Université de M'sila 2018-2019. Département de T.C.T.

(Maths 3).

Exercise 1 *a) On note par $F(s)$ l'image par la transformée de Laplace de* $f(t) = \begin{cases} \cos t & t \geq \pi \\ 0 & 0 < t < \pi \end{cases}$,

1).Par définition $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_\pi^{+\infty} \cos t\ e^{-st}dt$, *on faisant un changement de variable* $x = t-\pi$ *on obtient* $F(s) = e^{-\pi s}\int_0^{+\infty} \cos(t+\pi)\, e^{-st}dt = -e^{-\pi s}\int_0^{+\infty} \cos(t)\, e^{-st}dt = -e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$ *où* $\frac{s}{s^2+1}$ *est l'image de la fonction* $\cos t$, *donc l'image de f est*

$$F(s) = \begin{cases} -e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1} & pour\ t \geq \pi \\ 0 & pour\ \ 0 < t < \pi \end{cases}$$

on utilisant les résultats du cours on trouve que: a)

$$\begin{cases} pour\ t \geq \pi\ \ on\ a\ tf(t) \longleftrightarrow -\frac{dF}{ds} = e^{-\pi s}\left(\frac{-\pi s}{s^2+1} + \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}\right) \\ pour\ \ t < \pi\ on\ a\ tf(t) \longleftrightarrow 0 \end{cases}$$

b) et

$$\int_0^t f(x)dx \longleftrightarrow \begin{cases} \frac{F(s)}{s} = -e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} & pour\ t \geq \pi \\ 0 & pour\ \ 0 < t < \pi \end{cases}$$

2) On donne $G(s) = e^{-\sqrt{s}} \longleftrightarrow g(t)$ *sachant que* $L(s) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \longleftrightarrow l(t) = \frac{e^{\frac{-1}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$ *comme* $\frac{dG}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{e^{-\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} = -\frac{1}{2}L(s) \overset{hyp}{\longleftrightarrow} -\frac{1}{2}\frac{e^{\frac{-1}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} \overset{l'unicité}{=} -tg(t)$ *alors l'origine de G est*

$$g(t) = \frac{1}{2}\frac{e^{\frac{-1}{4t}}}{\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}.$$

b.) On pose $H(s) = \arctan\frac{1}{s+4} \longleftrightarrow h(t)$, on a $\frac{dH}{ds} = -\frac{1}{(s+4)^2}\frac{1}{\frac{1}{(s+4)^2}+1} = \frac{-1}{(s+4)^2+1} \overset{cours}{\longleftrightarrow} -th(t)$ comme $\frac{-1}{(s+4)^2+1} \overset{cours}{\longleftrightarrow} -e^{-4t}\sin t$ alors

$$H(s) = \arctan\frac{1}{s+4} \longleftrightarrow h(t) = e^{-4t}\,\frac{\sin t}{t}.$$

c) $K(s) = \log\left(\frac{s^2+2s+13}{s^2+2}\right) \longleftrightarrow k(t)$ comme $\frac{dK}{ds} = \frac{2s+2}{s^2+2s+13} - \frac{2s}{s^2+2} = 2\frac{s+1}{(s+1)^2+\left(\sqrt{12}\right)^2} - 2\frac{s}{s^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} \overset{cours}{\longleftrightarrow} -tk(t)$ de plus comme

$$\begin{cases} \dfrac{s+1}{(s+1)^2+\left(\sqrt{12}\right)^2} \longleftrightarrow e^{-t}\cos\sqrt{12}t, \\ \dfrac{s}{s^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} \longleftrightarrow \cos\sqrt{2}t, \end{cases}$$

alors on utilisant la linearitée, on tire

$$K(s) = \log\left(\frac{s^2+2s+13}{s^2+2}\right) \longleftrightarrow k(t) = -\frac{2}{t}\left[e^{-t}\cos\sqrt{12}t - \cos\sqrt{2}t\right]$$

par conséquent si on note par $g(t)$ l'origine de G alors $\frac{dG}{ds}$ a pour origine $-tg(t)$ donc de l'équation $G(s)+G'(s) = K(s) = \log\left(\frac{s^2+2s+13}{s^2+2}\right)$ on tire que $(t+1)g(t)$ a pour image $\log\left(\frac{s^2+2s+13}{s^2+2}\right)$, le théorème de l'unicité et la question précédente nous donne

$$g(t) = \frac{2}{t(t+1)}\left[e^{-t}\cos\sqrt{12}t - \cos\sqrt{2}t\right]$$

6) pour l'équation différentielle $\begin{cases} ty'+y = e^{\lambda t} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$, appliquant aux deux membres la transformée de Laplace, on utilisant le fait que

$$ty' \overset{cours}{\longleftrightarrow} -\frac{d}{ds}\left(-y(0)+sY(s)\right) = -Y(s) - sY'(s)$$

où $Y(s)$ est l'image par Laplace de $y(t)$, on obtient $-sY'(s) = \dfrac{1}{s-\lambda} \Longrightarrow$ $Y'(s) = -\dfrac{1}{s}\dfrac{1}{s-\lambda}$ alors

$$-ty(t) \longleftrightarrow Y'(s) = -\frac{1}{s}\frac{1}{s-\lambda} = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s-\lambda}\right) & \lambda \neq 0 \\ -\dfrac{1}{s^2} & \lambda = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\left(1 - e^{\lambda t}\right) \\ -t \end{cases} \quad \lambda$$

car $\dfrac{1}{s} \longleftrightarrow 1$ et $\dfrac{1}{s-\lambda} \longleftrightarrow e^{\lambda t}$ de plus d'aprés le résultat de cours on tire que

$$Y(s) \longleftrightarrow y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{e^{\lambda t}-1}{t}\right) & \lambda \neq 0 \\ 1 & \lambda = 0 \end{cases}$$

pour que cette fonction $y(t)$ soit solution de notre problème, il faut que $y(0) = \alpha$ donc comme $y(0) = 1$ pour tout λ de $\mathbb{R}$ alors

si $\alpha = 1$ le probléme a une solution unique donnée par $y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{e^{\lambda t}-1}{t}\right) & \lambda \neq 0 \\ 1 & \lambda = 0 \end{cases}$,

si $\alpha \neq 1$ le problème n'a pas de solution.

Exercise 2 *Soit f une fonction periodique de peroide $T = 2$, donnée par $f(t) = t$ où $t \in [0, 2]$.*

a) on peut déduire facilement que

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ t+2 & -1 < t < 0 \end{cases}$$

b) La série de Fourier sur lintervalle $[-1, 1]$ .il s'agit de trouver les coefficient

de Fourier

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{0} (t+2)\, dt + \int_{0}^{1} tdt = \left.\frac{(t+2)^2}{2}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{t^2}{2}\right|_{0}^{1} = 2,$$

$$a_n \overset{n\geq 1}{=} \int_{-1}^{0} (t+2)\cos n\pi t dt + \int_{0}^{1} t\cos n\pi t dt = \frac{1}{n\pi}\left[\int_{-1}^{0} (t+2)\, d\sin n\pi t + \int_{0}^{1} td\sin n\pi t\right]$$
$$= \frac{1}{n\pi}\left[(t+2)\sin n\pi t|_{-1}^{0} + t\sin n\pi t|_{0}^{1} - \int_{-1}^{0} \sin n\pi t dt - \int_{0}^{1} \sin n\pi t dt\right]$$
$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi t|_{-1}^{0} + \cos n\pi t|_{0}^{1}\right] = \frac{1}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n + (-1)^n - 1\right] = 0,$$

reste à calculer les b_n

$$b_n \overset{n\geq 1}{=} \int_{-1}^{0} (t+2)\sin n\pi t dt + \int_{0}^{1} t\sin n\pi t dt = \frac{-1}{n\pi}\left[\int_{-1}^{0} (t+2)\, d\cos n\pi t + \int_{0}^{1} td\cos n\pi t\right]$$
$$= \frac{-1}{n\pi}\left[(t+2)\cos n\pi t|_{-1}^{0} + t\cos n\pi t|_{0}^{1} - \int_{-1}^{0} \cos n\pi t dt - \int_{0}^{1} \cos n\pi t dt\right]$$
$$\frac{-1}{n\pi}\left[(2-(-1)^n) + (-1)^n - \frac{\sin n\pi t|_{-1}^{0} + \sin n\pi t|_{0}^{1}}{n\pi}\right] = \frac{-2}{n\pi},$$

conclusion la série de Fourier associée à f *est donnée par*

$$1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin n\pi t$$

c) Pour la somme de Fourier on utilisant la formule suivante $S(t) = \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *alors*

$$S(t) = 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin n\pi t = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \quad \textit{car } f \textit{ est continue} \\ 1 & t = 0 \\ t+2 & -1 < t < 0 \quad \textit{car } f \textit{ est continue} \\ 1 & t = \pm 1 \end{cases}$$

d) Si on prend $t = \frac{1}{2} \in (0,1)$ *on trouve*

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$$
$$= 1 - \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Alors

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Maintenant on utilisant légalité de Parseval on tire

$$\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} b_n^2 = 2 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

comme

$$\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-1}^{0} |t+2|^2 \, dt + \int_{0}^{1} |t|^2 \, dt = \left.\frac{(t+2)^3}{3}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{t^3}{3}\right|_{0}^{1} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

donc on déduit que

$$2 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{8}{3} \Longrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercise 3 *Etudier la nature des séries suivantes:*

1) Pour la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(n+1)^{2n}}{(2n)!}$, *il est claire qu'elle est à termes positifs, utilisant le critère de D'Alembet, si on note par* $u_n = \frac{(n+1)^{2n}}{(2n)!}$ *alors* $u_{n+1} = \frac{(n+2)^{2n+2}}{(2n+2)!}$ *donc* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)^{2n+2}}{(n+1)^{2n}} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n} \frac{(n+2)^2 (2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n} \frac{(n+2)^2}{(2n+2)(2n+1)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{e^2}{4} > 1$ *donc la série en question diverge.*

2) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ *pour cette série en peut utilisé le critère de comparison avec la série de Riemann ou bien le critère de comparison avec intégrale. Poue cela on pose* $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ *il est claire que* f *est positive est dérivable sur* $(1, +\infty)$ *et* $\frac{df}{dx} = f'(x) = e^{-\sqrt{x}} \left[\frac{-1}{2x} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{3}{\acute{e}}}}\right] < 0$ *c.à.d* f *est* $\searrow$ *de plus* $\lim\limits_{x\infty} f(x) = 0$ *donc les conditions du théorème sont vérifiées alors la série en question et* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ *ont méme nature. comme* $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -2e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^{+\infty} = 2e^{-1} < +\infty$ *alors la série en question converge.*

3) $\sum\limits_{n\geq 1} \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$. *on pose* $U_n = \ln(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ *cette série est alternée.*

l'orsque n est assez grand $U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} g(n)$ avec $g(n)$ est une fonction bornée l'orsque n assez grand. car $\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + x^3 g(x)$ où g est bornée au voisinage de 0.

Si on pose $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $w_n = \frac{1}{2n}$ et $k_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} g(n)$.

La série de terme générale v_n est une série alternée car $|v_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$ et elle est décroissante donc le théorème de Liebnitz nous permis de conclure que cette séris converge. pour la série de terme générale $w_n = \frac{1}{n}$ série de Riemann $<<\alpha = 1 \leq 1>>$ donc diverge.

pour la série de terme générale k_n on a $|k_n| \leq A \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ comme la série de terme générale $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann $<<\alpha = \frac{3}{2} > 1>>$ donc converge alors la série $\sum k_n$ converge absolument donc converge

conclusion la série en question est la somme de deux séries convergentes et une série divergente alors la notre série diverge.

Resp du module Memou.A