Correction Contrôle 01

Algèbre 01 :

Exercice N° 1

1)

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 1 & x^2 + x + 4 \\ -x^4 - x^3 - 4x^2 & \overline{x^2 - 3x} \\ \hline -3x^3 - 3x^2 - 5x + 1 & \\ 3x^3 + 3x^2 + 12x & \\ \hline 7x + 1 & \end{array}$$

0,75

donc :

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 1 = (x^2 - 3x)(x^2 + x + 4) + (7x + 1)$$

$$A = Q \cdot B + R \quad 0,25$$

2] $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$.

$P(2) = 0$ 0,25

$P'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 4$ 0,25

$P'(2) = 0$ 0,25

$P''(x) = 12x^2 - 30x + 12$ 0,25

$P''(2) = 0$ 0,25

$P'''(x) = 24x - 30$ 0,25

$P'''(2) = 18 \neq 0$ 0,25

إذن 2 هو جذر ذو تعدد 3 لكثير الحدود P 0,25

2 : racine de multiplicité "3" de P

3] $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un Corps.

1ère réponse : Les seuls éléments non nuls inversible de $\mathbb{Z}$ sont "1" et "-1" 0,5

2ème réponse :

$\mathbb{Z}$ contient plus de deux idéaux il contient 3 idéaux qui sont : $\mathbb{Z}$; $\{0_{\mathbb{Z}}\}$; $n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). 0,5

• $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ n'est pas un Corps 0,5

1ère réponse : 8 n'est pas premier $[(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ Corps $\Leftrightarrow n$: premier$]$.

2ème réponse :

$\exists\, \dot{2}, \dot{4} \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\dot{2} \neq \dot{0}, \dot{4} \neq \dot{0}$, $\dot{2} \dot{\times} \dot{4} = \dot{\overline{2 \times 4}} = \dot{8} = \dot{0}$

c.à.d $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ contient des diviseurs de $\dot{0}$, donc $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ est un anneau non intègre, et tout anneau non intègre n'est pas un corps. 0,5

EXERCICE N° 2 :

1] $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x(x+2)$. 0,25

$f\{0\} = 0$, $f(\{-2\}) = 0$ 0,25

$f^{-1}(1) = \{-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\}$ 0,5

$f^{-1}(\{-1\}) = \{1\}$ 0,5

$f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset$ 0,5

2] $f\{0\} = f(\{-2\}) = 0$ mais $-2 \neq 0$ donc f n'est pas injective 1

$f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset$.

donc pour $y = -2$, $x \nexists$.

donc f n'est pas surjective. 1

3] $f_1 : X \longrightarrow Y$.

f_1 : bijective $\iff f_1$: surjective + injective

f_1 : injective $\iff \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$f_1(x_1) = f_1(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 2x = x_2^2 + 2x$$
$$\Rightarrow (x_1+1)^2 - 1 = (x_2+1)^2 - 1$$
$$\Rightarrow (x_1+1)^2 = (x_2+1)^2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+1 = x_2+1, & x_1 \geq -1,\ x_2 \geq -1 \\ x_1+1 = -(x_2+1), & x_1 \geq -1,\ x_2 \leq -1 \\ -(x_1+1) = (x_2+1), & x_1 \leq -1,\ x_2 \geq -1 \\ -(x_1+1) = -(x_2+1), & x_1 \leq -1,\ x_2 \leq -1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \text{ si } x_1 \leq -1,\ x_2 \leq -1 \\ \qquad\qquad \vee \\ \qquad\qquad x_1 \geq -1,\ x_2 \geq -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f_1$: injective $\Rightarrow x \in]-\infty, -1]$ ou bien $x \in [-1, +\infty[$. 0,5

f_1 : surjective $\Rightarrow f(x) = y$ admet au moins une solution.

$f_1(x) = y \Rightarrow x^2 + 2x = y \Rightarrow x^2 + 2x - y = 0$

$\Delta = 4 + 4y$, donc $\Delta \geq 0 \iff y \geq -1$ 0,5

donc f surjective $\iff y \in [-1, +\infty[$

donc $f_1 : \boxed{[-1, +\infty[\longrightarrow [-1, +\infty[}$ ou bien $f_1 :]-\infty, -1] \longrightarrow [-1, +\infty[$

Exercice N°3:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a * b = \ln(e^a + e^b)$. 0,75

on a $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $e^a + e^b > 0$, donc

$*$ est bien définie, donc $*$: loi de composition interne sur $\mathbb{R}$.

2] $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a * b = b * a$ 0,25

$$a * b = \ln(e^a + e^b) = \ln(e^b + e^a) = b * a.$$ 0,5

$\Rightarrow *$ Commutative.

• associativité 0,25

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a*b)*c = a*(b*c)$

$$(a*b)*c = \left(\ln(e^a + e^b)\right) * c = \ln\left(e^{\ln(e^a+e^b)} + e^c\right) = \ln(e^a + e^b + e^c) \quad (1)$$

$$a*(b*c) = a * \ln(e^b + e^c) = \ln\left(e^a + e^{\ln(e^b+e^c)}\right) = \ln(e^a + e^b + e^c) \quad (2)$$ 0,5

de (1) et (2) $*$: associative

• l'élément neutre: 0,25

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $a * \lambda = a$

$$a * \lambda = a \Rightarrow \ln(e^a + e^\lambda) = a \Rightarrow e^a + e^\lambda = e^a \Rightarrow e^\lambda = 0 \text{ . impossible.}$$

$\Rightarrow *$ n'admet pas un élément neutre. 0,5

3] Comme l'élément neutre n'existe pas, donc les élément symetrisables n'existent pas. 0,75

• les éléments réguliers :

$\forall a,b \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{R}, a * r = b * r \Rightarrow a = b$ 0,25

$a * r = b * r \Rightarrow \ln(e^a + e^r) = \ln(e^b + e^r)$

$\Rightarrow e^a + e^r = e^b + e^r.$

$\Rightarrow e^a = e^b.$

$\Rightarrow a = b$

donc tous les éléments de $\mathbb{R}$ sont réguliers 0,5

4] $(\mathbb{R}, *)$ n'est pas un groupe car l'élément neutre n'existe pas ; alors que les éléments symetrisables 0,5

EXERCICE 4

$H = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2,\ x + y = \text{pair}\}.$

1] • $H \neq \emptyset$?

$(0,0) \in H$ car $0+0=0$: pair.

$\Rightarrow H \neq \emptyset$ 0,5

• $\forall (x,y),(x',y') \in H;\ (x,y)-(x',y') \in H$ 0,25 ?

on a : $(x,y),(x',y') \in H \Rightarrow \begin{cases} x+y = 2p \\ x'+y' = 2p' \end{cases}$

$(x,y) - (x',y') = (x-x', y-y').$

on a : $(x-x') + (y-y') = (x+y) - (x'+y')$

$= 2p - 2p'$

$= 2(p-p') = 2k$

donc $(x,y)-(x',y') \in H$. 0,25

alors H = sous-groupe de $(\mathbb{Z}^2, +)$

2] $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{Z}^2$

$\varphi((x,y)+(x',y')) = \varphi(x+x', y+y')$

$= (x+x', 2(y+y') - x - x')$

$= (x, 2y-x) + (x', 2y'-x')$

$= \varphi(x,y) + \varphi(x',y')$

$\Rightarrow \varphi$ = homomorphisme 1

3] $\ker\varphi = \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2,\ \varphi(x,y) = (0,0)\}$ 0,5

$= \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2,\ (x, 2y-x) = (0,0)\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2,\ x=0,\ y=0\}.$

$= \{(0,0)\}$ 0,5

$\mathrm{Im}\,\varphi = \{\varphi(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{Z}^2\}$ 0,5

$= \{(x, 2y-x),\ (x,y)\in\mathbb{Z}^2\}.$

$= H$ 0,5 car $x + (2y-x) = 2y$

= nombre paire

0,25

4] Comme $\ker\varphi = \{(0,0)\} \Rightarrow \varphi$ = injecti.

$\mathrm{Im}\,\varphi = H \Rightarrow \varphi$ surjective 0,25

donc φ = bijective 0,25

Alors φ = isomomorphisme. 0,25