Université de Mascara
Faculté des sciences exactes
Département de Mathématiques Durée 1H30 mn
3ém année Maths EMD Optimisation sans contraintes

Enseignante : Mme Meliani Nacera

Exercice $n^0 1$:
1) Donner la définition d'une fonction convexe
2) Montrer l'inégalité de young:
$\forall a, b > 0$, $\forall p, q \in N$ tels que $\frac{1}{P} + \frac{1}{q} = 1$,
$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Exercice $n^0 2$:
a)Repondre par vraie ou faux en justifiant votre réponses :
Sif est convexe alors $f(x) \geqslant f(\bar{x}) + < \nabla f(x), x - \bar{x} > \forall x \in R^n$ avec $\bar{x}$ solution de (p)
b) Trouver les minima et les maxima de la fonction f sur R^2
$f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

Exercice $n^0 3$:
1)Ecrire l'algorithme du gradient conjugué dans le cas d'une forme quadratique:
2) Demontrer que:
$< g_k, g_j >= 0$ *pour* $0 \lneq j < k$
$< g_k, w_j >= 0$ *pour* $0 \lneq j < k$
$< w_k, Aw_j >= 0$ *pour* $0 \lneq j < k$

bon courage!!!

Correction de l'examen:

Exercice $n^0 1$:

1) f est convexe si et seulement si $\forall x, y \in A$ on a:
$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \qquad \forall \alpha \in [0,1]$ (2pts)
2) On utilise la convexit de la fonction exponentielle avec $\frac{1}{P} + \frac{1}{q} = 1$,
On obtient :
$exp(\frac{1}{P} lna^p + \frac{1}{q} lnb^q) \leq \frac{1}{p} exp(lna^p) + \frac{1}{q} exp(lnb^q)$ pour $a, b > 0$
C. A. D
$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (5pts)

Exercice $n^0 2$:
$a)$ l'inégalité est fausse donc :
si f est convexe et si $\bar{x}$ est solution de (p) alors on a:

$f(x) \geqslant f(\bar{x}) + < \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} > \forall x \in R^n \qquad (*)$ (2pts)
pour la démonstration on utilise le theoréme suivant:
f est convexessi $f(v) \geqslant f(u) + < \nabla f(u), v - u > \forall (u, v) \in H \times H$
(voir le cours)
Donc pour $u = \bar{x}$ et $v = x$ on obtient l'inégalité $(*)$ $(5pts)$

Exercice $n^0 3$:

1) Pour l'algorithme du gradient cojugué (voir le cours) (2pts)
2) Demonstration par récurrence:
Pour $k = 1$, nous avons $w_0 = g_0$: donc
$< g_1, w_0 >=< Ax_1 - b, w_0 >=< Ax_0 - b, w_0 > -\rho_0 < Aw_0, w_0 >=< g_0, w_0 > -\rho_0 < Aw_0, w_0 >= 0$
D'aprés la definition de ρ_0 ceci entraine aussi que: $< g_1, g_0 >=< g_1, w_0 >= 0$
et
D'aprés la définition de α_1 on a:
$< w_1, Aw_0 >=< g_1, Aw_0 > +\alpha_1 < w_0, Aw_0 >= 0$ $2pts$

Nous faisons maintenant l'ypothése de récurrence: (HR)

$< g_k, g_j >= 0$ *pour* $0 \lneq j < k$
$< g_k, w_j >= 0$ *pour* $0 \lneq j < k$
$< w_k, Aw_j >= 0$ *pour* $0 \lneq j < k$
Si $g_k \neq 0$ On peut construire l'algorithme au rang $k + 1$
$C.A.D$ obtenir $(x_{k+1}, g_{k+1}, w_{k+1})$
on a:
$< g_{k+1}, w_k >= 0$ par construction
Pour $j < k$:
$< g_{k+1}, w_j >=< g_{k+1}, w_j > - < g_k, w_j >=< g_{k+1} - g_k, w_j >= -\rho_k < Aw_k, w_j >= 0$
car$< g_k, w_j >= 0$ c'est l'hypothése de récurrence (HR)
Pour $j \leq k$
On a$< g_{k+1}, g_j >=< g_{k+1}, w_j > -\alpha_j < g_{k+1}, w_{j-1} >= 0$ car $g_j = w_j - \alpha_j w_{j-1}$
De meme pour
$< w_{k+1}, Aw_j >= 0$ $(2pts)$