

Correction d'examen du 7 Janvier 2019

Exercice 1 (*Tribu Image*) (2pts + 2pts + 3pts)

Soient E et F des ensembles. Pour $\mathcal{A} \subset P(E)$ (resp. $P(F)$), on note $T(\mathcal{A})$ la tribu E (resp. F) engendrée par \mathcal{A} . Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

(a) On démontre que $f^{-1}(\mathcal{T}')$ est une tribu sur E en remarquant que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $E \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(F \setminus A)$ (pour tout $A \subset F$) et $f^{-1}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \cup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$ (pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset P(F)$).

(b) Ici aussi, on montre que \mathcal{T}' est une tribu sur F en remarquant que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$ (pour tout $A \subset F$) et $f^{-1}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \cup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n)$ (pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset P(F)$).

Noter que, en général, $\{f(B), B \in \mathcal{T}\}$ n'est pas une tribu sur F (par exemple, si f est non surjective, $F \setminus \{f(B), B \in \mathcal{T}\}$).

(c) $f^{-1}(T(\mathcal{C}))$ est une tribu sur E (d'après la première question) contenant $f^{-1}(\mathcal{C})$ car $(T(\mathcal{C}) \supset \mathcal{C})$, elle contient donc $T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, ce qui donne $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \supset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

Pour montrer l'inclusion inverse, c'est à dire $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$. On pose $T = \{G \subset F; f^{-1}(G) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$. On montre d'abord que T est une tribu :

★ $\emptyset \in T$ car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$

★ T est stable par passage au complémentaire car, si $A \in T$, on a $f^{-1}(A) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ et $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, donc $(F \setminus A) \in T$.

★ T est stable par union dénombrable car, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$, on a $f^{-1}(A_n) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T$.

On a bien montré que T est une tribu. Il est immédiat que $T \supset \mathcal{C}$ (car $f^{-1}(B) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ pour tout $B \in \mathcal{C}$). On en déduit que T contient $T(\mathcal{C})$, c'est à dire que $f^{-1}(B) \in T(f^{-1}(\mathcal{C}))$ pour tout $B \in T(\mathcal{C})$. Ceci signifie exactement que $f^{-1}(T(\mathcal{C})) \subset T(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

Les deux inclusions nous donnent bien $f^{-1}(T(\mathcal{C})) = T(f^{-1}(\mathcal{C}))$.

Exercice 2 (*Mesure*) (3pts + 3pts)

Soit (E, T, m) un espace mesuré fini (c.à.d $m(E) < \infty$) et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites d'ensembles mesurables tels que $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(a) Soit $x \in (\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \setminus \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, on a donc $x \in \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $x \notin \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, c'est à dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ t.q. $x \in A_p$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \notin B_n$. On a donc $x \in A_p \setminus B_p$, ce qui prouve que $x \in \cup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus B_n)$ et donc $(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \setminus \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus B_n)$.

(b) Puisque $m(E) < \infty$, on a, pour tout $A, B \in T$ t.q. $B \subset A$, $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$. La monotonie de m , la σ -sous additivité de m (et la question précédente) nous donne alors :

$$\begin{aligned} m(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) - m(\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n) &= m((\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \setminus (\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n)) \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} m(A_n \setminus B_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (m(A_n) - m(B_n)) \end{aligned}$$

Exercice 3 (*Fonctions mesurables*) (3pts + 4pts)

Soient (E, T) un espace mesurable et f une application de E dans \mathbb{R} ;

(a) voir la 1ere question de l'exercice 1

(b) Soit \mathcal{C} un ensemble qui engendre $\mathbb{B}(\mathbb{R})$, on montre que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est mesurable,

(ii) $f^{-1}(C) \in T$, pour tout $C \in \mathcal{C}$

On remarque que f mesurable signifie simplement que T_f contient $B(\mathbb{R})$.

Le sens (i) \Rightarrow (ii) est immédiat car $\mathcal{C} \subset B(\mathbb{R})$.

Pour le sens (ii) \Rightarrow (i), on remarque que T_f est une tribu. Donc, si T_f contient \mathcal{C} , on a aussi T_f contient $T(\mathcal{C}) = B(\mathbb{R})$. Ceci donne f mesurable.

Proverbe : Le mérite ne saurait se mesurer avec le succès.