Faculté de Mathématiques Janvier 2016
$2^{\text{ème}}$ année Lic.Maths
Algèbre 3

Examen de rattrapage

Exercice 1: On considère la matrice à coefficients réels $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A_m.
2. Déterminer les valeurs de m pour que la matrice A_m soit diagonalisable.
3. Dans le cas où $m \notin \{1, 2\}$, trouver une base de chaque sous-espace propre. Déterminer alors une matrice inversible P et une matrice diagonale B_m telles que $B_m = P^{-1} A_m P$.
4. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n$ les suites numériques définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A_{-1} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$
avec $u_0 = v_0 = w_0 = 2$.
On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{-1} = A$ et $B_{-1} = B$.
   (a) Calculer X_n en fonction de A, n et X_0.
   (b) Calculer B^n. En déduire A^n.
   (c) Ecrire u_n, v_n, w_n en fonction de n.

Exercice 2: Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrices $M = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Quelle relation y a-t-il entre M et N?
2. Déterminer toutes les matrices qui interviennent dans cette relation.

Exercice 3: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$. On veut montrer que A est nilpotente (ie $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m = 0$).

1. Montrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k B - B A^k = k A^k$.
2. Montrer que l'application f définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = MB - BM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Que peut-on dire du nombre de valeurs propres de f?
4. Montrer que si $A^k \neq 0$ alors k est une valeur propre de f.
5. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

Faculté de Mathématiques Janvier 2016
$2^{\text{ème}}$ année Lic.Maths
Algèbre 3

Corrigé de l'éxamen de rattrapage

Exercice 1 *On considère la matrice à coefficients réels* $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$.

1. *Le polynôme caractéristique de la matrice* A_m *est* $P_{A_m}(X) = -(X-1)(X-2)(X-m)$. *On déduit que ses valeurs propres sont* $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ *et* $\lambda_3 = m$. $(1,5$ *pts*$)$

2. *Si* $m = 1$, *la matrice* A_1 *admet pour valeurs propres* $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ *(double) et* $\lambda_2 = 2$ *(simple). Elle est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre* E_1 *est égale à* 2 *ou de manière équivalente si et seulement si le rang de* $A_1 - I_3$ *est égal à* 1. *Ce qui n'est pas le cas car* $rg(A_1 - I_3) = 2$. *Donc la matrice n'est pas diagonalisable.* $(1$ *pt*$)$

   Si $m = 2$, *la matrice* A_2 *admet deux valeurs propres:* $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ *(double) et* $\lambda_1 = 1$ *(simple). Par suite*

   $$A_2 \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow dimE_2 = 2 \Leftrightarrow rg(A_2 - 2I_3) = 1 \qquad (1\ pt)$$

   ce qui est le cas. Donc la matrice est diagonalisable.

   Si $m \neq 1$ *et* $m \neq 2$ *alors les trois valeurs propres de* A_m *sont toutes simples. On déduit que la matrice est diagonalisable.* $(0,5$ *pt*$)$

   En guise de conclusion, A_m *est diagonalisable si et seulement si* $m \neq 1$.

3. *Déterminons une base de chaque sous-espace propre dans le cas où* $m \notin \{1, 2\}$.

   Une base de E_1 :

   Par définition $E_1 = \{V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (A_m - I_3)V = 0\}$. *On obtient le système*

   $$\begin{cases} z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ (2-m)x + (m-2)y + (m-1)z = 0 \end{cases}$$

   dont les solutions sont $(x, x, 0)$ *avec* $x \in \mathbb{R}$. *Donc* $E_1 = \langle v_1 = (1, 1, 0) \rangle$ *et* $\{v_1\}$ *est une base de* E_1.

   De manière analogue, on a $\{v_2 = (1, 0, 1)\}$ *est une base de* E_2 *et* $\{v_3 = (1, 1, m-1)\}$ *est une base de* E_m.

   On vérifie que $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$. *La matrice* P *demandée est la matrice de passage* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ *de la base canonique à la base* $\mathcal{C}$.

   Et $B_m = P^{-1} A_m P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$ *est la matrice de l'endomorphisme associé à la matrice* A_m *relativement à la base* $\mathcal{C}$. $(0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5$ *pts*$)$

4. *Soient* $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n$ *les suites numériques définies, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *par*

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A_{-1} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

avec $u_0 = v_0 = w_0 = 2$.

On pose $A_{-1} = A,\ B_{-1} = B$ *et* $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(a) *Calcul de* X_n *en fonction de* A, n *et* X_0 :
On montre, par une simple récurrence, que $X_n = A^n X_0$. $(0,5\ pt)$

(b) *Pour* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ *(se fait aussi par récurrence).* $(0,5\ pt)$

Puisque $A = PBP^{-1}$ *alors*

$$A^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+(-1)^n+2^{n+1} & 3-(-1)^n-2^{n+1} & 1-(-1)^n \\ -1+(-1)^n & 3-(-1)^n & 1-(-1)^n \\ 2^{n+1}-2(-1)^n & 2(-1)^n-2^{n+1} & 2(-1)^n \end{pmatrix} \qquad (1\ pt)$$

avec $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. $(1\ pt)$

(c) *D'après la question* (a)

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-1)^n \\ 3-(-1)^n \\ 2(-1)^n \end{pmatrix}$$

donc $u_n = v_n = 3-(-1)^n$ *et* $w_n = 2(-1)^n\ \ \forall n \in \mathbb{N}$. $(1,5\ pt)$

Exercice 2 *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *ayant pour matrices* $M = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* $N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *dans une base* $\mathcal{B}$ *de* $\mathbb{R}^3$.

1. *D'après le schéma suivant:*

$$\begin{array}{ccc} \underset{(\mathcal{E})}{\mathbb{R}^3} & \xrightarrow{f} & \underset{(\mathcal{E})}{\mathbb{R}^3} \\ id \uparrow & & \downarrow id \\ \underset{(\mathcal{B})}{\mathbb{R}^3} & \xrightarrow{f} & \underset{(\mathcal{B})}{\mathbb{R}^3} \end{array}$$

on déduit que $N = P^{-1}MP$ *où* $P = pass(\mathcal{E}, \mathcal{B})$. $(1\ pt)$

2. *Dans cette question, il s'agit de trouver* P *et* P^{-1}.

Posons $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$. *D'après la matrice* N, $f(v_1) = -v_1$, $f(v_2) = 2v_1 - v_2$ *et* $f(v_3) = v_1 + 2v_2 - v_3$. $(0,5\ pt)$

Déterminons v_1 :

Posons $v_1 = (x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$ *avec* $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Par linéarité de* f *on a*

$xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)=-xe_1-ye_2-ze_3$. En utilisant la matrice M on obtient l'équation $x(-4e_1-5e_2-3e_3)+y(2e_1+e_2+2e_3)+z(e_1+3e_2)=-xe_1-ye_2-ze_3$ qui donne le système

$$\begin{cases} -3x+2y+z=0 \\ -5x+2y+3z=0 \\ -3x+2y+z=0 \end{cases}$$

d'où l'on déduit $x=y=z$. En choisissant, par exemple, $x=1$ on obtient $v_1=(1,1,1)$. $(0,5\ pt)$

Remarque: *L'équation $f(v_1)=-v_1$ signifie que -1 est une valeur propre de M et v_1 est un vecteur propre associé. Donc v_1 peut s'obtenir à partir d'une base du sous-espace propre E_{-1}. Ce qui revient encore à résoudre le système précédent.*

Pour déterminer v_2 et v_3, on procède de la même manière. On obtient $v_2=(x,x+1,x)$ et $v_3=(x,x,x+1)$ ce qui nous donne, pour le choix $x=0$, $v_2=(0,1,0)$ et $v_3=(0,0,1)$ $(0,5+0,5\ pt)$.

Par suite $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $(0,25+0,75\ pt)$

Exercice 3 *Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB-BA=A$. On veut montrer que la matrice A est nilpotente (ie $\exists m\in\mathbb{N}^*$ tel que $A^m=0$).*

1. *Montrons par récurrence que $\forall k\in\mathbb{N},\quad A^kB-BA^k=kA^k$.*

   La relation est vraie pour $n=0$ et $n=1$. Supposons qu'elle l'est à l'ordre k. A l'ordre suivant on a

$$\begin{aligned} A^{k+1}B-BA^{k+1} &= A(A^kB)-BA^{k+1} \\ &= A(kA^k+BA^k)-BA^{k+1} \qquad (car\ A^kB-BA^k=kA^k) \\ &= kA^{k+1}+ABA^k-BA^{k+1} \\ &= kA^{k+1}+(A+BA)A^k-BA^{k+1} \qquad (car\ AB-BA=A) \\ &= kA^{k+1}+A^{k+1} \\ &= (k+1)A^{k+1}. \quad (1,5\ pts) \end{aligned}$$

2. *Soient $M,N\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.*

   $f(\alpha M+N)=(\alpha M+N)B-B(\alpha M+N)=\alpha(MB-BM)+(NB-BN)=\alpha f(M)+f(N)$ donc f est linéaire. $(0,5\ pt)$

3. *Puisque les valeurs propres de f sont les racines de son polynôme caractéristique qui est de degré $dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))=n^2$ alors leur nombre est supérieur ou égal à zéro et inférieur ou égal à n^2.* $(1\ pt)$

4. *$f(A^k)=A^kB-BA^k=kA^k$. Donc si $A^k\neq 0$ alors A^k est un vecteur propre et k est une valeur propre de f* $(1\ pt)$.

5. *Supposons par l'absurde que $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ A^k\neq 0$. Alors tout $k\in\mathbb{N}^*$ est une valeur propre de f. Donc f admet une infinité de valeurs propres. Ce qui contredit la question (3.) On déduit qu'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $A^k=0$ ie A est nilpotente.* $(1\ pt)$