Y_n = \min_{1 \leq k \leq n} (U_k).$$

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement et donner sa limite. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en probabilité vers cette limite?
2. Montrer que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans \mathbb{L}^p ($p \geq 1$) vers 0.

Exercice 3: (2 points). Une variable aléatoire réelle X a pour fonction caractéristique

$$\phi_X(t) = e^{-2|t|}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer la densité de probabilité de X .

Bonne Chance
Dr. BENKHELIFA