Topologie Générale Elémentaire

Licence Mathématiques

Deuxième Année LMD

Semestre 3

El-Bachir Yallaoui

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Ferhat Abbas, Sétif 1

Tables des matières

Préface

Ces notes de cours sont principalement destinées aux étudiants de la deuxième année (semestre 3) de Licence en mathématiques système **LMD** à l'université Ferhat Abbas de Sétif 1, Algérie. Le cours peut être fait durant une quinzaines de semaines à raison de 3 heurs de cours et 3 heures de travaux dirigés.
Ces notes ont pour objectif de donner les fondations élémentaires de bases en topologie générale indispensables à toute formation en mathématiques. Ces notes sont absolument indispensables pour tout étudiant désirant de ce spécialiser en mathématiques. Ceci dit, elles n'ont aucune prétention d'être un recueil complet sur le sujet. J'espère, tout de même, qu'elles constituerons un support pédagogique efficace. Ces notes ne serons complètement profitables aux étudiants que si ces derniers assistent régulièrement aux cours magistraux, et préparent minutieusement les travaux dirigés. Je vous serais très reconnaissant de me signaler toute erreur que vous trouverez dans ces notes de cours.
On a introduit le sujet de topologie générale via les espaces métriques. Malgré que ces espaces sont un cas particulier des espaces topologiques, mais le fait que dans les cours d'analyses la majorités des espaces rencontrés sont Hausdorff, on a préféré introduire le sujet de cette manière.

Pré-requis
Tout étudiant voulant étudier la topologie générale doit, au préalable, connaître les notions de base d'une fonction d'une variable réelle (différentiation et intégration), les suites et les séries réelles. Nous conseillons les étudiants de revoir ces notions qui seront utiliser à travers tout le cours.

Préparation de l'ouvrage
On a utiliser les outils suivants pour la réalisation de cet ouvrage.

LaTeX : pour la production de cet ouvrage.
Geogebra : pour réaliser la majorité des graphes et figures.
Wikipedia : pour obtenir quelques graphes.

Dr. El-Bachir Yallaoui

1. Préliminaires

La topologie est une théorie mathématique relativement jeune : elle émerge (sous le nom d'analysis situs) au début du vingtième siècle dans les travaux de Hausdorff et de Tychonoff. Le besoin d'une telle théorie s'est déjà fait sentir à la fin du dix-neuvième siècle dans les travaux de Riemann et de Hilbert. Dans la recherche actuelle, la topologie joue un rôle fondamental aussi bien en Analyse Fonctionnelle qu'en Géométrie Différentielle ou encore en Topologie Algébrique. Ci-dessous, quelques grands noms de la Topologie :

– Henri Poincaré (1854-1912) ; (homotopie, cohomologie)
– David Hilbert (1862-1943) ; (bases de Hilbert, espaces de Hilbert)
– Maurice Fréchet (1878-1973) ; (convergence uniforme, convergence compacte)
– Stefan Banach (1892-1945) ; (fondateur de l'Analyse Fonctionnelle, espaces de Banach)

Ce cours n'est cependant qu'une introduction aux notions de base. Il contient le strict minimum pour celui qui souhaite poursuivre les études en mathématiques. Comme la topologie repose sur relativement peu de connaissances acquises, elle présente l'occasion idéale pour l'étudiant de combler d'éventuelles lacunes en logique ou en théorie des ensembles. C'est la raison pour laquelle la plupart des énoncés sont suivis d'une preuve complète.

1.1 Ensembles

Dans ce chapitre nous voulons donner une révision des concepts d'ensembles et des fonctions que vous avez vu dans les cours antécédents. Bien sûr, ce n'est pas un exposé complet de ce sujet, mais simplement une récollection des thèmes les plus importants. Nous allons supposer que le lecteur possède une familiarité avec l'idée d'un ensemble et ses sous-ensembles. En général, nous adoptons ce qui est souvent considéré comme l'approche naïve à ce sujet, en évitant la démarche logique rigoureuse.

Appartenance

Soit X (univers) un ensemble et $A, B, ...$ des sous ensembles de X. Pour tout sous-ensemble A de X et pour chaque point x dans X, on dénote par $x \in A$ pour indiquer que x est un élément de A (ou bien x appartient à A). De même, la notation $x \notin A$ signifie que x est un élément de X qui n'appartient pas à A.

Nous pouvons spécifier l'ensemble en énumérant ses éléments, comme dans l'ensemble

des chiffres décimaux :

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

ou bien en sélectionnant les éléments d'un ensemble préalablement donné qui satisfait certaines conditions bien définies :

$$P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ premier } \}$$

qu'on peut lire comme «l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tel que n est un nombre premier». Où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres naturels :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

On peut également indiquer la liste des éléments à l'aide d'une expression, comme dans l'ensemble

$$S = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$$

On dénote par $\varnothing$ l'ensemble vide qui est un ensemble ne contenant aucun élément. On dénote par $\{x\}$ le singleton, qui est un sous-ensemble ne contenant que x. Si un ensemble S a un ou plusieurs éléments, on dit que l'ensemble est S non vide, et on le dénote par $S \neq \varnothing$.

Inclusion et égalité

Si A et B sont des sous-ensembles de X alors on dénote par $A \subseteq B$ pour indiquer que touts les éléments de A sont aussi des éléments de B, c.a.d si $x \in A$, alors $x \in B$. En termes logiques, la condition est que $x \in A$ seulement si $x \in B$, de sorte que $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$. Noter que $\varnothing \subseteq A \subseteq X$, c.a.d que l'ensemble vide est un sous ensemble trivial de n'importe quel ensemble. De même on dénote par $B \supseteq A$ (B contient A), pour indiquer que $A \subseteq B$. Par exemple $\{1, 2\} \supset \{2\}$.

On dit que l'ensemble A est égale à l'ensemble B et le note $A = B$, si et seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. Par exemple $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$.

Si A n'est pas un sous-ensemble de B, on le note par $A \nsubseteq B$, et si A est différent de B on le note $A \neq B$. Si $A \subset B$ mais $A \neq B$ on le note par $A \subsetneqq B$.

Proposition 1.1. *Soit X un ensemble et A, B, C des sous-ensembles de X , alors on a :*

1. $A \subset A$.
2. *Si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.*
3. *$A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.*

Union et intersection

L'union des deux ensembles A et B, dénotée par $A \cup B$, est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A **ou** B,

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \ \textbf{ou} \ \ x \in B\}$$

Noter que le mot "ou" dans la définition est inclusif, c.a.d. que x peut être un élément de A **et** B en même temps.

Exemple 1.2. Considérons les cas suivants :
(a) Si X est un univers et $A \subset X$, alors $A \cup X = X$ et $A \cup \varnothing = A$.
(b) Si $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$ et $B = (\frac{1}{3}, 5]$, alors $A \cup B = (0, 5]$.
(c) Si $X = \mathbb{R}^2, A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}$, alors $A \cup B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = 0, 1\}$

L'intersection des deux ensembles A et B, dénotée par $A \cap B$, est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A et B en même temps,

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \ \ \textbf{et} \ \ x \in B\}$$

Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Exemple 1.3. Considérons les cas suivants :
(a) Si X est un univers et $A \subset X$, alors $A \cap X = A$ et $A \cap \varnothing = \varnothing$.
(b) Si $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$ et $B = (\frac{1}{3}, 5]$, alors $A \cap B = (\frac{1}{3}, 1)$.
(c) Si $X = \mathbb{R}^2, A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}$, alors $A \cap B = \varnothing$.

Proposition 1.4. *Soit X un univers, et $A, B, C \subseteq X$ alors on a :*

1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Proposition 1.5. *Soit X un univers, et $A, B \subset X$ alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $A \subset B$.
2. $A \cap B = A$.
3. $A \cup B = B$.

Différence et complément

La différence A moins B, dénotée $A \setminus B$, qui est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A mais pas à B

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \ \textbf{et} \ x \notin B\}$$

et la différence symétrique de A et B est

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup B \setminus A)$$

Exemple 1.6. Considérons les ensembles suivants :
(a) Si X est un univers et $A \subset X$, alors $A \setminus \varnothing = A$ et $A \setminus X = \varnothing$.
(b) Si $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$ et $B = (\frac{1}{3}, 5]$, alors $A \setminus B = (0, \frac{1}{3}]$.
(c) Si $X = \mathbb{R}^2, A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, 1) : x \in \mathbb{R}\}$, alors $A \setminus B = A$.

Le complément de A, dénoté par $X \setminus A$ ou bien A^c , est l'ensemble de tous les éléments n'appartenant pas à A.

$$X \setminus A = A^c = \{x \in X : x \notin A\}$$

Vous pouvez trouver le complément avec les notions suivantes : $A^c, \overline{A}, A'$, et $\tilde{A}$. Il est évident que le complément du complément est l'ensemble lui même c.a.d.

$$X \setminus (X \setminus A) = A.$$

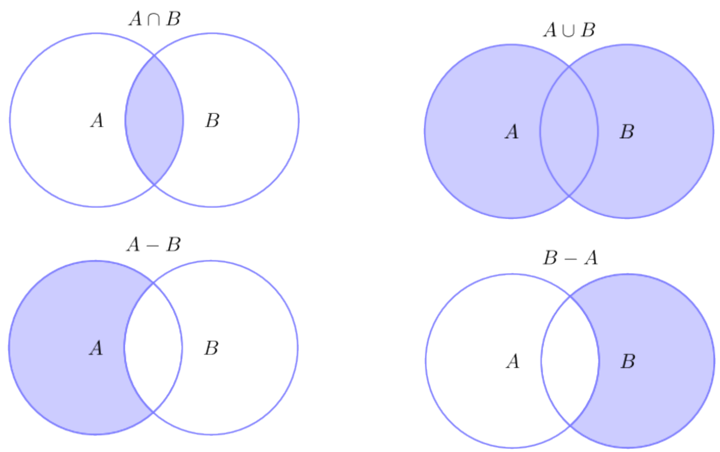


FIGURE 1.1: Opérations sur les ensembles

Proposition 1.7 (Lois de DeMorgan). *Soit X un ensemble quelconque et $A, B \subseteq X$, alors on a :*

(a) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

(b) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

Démonstration. On montrera la partie (a). Soit $x \in X \setminus (A \cup B)$ alors $x \notin (A \cup B)$, donc $x \notin A$ et $x \notin B$, c.a.d. que $x \in X \setminus A$ et $x \in X \setminus B$, alors $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.
Maintenant si $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, alors $x \in (X \setminus A)$ et $x \in (X \setminus B)$, c.a.d. que $x \notin A$ et $x \notin B$, donc $x \notin (A \cup B)$ qui est équivalent à $x \in X \setminus (A \cup B)$. ■

Collections d'ensemble

Un ensemble est un objet mathématique, et peut donc être considéré comme un élément d'un autre ensemble. Lorsque l'on considère un ensemble dont les éléments sont des ensembles, nous allons souvent le référer comme une collection d'ensembles, et désigner avec une lettre de script comme $\mathscr{A}$ ou $\mathscr{B}$. (Parfois les ensembles d'ensembles sont appelés familles d'ensembles.)
Par exemple, chaque étudiant à l'université peut être considérée comme un objet mathématique. Nous pouvons considérer l'ensemble de tous les élèves :

$$S = \{s : s \text{ est un étudiant à UFAS }\}.$$

De même, chacun des cours offerts à l'université peut être considéré comme un autre objet mathématique. Il s'agit d'un ensemble de cours

$$C = \{c : c \text{ est un cours à UFAS }\}.$$

Pour chaque cours $c \in C$, on peut considérer l'ensemble E_c des étudiants inscrits à ce cours :

$$E_c = \{s \in S : s \text{ est inscrit dans le cours } c\}.$$

Maintenant, nous pouvons considérer la collection $\mathscr{E}$ de ces ensembles d'élèves inscrits :

$$\mathscr{E} = \{E_c : c \in C\}.$$

$\mathscr{E}$ est un ensemble d'ensembles. Ses éléments sont les ensembles de la forme E_c, pour un certain cours $c \in C$. Ces ensembles ont à leur tour des éléments, qui sont des étudiants à l'université.
Il ce peut qu'aucun étudiant est inscrit dans un cours spécifique c. Dans ce cas, $E_c = \varnothing$. Si cela est le cas pour les deux cours différents, c et d, alors les deux $E_c = \varnothing$ et $E_d = \varnothing$. Par conséquent, il peut arriver que $E_c = E_d$ dans $\mathscr{E}$, même si $c \neq d$ dans C.
Pour un ensemble donné A, la collection de tous les sous-ensembles $B \subset A$ est appelé l'ensemble des parties de A, et est noté $\mathscr{P}(A)$:

$$\mathscr{P}(A) = \{B : B \subset A\}.$$

Par exemple, l'ensemble des parties $\mathscr{P}(\{a,b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. En générale, si A contient n éléments $\mathscr{P}(A)$ contient 2^n éléments, pour cela $\mathscr{P}(A)$ est quelquefois appelé ensemble puissance de A.

Unions et intersections arbitraires

Maintenant on définie l'union et l'intersection d'une collection arbitraire d'ensembles. Soit X un ensemble quelconque, et supposons que I est un autre ensemble tel que pour chaque $i \in I$ on a $A_i \subset X$; l'ensemble I est souvent appelé ensemble index, et nous référons à la collection des sous-ensembles comme $\{A_i : i \in I\}$. On définie

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i \text{ pour au moins une valeur } i \in I\}$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X : x \in A_i \text{ pour toute valeur de } i \in I\}$$

Bien sure si $I = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ alors on utilisera la notation

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

Exemple 1.8. Considérons les familles d'ensembles suivantes :
(a) Soient $A_i = [0, \frac{1}{i})$ alors $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$
(b) Soient $A_i = (0, i)$ alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0, \infty)$

Théorème 1.9 (Lois de DeMorgan)**.** *Si X est un ensemble et $\{A_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de X, alors :*
(a) $X \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$
(b) $X \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$

Produit cartésien

Si X et Y sont deux ensembles quelconques, on définie produit cartésien de ces deux ensembles comme

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

C'est donc, l'ensemble des paires ordonnées (x, y), ou $x \in X$ et $y \in Y$. L'utilisation du terme ordonnées est pour différentier entre $X \times Y$ et $Y \times X$.
De la même manière, si $X_1, \ldots, X_n$ sont des ensembles, alors on définie leurs produit

cartésien comme,

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in X_i, i = 1, \ldots, n\}$$

1.2 Fonctions

Domaine, codomaine et graphe

Définition 1.10. Soient A et B deux ensembles non vides. Formellement, une **fonction** ou **application** $f : A \to B$ est un sous-ensemble f de $A \times B$ avec la propriété que pour tout $a \in A$, il existe un unique élément $b \in B$ tel que $(a, b) \in f$. L'ensemble A est appelé le domaine de f et de l'ensemble B est le codomaine de f.

Bien que la définition ci-dessus donne une définition d'une fonction purement en termes de la théorie des ensembles, elle n'est pas généralement utile pour travailler avec. Toutefois elle met en évidence l'importance du domaine et du codomaine comme des parties intrinsèques de la définition de f.
Moins formellement, nous pensons généralement d'une fonction $f : A \to B$ comme une correspondance qui associe a tout élément $x \in A$, un élément unique $y = f(x) \in Y$.
Le **graphe** de f est le sous-ensemble de $A \times B$ définie par :

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in A \times B | x \in A\}.$$

On note la fonction par :

$$\begin{array}{rcl} f : A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

– On appelle A le domaine de définition de f.
– On appelle B le codomaine (ensemble d'arrivée) de f.
– L'élément $y = f(x) \in B$ est l'image de x par f.
– L'élément x est l'antécédent (l'image réciproque, pré-image) de y par f.

Exemple 1.11. Considérons les relations suivantes :
(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$ est une fonction dont le domaine est $\mathbb{R}$ et dont $\text{Im}(f) = [1, \infty)$.
(b) Considérons la relation définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ +1 & x \geq 0 \end{cases}.$$

Cette relation n 'est une fonction car $f(0) = \pm 1$. Si on change la définition de telle sorte que $f(x) = -1$ pour $x < 0$ et $f(x) = 1$ pour $x \geq 0$, alors cette relation devient une

fonction.
(c) Si X et Y sont des ensembles non vides, $y_0 \in Y$ et $f(x) = y_0$ pour tout x dans X, alors $f : X \longrightarrow Y$ est une fonction, appelée fonction constante.
(d) Soit X un ensemble non vide et $A \subset X$, on définie la fonction **caractéristique** de A ou bien la fonction **indicatrice** de A par $1_A : A \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Propriétés

1. $1_{\varnothing}(x) = 0.$
2. $1_X(x) = 1.$
3. $1_{X \setminus A}(x) = 1 - 1_A(x).$
4. $1_{A \cap B}(x) = \min\{1_A, 1_B\} = 1_A(x) 1_B(x).$
5. $1_{A \cup B}(x) = \max\{1_A, 1_B\} = 1_A + 1_B - 1_A(x) 1_B(x).$
6. $1_{A \triangle B}(x) \ = 1_A(x) + 1_B(x) - 2 \times 1_A(x) 1_B(x).$

Image directe et image réciproque

Définition 1.12. Soient $f : A \to B$ un fonction, $S \subset A$ et $T \subset B$, alors on a :

(a) $f(S) = \{f(s) : s \in S\} \subset B$ et on l'appelle l'image directe de S par f.

(b) $f^{-1}(T) = \{a \in A : f(a) \in T\} \subset A$ et on l'appelle l'image réciproque de T par f.

(c) $f(A)$ est appelée l'image de f et notée par $\text{Im } f$.

Si f est définie comme dans la définition précédente alors on a :
– $S \subset f^{-1}(f(S))$ pour tout $S \subset A$.
– $f(f^{-1}(T)) \subset T$ pour tout $T \subset B$.

Exemple 1.13. Si $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est définie par $f(x) = x^2$, alors on a

$$\begin{aligned} f(\{2\}) &= \{4\} \\ f^{-1}[f(\{2\})] &= \{-2, 2\} \text{ on voit donc que } S = \{2\} \subset f^{-1}(f(S)) \\ f^{-1}(\{0, 1, 2\}) &= \{0, \pm 1\} \\ f[f^{-1}(\{0, 1, 2\})] &= \{0, 1\} \text{ on voit donc que } f(f^{-1}(T)) \subset T = \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

Remarque. Dans l'exemple précédent on a $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Souvent en écrira pas abus de notation $f^{-1}(0) = 0$.

Exemple 1.14. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = 2x + 1$, alors on a

$$f([0,2]) = [1,5]$$
$$f((1,\infty)) = (3,\infty)$$
$$f^{-1}([-1,7)) = [-1,3)$$

Fonctions injectives, surjectives et bijectives

Définition 1.15. Considérons la fonction $f : X \longrightarrow Y$.

(a) f est dite **injective** si tout élément de Y a au plus une pré-image.
Autrement dit, si $x_1 \neq x_2$ implique $f(x_1) \neq f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in X$.
Autrement dit, si $f(x_1) = f(x_2)$ implique $x_1 \neq x_2$ pour tout $x_1, x_2 \in X$.

(b) f est dite **surjective** si tout élément de Y a au moins une pré-image.
Autrement dit, pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$.
Autrement dit, si $\text{Im}(f) = f(X) = Y$.

(c) f est dite **bijective**, tout élément de Y possède une et une seule pré-image.
Autrement dit, pour tout $y \in Y$ il existe un unique $x \in X$ tel que $y = f(x)$.
Autrement dit, f est à la fois injective et surjective.

Exemple 1.16. Quelques exemples :

(1) La fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$ est injective mais pas surjective car il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 5$.
On a alors $\text{Im}(f) =$ l'ensemble des carrés dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$.

(2) La fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$ n'est ni injective ni surjective car $f(-5) = f(5) = 25$ et il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 5$.

(3) La fonction $f : \mathbb{R}+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est injective mais pas surjective car $\text{Im}(f) = \mathbb{R}+ \neq \mathbb{R}$.

(4) La fonction $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $i(x) = x$ est la fonction identité. Elle est bijective.

(5) Si X est un ensemble et $A \subset X$. La fonction injection canonique $i : A \hookrightarrow X$ définie par $i(a) = a$ pour tout $a \in A$ est toujours injective mais pas surjective, sauf si $A = X$. Quand $A = X$ cette fonction deviens l'identité qui est bijective.

(6) La fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\pi_1(x, y) = x$ est la fonction projection. Elle est surjective mais pas injective. Par exemple $\pi_1(x, y_1) = x = \pi_1(x, y_2)$ donc elle n'est pas injective.

(7) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ définie par $f(x) = \arctan x$ est bijective.

(8) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$ n'est ni injective ni surjective. Si on considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, f devient surjective mais pas injective.
Si on considère $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$, f devient injective mais pas surjective.
Si on considère $f : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, +1]$, alors f devient bijective.

Fonction composée

Si $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$, alors la composée de $g \circ f : A \longrightarrow C$ est définie par

$$(g \circ f)(a) = g[f(a)]$$

pour tout a de A. Par exemple, si $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sin x$, alors $(g \circ f)(x) = \sin\left(x^2\right)$ et $(f \circ g)(x) = (\sin x)^2$.
La composition de fonctions est une opération associative.

Proposition 1.17. *Si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ et $h : C \longrightarrow D$, sont des fonction alors,*

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

Le prochain théorème nous donnes quelques propriétés d'une fonction f avec les opérateurs $\cup, \cap$ et $\setminus$.

Théorème 1.18. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A, B \subset X$ et $\{A_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de X alors :*

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

(c) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$

(d) *Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$*

(e) $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

(f) $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

Démonstration. La démonstration est laissée au lecteur comme un exercice. ■

Soit $f : A \longrightarrow B$ et $S \subset A$ est un sous-ensemble du domaine, on peut définir la **restriction** de f sur S comme la fonction $f|_S : S \longrightarrow B$ avec $(f|_S)(x) = f(x)$ pour tout $x \in S$. Le graphe de la restriction est donné par

$$\Gamma_f \cap (S \times B)$$

qui est un sous-ensemble de $S \times B$, où $\Gamma_f \subset A \times B$.

Les relations réciproques

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un fonction. En général, la **relation réciproque** (ou relation inverse) $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ de la fonction f n'est pas une fonction. Mais si f est une fonction bijective, alors la relation réciproque f^{-1} est une fonction bijective appelée **bijection réciproque** (ou bijection inverse). Soit $y \in Y$, alors par surjectivité il existe x dans X avec $f(x) = y$;

par injectivité, cet x est unique. Donc, on peut définir $f^{-1}(y) = x$ pour l'unique x avec $f(x) = y$.

Attention. $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$.

Le prochain théorème nous donnes quelques propriétés d'une relation réciproque f^{-1} avec les opérateurs $\cup, \cap$ et $\setminus$.

Théorème 1.19. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A, B \subset Y$ et $\{B_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de Y alors :*

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}A) \cup f^{-1}B)$

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}A) \cap f^{-1}B)$

(c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}A) \setminus f^{-1}B)$

(d) *Si $A \subset B$ alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$*

(e) $f^{-1}(\bigcup\limits_{i\in I} B_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

(f) $f^{-1}(\bigcap\limits_{i\in I} B_i) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

Définition 1.20. Pour tout ensemble S, la fonction d'identité sur S, notée par $\mathrm{Id}_S : S \to S$ est la fonction définie par $\mathrm{Id}_S(s) = s$ pour tout $s \in S$.

Il est facile de vérifier que si nous avons une fonction $f : A \to B$ alors

$$f \circ \mathrm{Id}_A = f = \mathrm{Id}_B \circ f.$$

Définition 1.21. Supposons $f : A \to B$ et $g : B \to A$ sont deux fonctions telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Alors on dit que f est une fonction réciproque droite de g et que g est une fonction réciproque gauche de f.

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 1.22. *Si $f : A \to B$ et $g : B \to A$ sont deux fonctions telles que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ alors f est injective et g est surjective. Donc toute fonction qui admet une réciproque à gauche est injective et toute fonction qui admet une réciproque à droite doit être surjective.*

Démonstration. $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ est équivalent à $g(f(a)) = a$ pour tout $a \in A$.

f **is injective :** Supposons que $a, a' \in A$ et $f(a) = f(a') \in B$. Alors on

$$g(f(a)) = g(f(a')) \Leftrightarrow (g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') \Leftrightarrow \mathrm{Id}_A(a) = \mathrm{Id}_A(a') \Leftrightarrow a = a'$$

d'où f est injective.

g **is surjective :** Soit $a \in A$, alors $f(a) \in B$ et $g(f(a)) = a$. Donc $a \in g(B) =$ Im (g) pour tout $a \in A$, qui montre que $A =$ Im (g) donc g est surjective. ■

L'exemple suivant montre que les réciproques gauches (droites) ne sont pas nécessairement uniques.

Exemple 1.23. Soit $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b, c\}$. On défini $f_1, f_2 : A \to B$ par $f_1(1) = a, f_1(2) = c, f_2(1) = b, f_2(2) = c$. On défini $g_1, g_2 : B \to A$ par $g_1(a) = g_1(b) = 1, g_1(c) = 2$ et $g_2(a) = 1, g_2(b) = g_2(c) = 2$. Alors il est facile de montrer que $g_1 \circ f_1 = \mathrm{Id}_A = g_1 \circ f_2$ donc g_1 possède deux réciproques droites distinctes f_1 et f_2. De plus puisque g_1 n'est pas injective, elle n'a pas de réciproque gauche.

De même on peut vérifier que, $g_2 \circ f_1 = \mathrm{Id}_A = g_1 \circ f_1$ donc f_1 possède deux réciproques gauches distinctes g_1 et g_2. De plus puisque f_1 n'est pas surjective, elle ne possède pas de réciproque droite.

De cet exemple, on peut conclure que même si elles existent, les réciproques ne sont pas nécessairement uniques. Cependant, nous allons maintenant voir que quand une fonction a la fois une réciproque gauche et une réciproque droite, alors ces réciproques doivent être les mêmes.

Proposition 1.24. *Si $f : A \to B$ est une fonction possédant une fonction réciproque à gauche $h : B \to A$ et une fonction réciproque à droite $g : B \to A$, alors $h = g$.*

Démonstration. Par hypothèse on a $h \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. En utilisant la propriété d'associativité des composées on :

$$h = h \circ \mathrm{Id}_B = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = \mathrm{Id}_A \circ g = g.$$

Donc h et g sont les mêmes. Puisque cet argument est vrai pour n'importe quelle réciproque droite g de f, tout réciproque à droite de f doit être égale à g. Puisque cet argument est vrai pour n'importe quelle réciproque gauche h de f, tout réciproque gauche de f doit être égale à h. Donc tous les réciproques de f sont égaux. ■

On fini par donner une caractérisation complète de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité en fonction des réciproques.

Théorème 1.25. *Soit $f : A \to B$ une fonction, alors on a :*

(a) *f est injective si et seulement s'il existe $g : B \to A$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.*

(b) *f est surjective si et seulement s'il existe $h : A \to B$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_B$.*

(c) *f est bijective si et seulement s'il existe $g : B \to A$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. Dans ce cas la fonction réciproque est unique et on la note par $g = f^{-1}$.*

Démonstration.

(a) $(\Leftarrow)$ découle du théorème (1.22).

$(\Rightarrow)$ Supposons que $f : A \to B$ est injective. Soit $a_0 \in A$ un point fixe et on défini la fonction $g : B \to A$ telle que

$$g(b) = \begin{cases} a \text{ si } b \in \text{ Im } (f) \text{ et } f(a) = b \\ a_0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Si $b \in \text{Im}(f)$ et $f(a) = b$, on a $(g \circ f)(a) = g[f(a)] = g(b) = a$. Sinon on a $(g \circ f)(a_0) = g[f(a_0)] = a_0$. Cela montre que $g \circ f = \text{Id}_A$. Donc g est une réciproque gauche de f.

(b) $(\Leftarrow)$ découle du théorème (1.22).
$(\Rightarrow)$ Supposons que $f : A \to B$ est surjective. Alors pour tout $b \in B$, $f^{-1}(\{b\}) \neq \varnothing$ dans A. On choisi $h : B \to A$ de telle sort que $h(b)$ est une des valeur de $f^{-1}(\{b\})$. Don on aura $(f \circ h)(b) = f[f^{-1}(b)] = b$ pour tout $b \in B$. Cela montre que h est une réciproque droite de f.

(c) $(\Rightarrow)$ Supposons que f est bijective. D'après (a) et (b) ci-dessus on peut conclure que f admet une réciproque gauche h et une réciproque droite g. Par proposition (1.24) on a $h = g$. Il existe donc une fonction $g : B \to A$ telle que $g \circ f = \text{Id}_A$ et $f \circ g = \text{Id}_B$.
$(\Leftarrow)$ Notons qu'une fonction réciproque de f à gauche et à droite simultanément est une fonction $g : B \to A$ telle que $f \circ g = \text{Id}_A$ et $g \circ f = \text{Id}_B$. Par théorème (1.22) si f admet une fonction g qui est à la fois une réciproque gauche et droite alors g doit être injective et surjective et donc bijective.

■

Proposition 1.26. *Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$.*

(1) *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*

(2) *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*

(3) *Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

(4) *Si f est bijective, alors $f^{-1} : B \to A$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

(5) *$A \subseteq (f^{-1} \circ f)(A)$ et $(f \circ f^{-1})(B) \subseteq B$.*

(6) *$(f^{-1} \circ f)(A) = A$ si et seulement si f est injective.*

(7) *$(f \circ f^{-1})(B) = B$ si et seulement si f est surjective.*

Démonstration. La démonstration est laissée au lecteur comme un exercice. ■

1.3 Le corps des nombres réels

On note par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. On peut voir les nombres réels comme toutes les longueurs géométriques obtenues le long d'une droite.

Exemple 1.27. Les nombres $\sqrt{2}, \pi, e, \ln(5)$ sont tous des nombres réels non rationnels.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps, totalement ordonné, archimédien, et complet :
– totalement ordonné : on peut toujours comparer 2 réels r et u ; soit $u > r$, soit $u < r$, soit $u = r$.
– archimédien : pour tout couple (x, y) de nombres réels, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

– complet : toute suite de Cauchy est convergente.

Définition 1.28. Soit $A \subset \mathbb{R}$. A est dit majoré (resp. minoré) dans $\mathbb{R}$ s'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $a < s$ (resp. $a > s$) pour tout $a \in A$. L'élément $s \in \mathbb{R}$ est appelé un majorant (resp. un minorant) de A. Le sous-ensemble A est dit borné s'il est à la fois majoré et minoré.

1) L'élément s n'appartient pas nécessairement à A.
2) Si A possède un majorant, alors il en possède une infinité. En effet, si s est un majorant de A, alors tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $t > s$ est aussi un majorant.

Définition 1.29. (Borne supérieure ou supremum). Un majorant s de A est appelé la borne supérieure ou supremum de A s'il est le plus petit des majorants, c'est-à-dire si, pour tout autre majorant s' de A, on a $s \leq s'$.
On note alors $s = \sup A$.
Si A n'est pas majoré, on pose $\sup A = \infty$.

Définition 1.30. (Borne inférieure ou infimum). Un minorant s de A est appelé la borne inférieure ou infimum de A s'il est le plus grand des minorants, c'est-à-dire si, pour tout autre minorant s' de A, on a $s \geq s'$.
On note alors $s = \inf A$.
Si A n'est pas minoré, on pose $\inf A = -\infty$.

Remarque :
– Si le supremum (resp. l'infimum) existe, il est unique.
– Si le supremum de A appartient à A, on dit que c'est le maximum de A et on le note $\max A$.
– Si l'infimum de A appartient à A, on dit que c'est le minimum de A et on le note $\min A$.
– Il est évident que si A est majoré par une bore supérieure s si et seulement si $-A = \{-x : x \in A\}$ est minoré par une borne inférieure $-s$. Pour cette raison, chaque déclaration sur la borne supérieure d'un ensemble a son analogue pour la borne inférieure.

Exemple 1.31. Soit $A = (0, 2]$, alors $\inf A = 0 \notin A$ et $\sup A = 2 = \max A$.

Axiome 1.32. *(Propriété de Densité).*
Si a et b sont des nombres rationnels avec $a < b$, alors il existe un nombre irrationnel x avec $a < x < b$.
Si a et b sont des nombres irrationnels avec $a < b$, alors il existe un nombre rationnel x tel que $a < x < b$.

Axiome 1.33. *(Propriété de complétude).*
Si A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure alors A un possède un supremum.

Remarque : Cette propriété n'est pas vraie dans $\mathbb{Q}$

Exemple 1.34. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$$

C'est un sous-ensemble borné de $\mathbb{Q}$ car, par exemple, $\frac{3}{2}$ est un majorant de A et $-\frac{3}{2}$ est un minorant de A. Mais il ne possède ni de borne supérieure ni de borne inférieure dans $\mathbb{Q}$. En revanche, si on considère A comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors la propriété de complétude assure l'existence d'une borne supérieure $r = \sup A$ et d'une borne inférieure $s = \inf A$. On montre alors facilement que $r^2 = s^2 = 2$ et donc que

$$s = -\sqrt{2} \text{ et } r = \sqrt{2}$$

Proposition 1.35. *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$.*
Si $\alpha = \sup A$ et $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $\alpha - \epsilon < x \leq \alpha$.
Si $\beta = \inf A$ et $\epsilon > 0$, il existe $y \in A$ tel que $\beta \leq x < \beta + \epsilon$.

Démonstration. En effet, par définition du supremum, $\alpha - \epsilon$ ne peut pas être une borne supérieure de A, donc il existe un tel x. Si applique cela pour $-A$ on peut monter la proposition pour l'infimum. ∎

On dit qu'une suite $\{x_n\}$ est croissante si $x_n \leq x_{n+1}$, et on dit que la suite est strictement croissante si $x_n < x_{n+1}$. Une suite $\{x_n\}$ est décroissante ou strictement décroissante si la suite $\{-x_n\}$ est croissante ou strictement croissante.

Corollaire 1.36. *Si A est majoré et $\alpha = \sup A$, alors il existe un suite croissante $\{x_n\}$ dans A tel que $x_n \longrightarrow \alpha$. De même si A est minoré et $\beta = \inf A$, alors il existe un suite décroissante $\{y_n\}$ dans A tel que $y_n \longrightarrow \beta$.*

Proposition 1.37. *Toute suite bornée et monotone est convergente.*

Démonstration. Supposons que $\{x_n\}$ est une suite bornée et croissante. Alors, x_1 est une borne inférieure de $\{x_n\}$. Par la propriété de complétude, $\alpha = \sup\{x_1, x_2, \ldots\}$ existe. Si $\epsilon > 0$ alors la proposition précédente stipule qu'il existe un entier N avec $\alpha - \epsilon < x_N \leq \alpha$. Puisque la suite est croissante, on a $\alpha - \epsilon < x_n \leq \alpha$ quand $n \geq N$. Donc, $|x_n - \alpha| < \epsilon$, c.a.d. $x_n \longrightarrow \alpha$. La preuve quand la suite est décroissante est similaire. ∎

1.4 Exercices

1. Montrer que $X \setminus (X \setminus A) = A$.

2. Montrer la proposition 1.4.
Soit X un univers, et $A, B, C \subseteq X$ alors on a :
(a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
(b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. Montrer la proposition 1.7.
Soit X un ensemble quelconque et $A, B \subseteq X$, alors on a :
(a) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
(b) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

4. Monter le théorème 1.9.
Si X est un ensemble et $\{A_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de X, alors :
(a) $X \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I}(X \setminus A_i)$ (b) $X \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I}(X \setminus A_i)$

5. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
(a) $A \subset B$.
(b) $A \cap B = A$.
(c) $A \cup B = B$.
(d) $(X \setminus B) \subset (X \setminus A)$.
(e) $B \cup (X \setminus A) = X$.
(f) $A \cup (X \setminus B) = \varnothing$.

6. Déterminer si chacun des ensembles suivants est l'ensemble vide :
(a) $X = \{x : x^2 - 1 = 0, 2x = 4\}$.
(b) $Y = \{x : x \neq x\}$.
(c) $Z = \{x : 2x + 1 = 1\}$.

7. Montrer que si $A \subset \varnothing$ alors $A = \varnothing$

8. Soient $X = \{1, 2, \ldots, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ et $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Trouver les ensembles suivants :
(a) $X \setminus A$ (b) $X \setminus (A \cap C)$ (c) $B \setminus C$ (d) $X \setminus (A \cup B)$

9. Montrer que : (a) $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$ (b) $A \setminus B = A \cap B^c$

10. Soient $A = \{a, b\}, B = \{2, 3\}$ et $C = \{3, 4\}$.
Trouver : (a) $A \times (B \cup C)$ (b) $(A \times B) \cup (A \times C)$

11. Montrer que $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

12. Trouver l'ensemble des parties de X, $\mathscr{P}(X)$ si :
(a) $X = \{1, 2, 3\}$ (b) $X = \{1, \{2, 3\}\}$

13. Montrer que si A contient 2 éléments alors $\mathscr{P}(A)$ contient 4 éléments. Combien d'éléments $\mathscr{P}(A)$ aura t-il si A contient 3,1,0 éléments ? Quel est le cardinal de $\mathscr{P}(A)$ en fonction du cardinal de A ?

14. Considérer la composition des fonctions $g \circ f$, et les 9 cas possibles ou f et g sont soient injective, surjective ou bijective puis déterminer quel propriété est acquise par $g \circ f$.

15. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Trouver :

(a) $f[\{1, 3, 4, 7\}]$

(b) $f[1, 4]$

(c) $f^{-1}[\{4, 9\}]$

(d) $f^{-1}[1, 4]$

16. Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer lesquelles des relations sur X dont les graphes est donné sont des fonctions.
(i) $\Gamma_f = \{(2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$
(ii) $\Gamma_g = \{(3, 1), (4, 2), (1, 1)\}$
(iii) $\Gamma_f = \{(2, 1), (3, 4), (1, 4), (2, 1), (4, 4)\}$

17. Soient f et g des fonction sur $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ donts les graphes sont :
$\Gamma_f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 3), (4, 1), (5, 2)\}$ et
$\Gamma_g = \{(1, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 2), (5, 3)\}$

(a) Déterminer si les fonctions sont injectives ou surjectives.

(b) Calculer $f(X)$ et $g(X)$.

(c) Trouver $f \circ g$ et $g \circ f$.

18. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 1$. Trouver :
(a) $f^{-1}[\{15\}]$
(b) $f^{-1}[\{-16\}]$
(c) $f^{-1}[\{x : x \leq 0\}]$
(d) $f^{-1}[\{x : 3 \leq x \leq 24\}]$

19. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A, B \subset X$ et $\{A_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de X alors :

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

(c) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$

(d) Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$

(e) $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

(f) $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

20. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A \subset X$ et $B \subset Y$.

(a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et on obtient égalité quand f est injective.

(b) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et on obtient égalité quand f est surjective.

21. Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux fonctions bijectives, alors :

(a) $(f \circ f^{-1})(y) = \mathrm{Id}_Y(y) = y$ pour tout $y \in Y$.

(b) $(f^{-1} \circ f)(x) = \mathrm{Id}_X(x) = x$ pour tout $x \in X$.

(c) $(g \circ f)$ est bijective en plus on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

22. Soient $f : X \longrightarrow Y$, $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$, alors :

(a) $(f^{-1} \circ f)(A) \supseteq A$.

(b) $(f \circ f^{-1})(B) \subseteq B$.

(c) $(f^{-1} \circ f)(A) = A$ si et seulement si f est injective.

(d) $(f \circ f^{-1})(B) = B$ si et seulement si f est surjective.

23. Soit $f : X \longrightarrow Y$ et $A, B \subset Y$ et $\{B_i : i \in I\}$ est une collection de sous-ensembles de Y alors :

(a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}A) \cup f^{-1}B)$

(b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}A) \cap f^{-1}B)$

(c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}A) \setminus f^{-1}B)$

(d) Si $A \subset B$ alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

(e) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

(f) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$

24. Soient $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ et $g \circ f : A \longrightarrow C$:

(a) Si $C_0 \subset C$, montrer que $(g \circ f)^{-1}(C_0) = f^{-1}(g^{-1}(C_0))$

(b) Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

(c) Si $g \circ f$ est surjective, que pouvez vous dire sur f et g ?

(d) Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

(e) Si $g \circ f$ est injective, que pouvez vous dire sur f et g ?

25. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = x^3 - 4x$. Montrer que f est surjective mais pas injective. Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit bijective.

26. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \sin(\pi x)$.

(a) Montrer que f est ni injective ni surjective.

(b) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit surjective mais pas injective.

(c) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit injective mais pas surjective.

(d) Choisissez des restrictions sur le domaine et codomaine de f de telle sort que la nouvelle fonction soit bijective.

2. Espaces métriques

Les espaces métriques sont un cas particulier très important d'espaces topologiques. Nous étudierons leurs propriétés spécifiques comme exemples pour illustrer les définitions abstraites. Ce sont des espaces topologiques avec des propriétés assez intuitives, ou tout du moins qu'on a l'habitude de manipuler car le modèle le plus simple est $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle.

2.1 Définition d'un espace métrique

Définition 2.1. Un **espace métrique** est une paire (X, d) ou X est un ensemble et d est une fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$, appelée **distance** (ou métrique), qui satisfait les propriétés suivantes pour tout $x, y, z \in X$:

(M1) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$; (propriété de séparation)

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$; (propriété de symétrie)

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$; (l'inégalité triangulaire)

Pour montrer qu'un espace est métrique on doit vérifier les 3 conditions ci-dessus. Les deux premières sont faciles, c'est l'inégalité triangulaire qui demande généralement du travail. On donne maintenant une conséquence directe de l'inégalité triangulaire que l'on appelle deuxième inégalité triangulaire.

Proposition 2.2. *Pour tout $x, y, z \in X$ on a :*

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

Démonstration. On a $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d(x, z) + d(y, z)$, d'où $d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$. De même, on a $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) = d(x, y) + d(x, z)$, d'où $d(y, z) - d(x, y) \leq d(x, z)$. On en déduit

$$-d(x, y) \leq d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, y),$$

il en résulte

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

∎

Nous donnons quelques exemples standard d'espaces métriques.

Exemple 2.3. Soit $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $d(x, y) = |x - y|$ appelée distance euclidienne sur $\mathbb{R}$. L'inégalité triangulaire dans ce cas est une conséquence directe des propriétés de la valeur absolue.

Exemple 2.4. Soient $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ appelée la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ ou bien la métrique ℓ^2.

Exemple 2.5. Soit $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ on définie :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$
$$d_2(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$
$$d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i - y_i|$$

Remarque :

- d_1 s'appelle la métrique ℓ^1.
- d_2 s'appelle la métrique euclidienne (usuelle) ou bien la métrique ℓ^2.
- d_∞ s'appelle la métrique de ℓ^∞.
- Si $n = 1$, alors les distance dans l'exemple précèdent sont toutes équivalentes a la distance $d(x, y) = |x - y|$ de l'exemple 2.3.
- $\ell^p, 0 < p < \infty$ est l'espace métrique dont les points sont les suites infinies de nombres réels $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ telles que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$.
- Sauf mention du contraire, on supposera que $\mathbb{R}^n$ est toujours muni de la distance Euclidienne usuelle d_2.

Exemple 2.6. Soit ℓ^2 l'espace métrique dont les points sont les suites infinies de nombres réels

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$$

telles que

$$\sum_{k=1}^{\infty} {x_k}^2 < \infty$$

et dont la distance est définie par la formule

$$d(x, y) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2\right]^{1/2}.$$

Exemple 2.7. Soit X un ensemble quelconque, on définie

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Cette distance est appelée la **métrique ou distance discrète**. L'espace métrique muni de cette distance est appelé **espace métrique discret**.

Soit (X, d_X) un espace métrique et A une partie non-vide de X. Considérons la restriction $d_A : A \times A \to \mathbb{R}$ de d_X sur $A \times A$ cela veut dire que $d_A(x, y) = d_X(x, y)$ pour tout couple $(x, y) \in A \times A$. Les axiomes de la distance sont valides pour d_A car elles le sont pour d_X. L'espace métrique (A, d_A) est appelé **sous-espace métrique** de (X, d_X) et d_A est appelée la **distance induite** (métrique induite) par d_X. Si A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ alors en se référant à A comme un espace métrique nous supposons que la métrique d_A est induite par la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ à moins qu'une autre métrique est spécifiée. En particulier, cela s'applique aux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Exemple 2.8. Soit $X = \mathbb{R}$ avec la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$ et $A = [a, b]$, avec $a \neq b$, alors (A, d_A) où $d_A(x, y) = |x - y|$ pour tout $x, y \in A$ est un espace métrique. On peut générer ainsi une infinité de sous-espace métriques de $\mathbb{R}$.

Attention. Noter que A n'est pas ouvert dans $(\mathbb{R}, d)$ mais il est ouvert et fermé dans (A, d_A).

Exemple 2.9. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Comme dans le cas de $\mathbb{R}^n$ on peut définir des distances sur le produit $X \times Y$. Pour les points $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ on défini les distances :

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$
$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = [d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2]^{1/2}$$
$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}.$$

Chacune de ces distances peut être appelée **distance produit** sur $X \times Y$.

Exemple 2.10. Soit $C[a, b]$ l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$, et on définie sur X

$$d(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)|$$

alors $(C[a, b], d)$ est aussi un espace métrique. Les axiomes (M1)–(M3) sont vérifiés immédiatement. Cet espace joue un rôle très important en analyse. Nous allons le désigner par le même symbole $C[a, b]$ que l'ensemble des points de cet espace.

Exemple 2.11. L'espace $(C[a, b], d)$ où d est définie par :

$$d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt$$

est aussi un espace métrique.

Remarque. Si (X, d) est un espace métrique et $a > 0$ alors $(X, a \cdot d)$ est aussi un espace métrique. Donc la distance entre les points de X est relative à la distance qu'on utilise. Par exemple si $d'(x, y) = 2d(x, y) = 2|x - y|$ sur $\mathbb{R}$ on a $d(0, 1) = 1$ mais $d'(0, 1) = 2$.

2.2 Distance entre deux parties et diamètre

Définition 2.12. Soit A et B deux parties quelconques d'un espace métrique (X, d). On appelle distance de A et B, et l'on note $d(A, B)$ la quantité positive définie par

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x, y)$$

On a évidement

$$\operatorname{dist}(A, B) = \operatorname{dist}(B, A).$$

Si $A = \{a\}$, cette distance se nomme distance du point a à l'ensemble B et se note :

$$\operatorname{dist}(a, B) = \inf_{x\in B} d(a, x)$$

Pour toutes parties A et B de (X, d) on a :

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf_{x\in A} \operatorname{dist}(x, B) = \inf_{y\in B} \operatorname{dist}(y, A).$$

De plus,

$$A \cap B \neq \varnothing \Longrightarrow \operatorname{dist}(A, B) = 0$$

Si $a \in B$ on a évidement $d(a, B) = 0$.

Attention : $\operatorname{dist}(A, B)$ n'est pas une distance sur l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des partie de X. Par exemple $\operatorname{dist}(A, B) = 0$ n'entraine pas $A = B$. Si $X = \mathbb{R}, A = [0, 2], B = [2, 3], \operatorname{dist}(A, B) = 0$ mais $A \neq B$.

Définition 2.13. On appelle **diamètre** d'une partie A de X, et l'on note par $\operatorname{diam}(A)$:

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y).$$

On dit qu'une partie A de X est **bornée** si $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Proposition 2.14. $\operatorname{diam}(B_f(a, r)) \leq 2r$ *où* $B_f(a, r) = \{x \in X : d(a, x) \leq r\}$ *est la boule fermée de centre* a *et de rayon* r.

2.3 Espaces vectoriels normés et espaces Euclidiens

Espaces vectoriels normés

Nous définissons maintenant les espaces vectoriels normés qui forment une classe d'espaces métriques qui jouent un rôle très important dans l'analyse.

Définition 2.15. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une **norme** est une application $\|\cdot\|$: $X \to [0, \infty)$, qui satisfait les propriétés suivantes pour tout $x, y \in X$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$:

(N1) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
(N2) $\|ax\| = |a| \|x\|$;
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (l'inégalité triangulaire)
La paire $(X, \|\cdot\|)$ est appelée **espace vectoriel normé**.

Proposition 2.16. *Soit* $(X, \|\cdot\|)$ *un espace normé, alors*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \text{ définie par } d(x, y) = \|x - y\|$$

est une métrique sur X*, appelée* **métrique induite** *par la norme.*

Démonstration. On montre seulement N3 car les axiomes N1 et N2 sont clairs. Si x, y et $z \in X$, alors on a

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|y - z\| = d(x, z) + d(z, y)$$

■

Exemple 2.17. La valeur absolue $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$

Exemple 2.18. Soit $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alors ;

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
$$\|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i|$$

sont des normes de $\mathbb{R}^n$ qui satisfont l'inégalité suivante

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty .$$

Exemple 2.19. Soit X en ensemble non vide et $(Y, \|\mathrm{cot}\|)$ un espace vectoriel normé. Une fonction $f : X \to Y$ est dite bornée si $\|f\| < M$ pour $M > 0$. L'ensemble de toutes les fonctions bornées $f : X \to Y$, noté par $B(X, Y)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(t)\|.$$

Espaces préhilbertiens et espace Euclidiens

Définition 2.20. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\langle\cdot, \cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ une application telle que pour tout $x, y, z \in V$ et $t \in \mathbb{R}$ on a les propriétés suivantes :

(E 1) $\langle x, x\rangle \geq 0$

(E 2) Si $\langle x, x\rangle = 0$, alors $x = 0$.

(E 3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(E 4) $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$

(E 5) $\langle tx, y\rangle = t\,\langle x, y\rangle$

Alors $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est dit un produit scalaire et $(X, \langle,\rangle)$ est un espace **préhilbertien**.

Un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé **espace Euclidien**.

Proposition 2.21. *Soit $X = \mathbb{R}^n$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$, sur $\mathbb{R}^n$ alors,*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est un **produit scalaire** *sur $\mathbb{R}^n$ et*

$$\langle x, x\rangle = \|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Propriétés élémentaires

1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

2. L'inégalité de Minkowski dite aussi inégalité triangulaire :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

3. Le théorème de Pythagore : si x et y sont orthogonaux, alors

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

la réciproque n'étant vraie que dans le cas réel.

4. La règle du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Réciproquement, d'après le théorème de Fréchet-von Neumann-Jordan, toute norme vérifiant cette identité est préhilbertienne, c'est-à-dire dérive d'un produit scalaire.

5. L'identité de la médiane :

$$\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 = \frac{1}{2}\|y - z\|^2 + 2\left\|x - \frac{y + z}{2}\right\|^2,$$

équivalente à celle du parallélogramme, par changement de variable

6. L'identité polaire :

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle.$$

Théorème 2.22 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors*

$$\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right]^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right] \tag{2.3.1}$$

Démonstration. Si on utilise la notation des produits scalaires l'inégalité (2.3.1) est équivalente à

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\,\langle y, y\rangle\,.$$

En utilisant les propriétés 2.20 des produit scalaires ci-dessus on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x - ty, x - ty\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - 2t\,\langle x, y\rangle + t^2\,\langle y, y\rangle \\ &= c + bt + at^2 \equiv p\,(t) \end{aligned}$$

ou $c = \langle x, x\rangle\,, b = 2\,\langle x, y\rangle$ et $a = \langle y, y\rangle$. Donc $p\,(t)$ est polynôme du second dégrée. Puisque $p\,(t) \geq 0$ et $a = \langle y, y\rangle \geq 0$, le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = [2\,\langle x, y\rangle]^2 - 4\,\langle y, y\rangle\,\langle x, x\rangle$$

doit être négatif. Donc on doit avoir $\Delta = [2\,\langle x, y\rangle]^2 - 4\,\langle y, y\rangle\,\langle x, x\rangle \leq 0$ d'où on obtient

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\,\langle y, y\rangle\,.$$

■

Remarque : L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\,\langle y, y\rangle$$

est équivalente a

$$\langle x, y\rangle \leq \sqrt{\langle x, x\rangle\,\langle y, y\rangle} = \|x\|\|y\|,$$

et si en remplace x par $x - z$ et y par $z - y$ on aura

$$\langle x - z, z - y\rangle \leq \sqrt{\langle x - z, x - z\rangle\,\langle z - y, z - y\rangle} = \|x - z\|\|z - y\|.$$

Corollaire 2.23. *Si* $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, \infty)$ *est définie comme*

$$d_2(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2},$$

alors d *est une distance dans* $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Les deux premières conditions d'une distance sont évidentes. Donc on montre seulement l'inégalité triangulaire. Noter que

$$[d_2(x,y)]^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = \langle x-y, x-y\rangle .$$

En utilisant les propriétés de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la remarque précédente on obtient

$$\begin{aligned}
[d_2(x,y)]^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle (x-z)+(z-y), (x-z)+(z-y)\rangle \\
&= \langle x-z, x-z\rangle + 2\langle x-z, z-y\rangle + \langle z-y, z-y\rangle \\
&\leq \langle x-z, x-z\rangle + 2\sqrt{\langle x-z, x-z\rangle}\sqrt{\langle z-y, z-y\rangle} + \langle z-y, z-y\rangle \\
&\leq d_2(x,z)^2 + 2d_2(x,z)\, d(z,y) + d_2(z,y)^2 \\
&= [d_2(x,z) + d_2(z,y)]^2
\end{aligned}$$

Maintenant si on prend la racine au carré des deux cotés on obtient l'inégalité triangulaire

$$d_2(x,y) \leq d_2(x,z) + d_2(z,y)$$

■

Topologie associée à une distance

Soit (X, d_X) un espace métrique. On se propose de s'intéresser à la géométrie de X. Pour cela, nous allons définir les parties de X qui jouent un rôle important dans la topologie des espaces métriques. Notamment on verra que les boules ouvertes forment la base de la topologie. On montrera aussi que dans un espace métrique quelconque **une boule n'est pas toujours ronde**.

2.4 Boules dans un espace métrique

Définition 2.24. Soient (X,d) est un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$. On définie par :

(1) $B(a,r) = \{x \in X : d(a,x) < r\}$. la **boule ouverte** centrée en a et de rayon r.

(2) $B_f(a,r) = \{x \in X : d(a,x) \leq r\}$ la **boule fermée** centrée en a et de rayon r.

(3) $S(a,r) = \{x \in X : d(a,x) = r\}$ la **sphère** de centre a et de rayon r.

Remarque :

- Si $d_1, d_2, \ldots, d_n$ sont toutes des distances sur le même espace X, alors on notera les boules par rapport aux différentes distances par $B_{d_1}(a,r), B_{d_2}(a,r), \ldots B_{d_n}(a,r)$.
- Si $0 < r < s$ alors,
$$B(a,r) \subseteq B_f(a,r) \subseteq B(a,s).$$

Exemple 2.25.

(1) Si $X = \mathbb{R}$ avec la distance euclidienne alors :
  - $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : |a-x| < r\} = (a-r, a+r)$
  - $B_f(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : |a-x| \leq r\} = [a-r, a+r]$
  - $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : |a-x| = r\} = \{a+r, a-r\}$

(2) Si $X = \mathbb{R}^2$ est muni de la distance usuelle euclidienne alors :
  - $B(a,r)$ est le disque centre en a de rayon r (la circonférence non incluse),
  - $B_f(a,r)$ est le disque avec circonférence incluse et
  - $S(a,r)$ est le cercle de centre a et de rayon r.

(3) Si $X = \mathbb{R}^3, d = d_2$, alors :
  - $B(a,r)$ est la boule ouverte de rayon r et de centre a (l'ensemble des points strictement a l'intérieur de la sphère de rayon r et de centre a,
  - $B_f(a,r)$ est $B(a,f)$ en plus de la sphère et

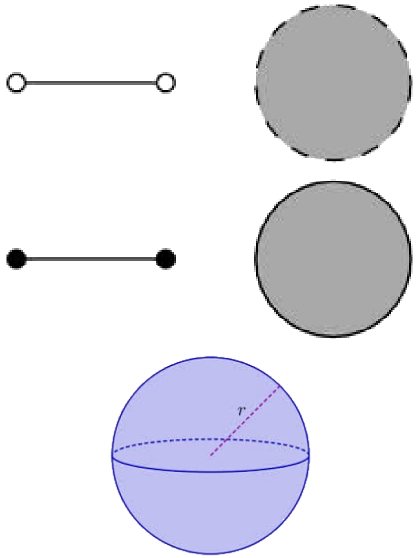


FIGURE 2.1: Boules dans $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

– $S(a, r)$ sont les points sur la sphère seulement.

(4) Dans $X = \mathbb{R}^2$ les boules de rayon 1 et centrées a l'origine ont les formes suivantes avec les distances d_1, d_2 et d_∞ vues dans l'exemple (2.5) :

$$B_{d_1}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_1((0,0),(x,y) = |x| + |y| < 1\}$$
$$B_{d_2}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_2((0,0),(x,y) = x^2 + y^2 < 1\}$$
$$B_{d_\infty}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_\infty((0,0),(x,y) = \max\{|x|,|y|\} < 1\}$$

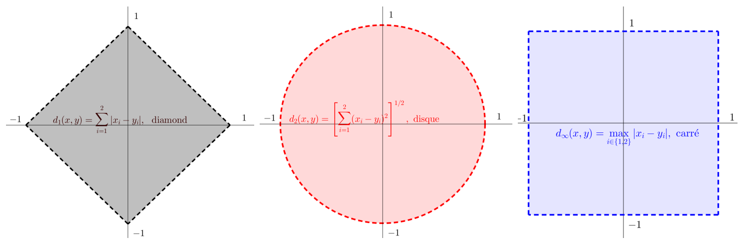


FIGURE 2.2: Boules ouvertes de centre $(0,0)$ de rayon $r = 1$ dans $\mathbb{R}^2$ avec d_1, d_2 et d_∞

(5) Dans l'espace métrique discret $(\mathbb{R}^2, \delta)$ on a,

$$B(a,r) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } r \leq 1, \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Donc on a $B(a,1) = \{a\}$, $B_f(a,1) = \mathbb{R}^2$ et $S(a,1) = \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$.

(6) Soit X l'ensemble $B([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions numériques réelles bornées sur $[0,1]$, avec la métrique sup $d = d_\infty$. Alors pour $f_0 \in X$ et $r > 0$, $B(f_0, r)$ est l'ensemble des fonctions $f \in X$ dont le graphe est a l'intérieur du ruban de largeur verticale égale à $2r$ et de centre le graphe de f_0.

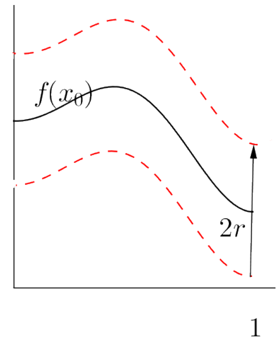


FIGURE 2.3: Boule ouverte de rayon r et centre $f_0(x)$

Remarques :

(a) Les boules ne sont pas toujours **rondes**.

(b) La forme de la boules dépend généralement de la métrique et l'ensemble sur lequel elle est définie.

(c) Sur (X, δ) on a $B(a,1) = B(a,1/2) = \{a\}$.

2.5 Ouverts, fermés, et voisinage

Définition 2.26. Soient (X,d) est un espace métrique et $O, F, V_x \subset X$, alors on dit que :

(a) O est **ouvert** dans X, si pour tout x dans O il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq O$.

(b) F est **fermé** dans X, si son complément $X \setminus F$, est ouvert dans X.

(c) V_x est un **voisinage** de x s'il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq V_x$.

Remarques :

(a) $\varnothing$ et X sont a la fois des ouverts et des fermés de (X,d).

(b) Toute boule ouverte est un voisinages de tous ses points.

(c) Tout ouvert est un voisinage de tous ses points.

(d) La réunion quelconque de voisinages de x est un voisinage de x.

(e) L'intersection finie de voisinages de x est un voisinages de x.

(f) X est un voisinage de tout $x \in X$.

(g) $\varnothing$ n'est pas un voisinage de tout $x \in X$.

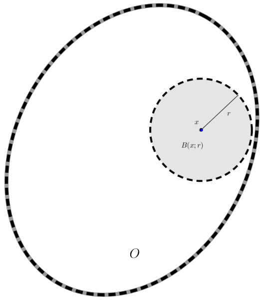


FIGURE 2.4: Ouvert O dans (X, d)

Exemple 2.27.

(1) Si (X, d) est un espace métrique, alors $X, \varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés. Il est clair que X ouvert, en fait, il est le plus grand ouvert de X. Puisque $\varnothing$ ne contient aucun élément, donc tous les points de $\varnothing$ satisfait la condition. Étant donné que ces deux ensembles sont ouverts, leurs compléments ($X \setminus \varnothing = X$, $X \setminus X = \varnothing$) sont fermés.

(2) Si $X = \mathbb{R}$ et d est la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$, alors tout intervalle ouvert $I = (a, b)$ est un ouvert. En effet pour tout $x \in I$, si on choisi $r = \min\{x - a, b - x\}$, on a $B(x, r) = (x - r, x + r) \subset I$. Par contre tout intervalle non ouvert n'est pas un ouvert. Par exemple $[a, b)$ n'est pas un ouvert, car il n'existe pas de boule ouverte de centre b incluse dans $[a, b)$.

(3) Si $X = \mathbb{R}$ et d est la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$;
- $\mathbb{R}, \varnothing, (a, b), (a, \infty)$ et $(-\infty, b)$ sont ouverts.
- $\mathbb{R}, \varnothing, [a, b], [a, \infty)$ et $(-\infty, b]$ sont fermés.
- $[a, b)$ et $(a, b]$ ne sont ni ouverts ni fermés.
- Si O est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $O = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$

(4) Soit (X, δ) un espace métrique discret, alors toute partie de X est à la fois ouverte et fermée.
En effet on a montrer que $\{x\} = B(x, r)$ pour tout $r \in [0, 1]$. Donc tout singleton de

X est une boule ouverte donc un ouvert de X. Cela entraine que toute partie de X est ouverte et par complément toute partie de X est fermée.

Proposition 2.28. *Soient (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et $r > 0$.*

(1) *$\varnothing$ et X sont des ouverts de (X, d).*

(2) *$\varnothing$ et X sont des fermés de (X, d).*

(3) *Toute intersection finie d'ouverts de (X, d) est un ouvert de (X, d).*

(4) *Toute union arbitraire d'ouverts de (X, d) est un ouvert de (X, d).*

(5) *Toute union finie de fermés de (X, d) est un fermé de (X, d).*

(6) *Toute intersection arbitraire de fermés de (X, d) est un fermé de (X, d).*

(7) *Toute boule ouverte $B(x, r)$ de (X, d) est un ouvert de (X, d).*

(8) *Toute boule fermée $B_f(x, r)$ de (X, d) est un fermé de (X, d).*

(9) *Toute sphère $S(x, r)$ est un sous-ensemble fermé de (X, d).*

(10) *Tout partie finie de (X, d) est un fermé de (X, d).*

Démonstration.

(1) Si $x \in X$ alors pour out $r > 0$, $B(x, r) \subseteq X$, qui montre que X est en effet un ouvert de lui même. Si $\varnothing$ n'étais pas ouvert alors il existerait $x \in \varnothing$ et $r > 0$ tel que $B(x, r) \subsetneq \varnothing$ ce qui est impossible car $\varnothing$ ne contient aucun point.

(2) On prend les compléments dans (1).

(3) On veut montrer que si $G_1, \ldots, G_n$ sont ouverts, alors $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ est un ouvert. Soit $x \in \bigcap_{k=1}^{n} G_k$. Alors pour $1 \leq k \leq n$ il existe $r_k > 0$ avec $B(x, r_k) \subseteq G_k$. Si on choisi $r = \min\{r_1, \ldots, r_k\}$ alors $r > 0$ et $B(x, r_k) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} G_k$.

(4) On veut montrer que si $\{G_i : i \in I\}$ est une collection d'ouverts, alors $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ est un ouvert. Soit $x \in G$, alors $x \in G_j$ pour un certain $j \in I$ et puisque G_j est ouvert il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq G_j$. Donc pour tout $x \in G$ il existe une boule ouverte $B(x, r)$ telle que $B(x, r) \subset G_j \subset G = \bigcup_{i \in I} G_i$, qui montre que G est ouvert.

(5) On prend les compléments dans la partie (1).

(6) On prend les compléments dans la partie (2).

(7) Pour chaque $r > 0$, $B(x, r)$ est un sous-ensemble ouvert de X. En effet si $y \in B(x, r)$ et $0 < s < r - d(x, y)$, alors $B(y, s) \subseteq B(x, r)$. Voir figure (2.5).

(8) Pour chaque $r > 0$, $B_f(x, r)$ est un sous-ensemble fermé de X.
En effet si $z \in G = X \setminus B_f(x, r)$ et $0 < k < d(x, y) - r$, alors $B(z; k) \subseteq G$. Donc G est ouvert, ce qui implique que sont complément $B_f(x, r)$ est un sous ensemble fermé de X. Voir figure (2.5).

(9) Le complément de $S(x,r)$ est l'union $(X \setminus B_f(x,r)) \bigcup B(x,r)$ qui est un ouvert car c'est l'union de deux ouverts. Donc la sphère est un fermé.

(10) Tout partie finie de X est fermée. En fait, si $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $x \in X \setminus F$, alors on peut trouver un rayon positif $r < \min\{d(x_1,x), \dots, d(x_n,x)\}$ avec $B(x,r) \subseteq X \setminus F$.

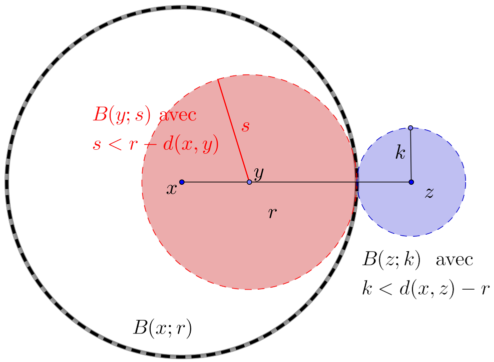


FIGURE 2.5: La boule ouverte est ubn ouvert.

■

Exemple 2.29.

(1) Considérons les familles infinies d'ouverts de $\mathbb{R}$. La réunion $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{i}) = (0,1)$ est un ouvert.

(2) L'intersection $\bigcap_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right) = \{0\}$ n'est pas un ouvert dans $\mathbb{R}$.

(3) En générale une union infinie de fermés n'est pas un fermé :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \left[-1 + \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}\right] = (-1,1).$$

Proposition 2.30. *Une partie A d'un espace métrique (X,d) est ouverte si et seulement si A est l'union de toutes les boules ouvertes contenues dans A.*

$$A = \bigcup \{B(a,r) : B(a,r) \subseteq A, a \in A\}$$

Démonstration. Exercice 23. ■

Le théorème suivant est une conséquence de la proposition (2.28).

Théorème 2.31. *Soit (X,d) un espace métrique, alors on a :*

(O1) *$\varnothing$ et X sont des ouverts.*

(O2) *Toute union d'ouverts de X est un ouvert de X.*

(O3) *Toute intersection fini d'ouverts de X est un ouvert de X.*

Topologie d'un espace métrique

De manière générale, on appelle **topologie** sur X un ensemble $\mathscr{T}$ de parties de X qui vérifie les trois propriétés ci-dessous.

Axiome 2.32.

(T1) *$\varnothing, X \in \mathscr{T}$.*

(T2) *Si $\{G_i : i \in I\} \subseteq \mathscr{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathscr{T}$.*

(T3) *Si $G_1, \dots, G_n \in \mathscr{T}$, alors $G_1 \cap \ldots \cap G_n \in \mathscr{T}$.*

Si $\mathscr{T}$ est une topologie sur X, alors $(X, \mathscr{T})$ est appelé **espace topologique**.

Proposition 2.33 (Séparation). *Soit (X, d_X) un espace métrique et $x, y \in X, x \neq y$, alors on peut toujours séparer x et y par des ouverts disjoints.*

Démonstration. Puisque $x \neq y$ alors $d(x,y) = r > 0$.
Posons $U = B(x, r/3)$ et $V = B(y, r/3)$ alors on a $x \in U, y \in V$ et $U \cap V = \varnothing$. ■

On dit que tout espace métrique (X,d) est séparé. Cette notion de séparation est connue sous le nom de **Hausdorff**. Donc tout espace métrique (X,d) est Hausdorff.
Notons que le théorème (2.31) affirme que si (X,d) est un espace métrique, alors les ouverts de X vérifient les 3 axiomes de la topologie. On a donc le résultat évident suivant.
Puisque tout ouvert de (X,d) est une union de boules ouvertes (proposition 2.30), on dit que les boules ouvertes forment une **base** de cette topologie. Cette notion est similaire à celle en algèbre linéaire où tout vecteur est une combinaison linéaire des vecteurs de la base.

Théorème 2.34. *Soit (X,d) un espace métrique, alors :*

(1) Les ouverts de X forment une topologie sur X.

(2) Les boules ouvertes de X forment une base de la topologie sur X.

(3) Tout espace métrique est un espace topologique Hausdorff (séparé).

Remarques.

(1) Les ouverts de (X,d) forment une topologie sur (X,d).

(2) Tout espace métrique (X,d) est un espace topologique.

(3) Les boules ouvertes $B(x,r)$ forment une base pour (X,d).

(4) Tout ouvert de (X,d) est un réunion de boules ouvertes de (X,d).

(5) Les intervalles ouverts (a, b) forment une base pour $(\mathbb{R}, d)$.

(6) Si A est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$.

(7) Tout espace métrique (X, d) est Hausdorff.

2.6 Intérieur, extérieur, adhérence et frontière

Les ouverts et fermés jouent un rôle très important dans les espace métriques.

Définition 2.35. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$.

(a) On dit qu'un point $a \in X$ est un point **intérieur** à A s'il existe une boule ouverte de centre a incluse dans A. L'ensemble de tous les points intérieurs de A est appelé **l'intérieur** ou **l'ouverture** de A et on le dénote par **Int** A.

(b) On dit qu'un point $a \in X$ est un point **extérieur** à A s'il existe une boule ouverte de centre a incluse dans $X \setminus A$. L'ensemble de tous les points extérieurs de A est appelé l'extérieur de A et on le dénote par **Ext** A.

(c) On dit qu'un point $x \in X$ est un point **adhérent** à A si tout voisinage de x contient au moins un point de A. Autrement dit $A \cap V_x \neq \varnothing$. L'ensemble de tous les points adhérents à l'ensemble A s'appelle **l'adhérence** ou **fermeture** de A et on le dénote par **Adh** A.

(d) On dit qu'un point $x \in X$ est un point **d'accumulation** (valeur d'adhérence) de A si x est adhérent à $A \setminus \{x\}$. Donc tout voisinage V_x de x, contient au mois un point de A autre que x. Autrement dit $(A - \{x\}) \cap V_x \neq \varnothing$. Notons que tous point d'accumulation de A est un point adhérent à A. L'ensemble des points d'accumulation de A est appelé l'ensemble **dérivé** de A et on le note par A'.

(e) On dit qu'un point $x \in X$ est un point **frontière** de A s'il est **adhérent** à la fois à A et à $X \setminus A$. L'ensemble de tous les points frontière de A est appelé frontière de A et on le dénote par **Fr** A.

(f) On dit qu'un point $a \in A$ est un point **isolé** de A s'il existe un voisinage V_a de a tel que $V_a \cap A = \{a\}$. On dénote l'ensemble ses points isolés par **Is**(A).

Remarque : Un point d'accumulation de l'ensemble A peut être dans A ou ne pas y être. Par exemple, si $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ l'ensemble des nombres rationnels du segment $[0, 1]$, tout point $[0, 1]$ est un point d'accumulation de A.

Définition 2.36. Soit A une partie quelconque de l'espace métrique (X, d), alors on :

- **Int** $A = \bigcup\{G : G \text{ est ouvert et } G \subseteq A\}$;
- **Ext** $A = \bigcup\{G : G \text{ est ouvert et } G \subseteq (X \setminus A)\}$;
- **Adh** $A = \bigcap\{F : F \text{ est fermé et } A \subseteq F\}$;

- **Fr** $A = \mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(X \setminus A)$;
- $A' = \mathbf{Adh}\, A - \mathbf{Is}(A)$.

Exemple 2.37. Considérons l'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ et $A = \{-1\} \cup [0, \infty)$, alors :

- **Int** $A = (0, \infty)$;
- **Ext** $A = (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$;
- **Adh** $A = \{-1\} \cup [0, \infty)$;
- $A' = [0, \infty)$;
- **Fr** $A = \{-1, 0\}$;
- $A' = [0, \infty)$;
- **Is** $(A) = \{-1\}$.

Voici quelques propriétés qui découlent directement des définitions.

Remarques : Si $A \subset X$ on

(1) $\mathbf{Int}(A) \subseteq A \subseteq \mathbf{Adh}(A)$.

(2) $\mathbf{Int}(X) = X = \mathbf{Adh}(A)$.

(3) $\mathbf{Int}(\varnothing) = \varnothing = \mathbf{Adh}(\varnothing)$.

(4) Si $x \in A$ et $x \notin A'$, alors $x \in \mathbf{Is}\, A$.

Exemple 2.38. Si $X = \mathbb{R}$, $A = (a, b]$, $B = \{a, b\}$ alors,

(1) $\mathbf{Adh}(A) = [a, b]$ et $\mathbf{Adh}(B) = B$.

(2) **Int** $A = (a, b)$ et **Int** $B = \varnothing$.

(3) **Ext** $A = \mathbb{R} \setminus A$ et **Ext** $B = \mathbb{R} \setminus B$.

(4) **Is** $A = \varnothing$ et **Is** $B = B$.

(5) **Fr** $A = B$ et **Fr** $B = B$.

Proposition 2.39. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subseteq X$.*

(a) *$x \in \mathbf{Int}\, A$ si et seulement si $B(x, r) \subseteq A$ pour un certain $r > 0$.*

(b) *$x \in \mathbf{Adh}\, A$ si et seulement si $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$ pour n'importe quel $r > 0$.*

(c) *$x \in \mathbf{Adh}\, A$ si et seulement si il existe une suite (x_n) dans A tel que $d(x, x_n) \to 0$.*

Démonstration.

(a) Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A$. Puisque $B(x, r)$ est un ouvert contenu dans A et **Int** A est le plus grand ouvert contenu dans A, alors on a $x \in B(x, r) \subseteq \mathbf{Int}\, A$, donc $x \in \mathbf{Int}\, A$. Supposons maintenant que $x \in \mathbf{Int}\, A$. Il existe un ouvert G tel que $x \in G \subseteq A$. Mais puisque G est ouvert, il existe $r > 0$ avec $B(x, r) \subseteq G$ et nous avons établi la réciproque.

(b) Supposons que $x \in \mathbf{Adh}\, A$. Si $r > 0$, alors $B(x, r)$ est ouvert et $X \setminus B(x, r)$ est fermé. Il est impossible que $A \subseteq (X \setminus B(x, r))$ car par définition cela implique que $\mathbf{Adh}\, A \subseteq (X \setminus B(x, r))$, qui est une contradiction au fait que $x \in \mathbf{Adh}\, A$. Donc

$B(x,r) \cap A \neq \varnothing$.

Supposons que $x \notin \mathbf{Adh}\, A$; donc $x \in X \setminus \mathbf{Adh}\, A$ qui est ouvert. Par définition il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq X \setminus \mathbf{Adh}\, A$. Pour cette boule $B(x,r) \cap A = \varnothing$.

(c) Supposons que $x_n \in A$ et $d(x_n, x) \to 0$. Puisque $A \in \mathbf{Adh}\, A$, $x_n \in \mathbf{Adh}\, A$ et puisque $\mathbf{Adh}\, A$ est fermé, alors $x \in \mathbf{Adh}\, A$.

Réciproquement supposons que $x \in \mathbf{Adh}\, A$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B(x, 1/n) \cap A \neq \varnothing$. Il existe $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$ tel que $d(x_n, x) < 1/n$. Donc $d(x_n, x) \to 0$.

■

La proposition précédente est très utile car elle fournit méthode concrète pour déterminer si un point spécifique appartient à l'adhérence ou à l'intérieur d'un ensemble. Nous allons voir une illustration dans l'exemple suivant.

Exemple 2.40.

(1) Considérons l'espace métrique $\mathbb{R}$ avec la distance usuelle et son sous ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$. On sait que si a et b sont deux réels tel que $a < b$, alors il existe au moins un rationnel y tel que $a < y < b$. Si $x \in \mathbb{R}$ la boule ouverte $B(x,r) = (x-r, x+r)$ doit contenir un nombre rationnel. Par la proposition précédente on a que $x \in \mathbf{Adh}\, \mathbb{Q}$, donc $\mathbf{Adh}\, \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

(2) Si $x \in \mathbb{Q}$ il n y a pas de boule ouverte $B(x,r)$ contenue dans $\mathbb{Q}$ c.a.d. il n y pas $B(x,r) \subseteq \mathbb{Q}$ donc $\mathbf{Int}\, \mathbb{Q} = \varnothing$.

(3) En utilisant les mêmes arguments on a $\mathbf{Adh}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ et $\mathbf{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \varnothing$.

Exemple 2.41. Puisque $B_f(x,r)$ est fermée, on a $\mathbf{Adh}\, B(x,r) \subseteq B_f(x,r)$. Cela ne veut pas dire que $\mathbf{Adh}\, B(x,r) = B_f(x,r)$.
Considérons

$$X = \{(0,0)\} \cup \{(a,b) : a^2 + b^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Donc X consiste de l'origine et le cercle de rayon 1. On donne a X la distance usuelle induite de $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas

$$\mathbf{Adh}\, B((0,0);1) = \{(0,0)\} \neq B_f((0,0);1) = X$$

Exemple 2.42. Soit (X, δ) un espace métrique discret.

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y, \\ 1 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

alors

$$\{x\} = B(x;1) = \mathbf{Adh}\, B(x;1) \text{ et } B_f(x;1) = X.$$

Attention. Dans l'espace métrique discret (X, δ) tout singleton est une boule ouverte donc un ouvert. Donc toute partie de (X, δ) est à la fois ouverte et fermée.

Exemple 2.43.

(a) Soit $X = \mathbb{R}$ et $A = (0,1) \cup \{2\}$. Chaque point dans $[0,1]$ est u point d'accumulation de A sauf le point $\{2\}$. En fait, 2 est un exemple d'un point isolé de A, le seul point isolé de A. La frontière $\mathbf{Fr}\, A = \{0,1,2\}$

(b) Considérons les ensembles de $\mathbb{R}$, $A_1 = (a,b)$, $A_2 = (a,b]$, et $A_3 = [a,b]$, alors $\mathbf{Int}\, A_i = (0,1)$, $\mathbf{Adh}\, A_i = [a,b]$, $\mathbf{Fr}\, A_i = \{a,b\}$

(c) Si $X = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{Q}$, alors chaque point de X est un point d'accumulation de A et A n'a pas de points isolés.

(d) Si $X = \mathbb{R}$ et $A = \{n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$, alors 0 est un point d'accumulation de A, tandis que les points n^{-1} sont tous des points isolés.

Les propositions suivantes contiennent des informations utiles sur les adhérences et les intérieurs des ensembles. Les démonstrations sont laissées comme exercices.

Proposition 2.44. *Soit (X,d) un espace métrique et $A \subseteq X$.*

(1) $\mathbf{Int}\, A \subseteq A \subseteq \mathbf{Adh}(A)$.

(2) $\mathbf{Adh}(X - A) = X - \mathbf{Int}(A)$.

(3) $\mathbf{Int}(X - A) = \mathbf{Ext}(A) = X - \mathbf{Adh}(A)$.

(4) $\mathbf{Int}(A) \cap \mathbf{Ext}(A) = \varnothing$.

(5) $\mathbf{Fr}(A) = \mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(X - A)$
$\mathbf{Fr}(A) = \mathbf{Adh}(A) - \mathbf{Int}(A)$
$\mathbf{Fr}(A) = \mathbf{Fr}(X - A)$
$\mathbf{Fr}(A) = X - [\mathbf{Int}(A) \sqcup \mathbf{Ext}(A)]$
$\mathbf{Fr}(A)$ *est fermé.*

(6) $X = \mathbf{Int}(A) \sqcup \mathbf{Ext}(A) \sqcup \mathbf{Fr}(A)$.

Propriétés de l'adhérence. Les propriétés suivantes découlent directement des définitions mais sont très souvent utilisées. Soit (X,d) un espace métrique et $A, B \subset X$.

(1) $\mathbf{Adh}(X) = X$;

(2) $\mathbf{Adh}(\varnothing) = \varnothing$;

(3) $A \subseteq \mathbf{Adh}(A)$;

(4) $\mathbf{Adh}(A)$ est un fermé de X ;

(5) $\mathbf{Adh}(A)$ est le plus petit fermé de X contenant A ;

(6) Si $A \subset F$ et F est un fermé de X, alors $A \subseteq \mathbf{Adh}\, A \subseteq F$;

(7) $\mathbf{Adh}[\mathbf{Adh}(A)] = \mathbf{Adh}\, A$.

(8) $\mathbf{Adh}(A) = A$ si et seulement si A est fermé.

(9) Si $A \subset B$, alors $\mathbf{Adh}(A) \subset \mathbf{Adh}(B)$.

(10) $\mathbf{Adh}(A \cup B) = \mathbf{Adh}(A) \cup \mathbf{Adh}(B)$.

(11) $\mathbf{Adh}(A \cap B) \subset \mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(B)$.

Exemple 2.45.

(1) Si $A = (1,2)$ et $B = (2,3)$, alors
$\mathbf{Adh}(A \cap B) = \mathbf{Adh}(\varnothing) = \varnothing$, mais $\mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(B) = [1,2] \cap [2,3] = \{2\}$.
Cela montre qu'en général l'inclusion dans (3) n'est pas une égalité.

(2) Si $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, alors
$\mathbf{Adh}(A \cap B) = \mathbf{Adh}(\varnothing) = \varnothing$, mais $\mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(B) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Proposition 2.46. *Soit A une partie de l'espace métrique (X,d), alors on a*
$\mathbf{Adh}\, A = A \cup \{x : x \text{ est un point d'accumulation de} A\} = A \cup A'$.

Démonstration. Posons $B = A \cup \{x : x \text{ est un point d'accumulation de } A\} = A \cup A'$. Puisque A et A' sont des sous ensemble de $\mathbf{Adh}\, A$ alors $B = A \cup A' \subset \mathbf{Adh}\, A$. Inversement supposons que $x \in \mathbf{Adh}\, A$. Si $x \in A$ alors on a $x \in B$. Maintenant si $x \notin A$, alors pour tout $\epsilon > 0, B(x;\epsilon) \cap A \neq \varnothing$. Mais puisque $x \notin A$ alors $[B(x;\epsilon) - \{x\}] \cap A \neq \varnothing$. Donc x est un point d'accumulation de A qui entraine que $\mathbf{Adh}\, A \subset B$. Donc on a donc montrer que $\mathbf{Adh}\, A = A \cup A'$. ■

Corollaire 2.47. *Une partie A d'un espace métrique X est fermée si et seulement si $A' \subset A$.*

Propriétés de l'intérieur. Les propriétés suivantes découlent directement des définitions mais sont très souvent utilisées. Soit (X,d) un espace métrique et $A, B \subset X$.

(1) $\mathbf{Int}(X) = X$;

(2) $\mathbf{Int}(\varnothing) = \varnothing$;

(3) $\mathbf{Int}(A) \subseteq A$;

(4) $\mathbf{Int}(A)$ est un ouvert de X ;

(5) $\mathbf{Int}(A)$ est le plus grand ouvert de X contenant A ;

(6) Si $O \subset A$ et O est un ouvert de X, alors $O \subset \mathbf{Int}(A)$;

(7) $\mathbf{Int}[\mathbf{Int}(A)] = \mathbf{Int}\, A$;

(8) $\mathbf{Int}(A) = A$ si et seulement si A est ouvert ;

(9) Si $A \subset B$, alors $\mathbf{Int}(A) \subset \mathbf{Int}(B)$;

(10) $\mathbf{Int}(A \cup B) \supset \mathbf{Int}(A) \cup \mathbf{Int}(B)$;

(11) $\mathbf{Int}(A \cap B) = \mathbf{Int}(A) \cap \mathbf{Int}(B)$.

Exemple 2.48.

(1) Si $A = [1,2]$ et $B = (2,3)$, alors
$\mathbf{Int}(A \cup B) = \mathbf{Int}[1,3) = (1,3)$, mais $\mathbf{Int}(A) \cup \mathbf{Int}(B) = (1,2) \cap (2,3)$.
Cela montre qu'en général l'inclusion dans (2) n'est pas une égalité.

(2) Si $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, alors
$\mathbf{Int}(A \cup B) = \mathbf{Int}\, \mathbb{R} = \mathbb{R}$, mais $\mathbf{Int}(A) \cup \mathbf{Int}(B) = \varnothing$.

Définition 2.49. Soit (X,d) un espace métrique et $E \subset X$.
(a) On dit que E est **dense** dans X si $\mathbf{Adh}\, E = X$.
(b) On dit que (X,d) est **séparable** s'il contient un sous-ensemble dénombrable et dense.

Proposition 2.50. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) *E est dense dans X.*

(b) $\mathbf{Adh}\, E = X$.

(c) *X est le seul sous-ensemble fermé contenant E.*

(d) *Tout ouvert non vide de X contient au moins un point de E.*

(e) *Pour tout $x \in X$, et tout $r > 0$, $B(x,r) \cap E \neq \varnothing$.*

(f) *Pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n) \in E$ telle que $x_n \to x$.*

Exemple 2.51.

(a) Chaque espace métrique est dense dans lui même.

(b) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont dense dans $\mathbb{R}$.

(c) $\mathbb{R}$ est séparable, car $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense.

(d) L'ensemble de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont rationnels est dense et dénombrable dans $\mathbb{R}^n$. Donc $\mathbb{R}^n$ est séparable.

(e) Si (X,δ) est un espace métrique discret, alors le seul sous ensemble dense de X est X lui même. En fait, si E est dense dans (X,δ), alors $B(x;1/2) \cap E \neq \varnothing$, mais par la définition de la distance discrète on a $(x;1/2) = \{x\}$.

2.7 Nouveaux espaces a partir d'existants espaces

Dans cette section on montre comment obtenir de nouveaux espaces métriques à partir d'existants espaces métriques.

Sous-espace métrique

Supposons que (X, d_X) est un espace métrique donné. Si A est un sous-ensemble non vide de X, considérons la restriction d_A de d_X à A. Pour tout $x, y \in A, d_A(x,y) = d_X(x,y)$. La métrique d_A est appelée la **métrique induite** . Alors (Y, d_A) est aussi un espace métrique et que l'on appelle un **sous-espace métrique** de (X, d_X). On notera cela $(A, d_A) \subset (X, d_X)$.

Comme exemple spécifique nous pouvons prendre $X = \mathbb{R}$ et $A = [0,1]$ avec la distance usuelle. On peut générer de cette façon une infinité de sous espace métriques.

Attention ! Il est important lors de la discussion des sous-ensembles ouverts et fermés d'être conscient de l'univers où on travail. Quand (X, d_X) est un espace métrique et $A \subset$

X, alors (A, d_A) est également un espace métrique. Pour dire que nous avons un ensemble ouvert O dans (A, d_A) ne veut pas dire que O est ouvert dans (X, d_X).

Considérons $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ avec la distance usuelle et le sous-espace métrique (A, d_A) ou A est l'intervalle $A = [1, 5)$.

(a) Noter que $[1, 3) = [1, 5) \cap (0, 3) = A \cap (0, 3)$, donc $[1, 3)$ est un ouvert dan (A, d_A), mais $[1, 3)$ n'est pas un ouvert dans $(\mathbb{R}, d)$.

(b) Noter que $[4, 5) = [1, 5) \cap [4, 7] = A \cap [4, 7]$, donc $[4, 5)$ est un fermé dans A, mais n'est pas un fermé dans $\mathbb{R}$.

(c) Puisque $[4, 5)$ est fermé dans A, alors $\mathbf{Adh}\,[4, 5) = [4, 5)$ dans A, mais $\mathbf{Adh}\,[4, 5) = [4, 5]$ dans $\mathbb{R}$.

Si $a \in A$ et $r > 0$, la boule ouverte dans (A, d_A) est le sous-ensemble

$$B_{d_A}(a, r) = \{x \in A : d_A(a, x) < r\} = A \cap B_{d_X}(a, r)$$

Il est possible que cet ensemble ne soit pas un ouvert dans (X, d_X).

Par exemple si $X = \mathbb{R}$ et $A = [0, 2]$ la boule ouverte centrée en 0 et de rayon 1 dans A est égale à :

$$B_{d_A}(0, 1) = \{a \in A : d_A(0, a) < 1\} = A \cap B_{d_X}(0, 1) = [0, 2] \cap (-1, 1) = [0, 1)$$

qui un ouvert dans (A, d_A) mais ne l'est pas dans (X, d_X).
Un autre exemple est la boule centrée en 2 et de rayon 1 dans (A, d_A) qui est égale à :

$$B_{d_A}(2, 1) = \{a \in A : d_A(2, a) < 1\} = A \cap B_{d_X}(2, 1) = [0, 2] \cap (1, 3) = (1, 2].$$

Remarque. Il faut retenir des exemples précédents que les notions d'ouverts, fermés, adhérence, voisinages ne sont pas intrinsèques mais dépendent de la distance de l'espace ambiant.

Proposition 2.52. *Soit (A, d_A) un sous-espace métrique de (X, d_X) et $G \subset A \subset X$.*

(a) *G est un ouvert de A si et seulement s'il existe un ouvert O de X tel que $G = A \cap O$.*

(b) *G est un fermé de A si et seulement s'il existe un fermé F de X tel que $G = A \cap F$.*

Démonstration.

(a) **Suffisance :** Soit O un ouvert de (X, d_X) et posons $G = A \cap O$. Alors, pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$, d'où

$$B(x, r) \cap A \subset O \cap A = G.$$

Donc G est un ouvert de (A, d_A).

Nécessité : Soit G ouvert dans A. Alors pour $x \in G$ il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \cap A \subset G$. Posons

$$O = \bigcup_{x \in G} B(x, r_x)$$

O est ouvert dans X et $O \cap A = G$.

(b) La démonstration est similaire à celle dans (a).

■

En utilisant la proposition précédente on a le résultat suivant.

Corollaire 2.53. *Si $\mathscr{B}$ est la collection des ouverts de (X, d), et $A \subset X$, alors*

$$\mathscr{B}_A = \{A \cap O : O \in \mathscr{B}\}$$

est la collection des ouverts de (A, d_A).

Remarque : Si A est un ouvert de X alors pour tout ouvert O de X, $G = A \cap O$ est ouvert A et dans X à la fois. On peut donc avoir le résultat suivant.

Proposition 2.54. *Soit (A, d_A) un sous-espace métrique (X, d). Pour que tout ouvert (resp. tout fermé) de A soit un ouvert (resp. un fermé) de X il faut et il suffit que A soit un ouvert (resp.un fermé) de X.*

Produits d'espaces métriques

Rappelons que le produit cartésien de deux ensembles X_1 et X_2 est défini comme $X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$.

Définition 2.55. Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques, alors si
$Z = X \times Y$ on peut définir un nouvel espace métrique (Z, d_Z) en laissant

$$d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

pour tout x_1, x_2 dans X et y_1, y_2 dans Y.

On peut définir la distance d'une autre manière, comme par exemple

$$d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

Cette métrique est appelée **métrique produit**.
On verra plus tard que ces deux distances sont équivalentes.

Proposition 2.56.

(a) *Si G_i est ouvert dans $X_i, i = 1, 2$ alors $G_1 \times G_2$ est ouvert dans $X_1 \times X_2$.*

(b) *Si F_i est fermé dans $X_i, i = 1, 2$ alors $F_1 \times F_2$ est fermé dans $X_1 \times X_2$.*

(c) *Si G est ouvert dans $X_1 \times X_2$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x_1, r) \times B_2(x_2, r) \subseteq G$.*

Démonstration.

(a) Si $(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2$, alors pour $i = 1, 2$ soit $r_i > 0$ tel que $B(x_i, r_i) \subseteq G_i$. Il se découle que si $r = \min\{r_1, r_2\}$, alors $B((x_1, x_2); r) \subseteq G_1 \times G_2$.

(b) $(X_1 \times X_2) \setminus (F_1 \times F_2) = [(X_1 \setminus F_1) \times X_2] \cup [X_1 \times (X_2 \setminus F_2)]$, qui ouvert a partir de (a) car c'est la réunion de deux ouverts.

(c) Soit $\epsilon > 0$ tel que $B((x_1, x_2); \epsilon) \subseteq G$. Si on choisi $0 < r < \epsilon/2$ on aura le résultat désiré.

■

Corollaire 2.57.

(a) *Tout produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*

(b) *Tout produit de deux fermés de $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.*

Exemple 2.58. On a vu que $\mathbb{R}, \varnothing, (a, b), a, \infty)$ et $(-\infty, b)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. Alors, $\mathbb{R}^2, \varnothing, (a, b) \times (c, d), (a, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times (a, \infty)$ et $(-\infty, b)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Remarque. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, $\mathscr{B}_X$ est la collection de tous les ouverts de X, $\mathscr{B}_Y$ est la collection de tous les ouverts de Y, alors*

$$\mathscr{B}_Z = \{U_X \times U_Y : U_X \in \mathscr{B}_X, U_Y \in \mathscr{B}_Y\}$$

est la collection de tous les ouverts de $Z = X \times Y$.

2.8 Exercices

1. Soit $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ on définie :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

$$d_2(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2},$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} |x_i - y_i|$$

(a) Vérifier l'inégalité triangulaire pour les distances d_1, d_2 et d_∞ .

(b) Si $X = \mathbb{R}^2$ dessiner les boules unitaires ouvertes $B((0, 0), 1)$ pour d_1, d_2 et d_∞.

2. Si $P = (x_1, y_1)$ et $Q = (x_2, y_2)$ sont deux points quelconque dans $\mathbb{R}^2$, montrer que :
(1) $d_1(P, Q) \geq d_2(P, Q) \geq d_\infty(P, Q)$.
(2) $d_1(P, Q) \leq \sqrt{2} d_2(P, Q)$
(3) $d_2(P, Q) \leq \sqrt{2} d_\infty(P, Q)$.

3. Les quelles de ces fonctions sont des distances sur $\mathbb{R}$?

(a) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$

(b) $d(x, y) = |x^3 - y^3|$

(c) $d(x, y) = |x - 2y|$

(d) $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$

(e) $d(x, y) = e^{x-y}$

4. Montrer que $\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

5. Soit $X = C[a, b], d_1(f, g) = \displaystyle\int_a^b |f(t) - g(t)| dt$ et $d_\infty(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(t) - g(t)|$. Montrer que :

(a) (X, d_1) et (X, d_∞) sont des espace métriques.

(b) $d_1(f, g) \leq (b - a) d_\infty(f, g)$.

6. Soit $X = \{a, b\}$ et d telle que $d(a, a) = d(b, b) = 0$, $d(a, b) = d(b, a) = r$ où r est un réel positif. Montrer que (X, d) est un espace métrique.

7. Soit X un ensemble et d telle que $d(x, x) = 0$ pour tout $x \in X$, $d(x, y) = d(y, x) = r \in [1, 2]$ si $x \neq y$. Monter que (X, d) est un espace métrique.

8. Soit X un ensemble et d telle que $d(x, x) = 0$ pour tout $x \in X$, $d(x, y) \neq 0$ si $x \neq y$ et $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$. Montrer que (X, d) est un espace métrique.

9. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des point de l'espace métrique (X, d). Montrer que

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n).$$

10. Soient x, y, z, t des point de l'espace métrique (X, d). Montrer que

$$|d(x,y) - d(z,t)| \leq d(x,z) + d(y,t).$$

11. Soit $f(x)$ une fonction continue définie pour tout $x \geq 0$ telle que :
$f(0) = 0, f(x) > 0, f'(x) > 0$ et $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.
Montrer si (X, d) est un espace métrique, alors $(X, f(d))$ est aussi.

12. Montrer si (X, d) est un espace métrique, alors $(X, f(d))$ est aussi.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

(c) $f(x) = \min\{1, x\}$

13. Monter l'inégalité de Minkowski, si $(x_1, \cdot, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2\right]^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

14. Dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right]^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right]$$

montrer que l'égalité est vraie si et seulement si les vecteurs x et y sont linéairement dépendants ($y = kx$).

15. Si (X, d) est espace métrique, monter que

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

est une métrique sue X.

16. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $A, B \subset \mathbb{R}^n$ on défini :

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a), d(A,B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a,b), \mathrm{diam}(A) = \sup_{a \in A, b \in B} d(a,b)$$

(a) Trouver $d(0, \mathbb{R} - \mathbb{Q})$, $d(\sqrt{3}, \mathbb{Q})$, $d(0, (2,4])$.

(b) Si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, calculer $d(A, B)$.

(c) Quel est $\mathrm{diam}([0,1) \cap \mathbb{Q})$ et $\mathrm{diam}([-2,1) \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q})$

17. Soient A et B de parties bornées d'un espace métrique (X, d). Monter que $\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B) + d(A, B)$.

18. Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques. On définie $d : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

pour tout x_1, x_2 dans X et y_1, y_2 dans Y. Montrer que d est bien une distance.

19. Soient $X = \mathbb{R}^2$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$.

(a) Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Trouver la boule ouverte $B(x_0, r)$ quand $r \leq 1$, et $r > 1$.

(c) Trouver la boule fermée $B_f(x_0, r)$ quand $r < 1$, et $r \geq 1$.

(d) Trouver la sphère $S(x_0, r)$ quand $r = 1$, et $r \neq 1$.

20. Soit (X, d) un espace métrique quelconque.

(a) Est ce que $B(x, r_1) = B(x, r_2)$ implique $r_1 = r_2$?

(b) Est ce que $B(x_1, r) = B(x_2, r)$ implique $x_1 = x_2$?

21. Soient x, y des point de l'espace métrique (X, d) tels que $x \neq y$. Soit $r = d(x,y)/3$, montrer que $B(x,r) \cap B(y,r) = \varnothing$.

22. Montrer que $A \subset X$ est ouvert si et seulement si $X - A$ est fermé.

23. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subseteq X$. Montrer que alors A est ouvert dans X si et seulement si A est l'union de toutes les boules ouvertes contenues dans A.

$$A = \bigcup \{B(a,r) : B(a,r) \subseteq A, a \in A\}.$$

24. Montrer les **propriétés de l'adhérence** suivantes. Soit (X, d) un espace métrique et $A, B \subset X$.

(1) $\mathbf{Adh}(X) = X$.

(2) $A \subseteq \mathbf{Adh}(A)$.

(3) Si $A \subset F$ et F est un fermé de X, alors $\mathbf{Adh}\, A \subset F$.

(4) $\mathbf{Adh}(A)$ est un fermé de X ;

(5) $\mathbf{Adh}(A)$ est le plus petit fermé de X contenant A ;

(6) $\mathbf{Adh}[\mathbf{Adh}(A)] = \mathbf{Adh}\, A$.

(7) $\mathbf{Adh}(A) = A$ si et seulement si A est fermé.

(8) Si $A \subset B$, alors $\mathbf{Adh}(A) \subset \mathbf{Adh}(B)$.

(9) $\mathbf{Adh}(A \cup B) = \mathbf{Adh}(A) \cup \mathbf{Adh}(B)$.

(10) $\mathbf{Adh}(A \cap B) \subset \mathbf{Adh}(A) \cap \mathbf{Adh}(B)$. Donner un contre exemple pour l'autre inclusion.

25. Montrer les **propriétés de l'intérieur** suivantes. Soit (X, d) un espace métrique et $A, B \subset X$.

(1) $\mathbf{Int}(X) = X$.

(2) $\mathbf{Int}(A) \subseteq A$.

(3) $\mathbf{Int}(A)$ est un ouvert de X.

(4) Si $O \subset A$ et O est un ouvert de X, alors $O \subset \mathbf{Int}(A)$.

(5) $\mathbf{Int}(A)$ est le plus grand ouvert de X contenant A.

(6) $\mathbf{Int}[\mathbf{Int}(A)] = \mathbf{Int}\, A$.

(7) $\mathbf{Int}(A) = A$ si et seulement si A est ouvert.

(8) Si $A \subset B$, alors $\mathbf{Int}(A) \subset \mathbf{Int}(B)$.

(9) $\mathbf{Int}(A \cup B) \supset \mathbf{Int}(A) \cup \mathbf{Int}(B)$. Donner un contre exemple pour l'autre inclusion.

(10) $\mathbf{Int}(A \cap B) = \mathbf{Int}(A) \cap \mathbf{Int}(B)$.

26. Soit A une partie d'un espace métrique (X, d). Montrer que

(1) $X - \mathbf{Int}\, A = \mathbf{Adh}(X - A)$

(2) $\mathbf{Adh}\, A = X \setminus [\mathbf{Int}(X \setminus A)]$

(3) $\mathbf{Int}\, A = X \setminus [\mathbf{Adh}(X \setminus A)]$

(4) $\mathbf{Fr}\, A = \mathbf{Adh}\, A \setminus \mathbf{Int}\, A$.

(5) $\mathbf{Adh}[\mathbf{Adh}\, A] = \mathbf{Adh}\, A$.

(6) $\mathbf{Int}[\mathbf{Int}\, A] = \mathbf{Int}\, A$.

27. Soient $A_1, \dots, A_n \subset X$.

(a) Montrer que $\mathbf{Adh}[\bigcup_{k=1}^{n} A_k] = \bigcup_{k=1}^{n} \mathbf{Adh}\, A_k$.

(b) Montrer que (a) n'est pas vraie pour des réunions infini.

28. Si A est ouvert, est-il vrai que $A = \mathbf{Int}(\mathbf{Adh}(A))$?

29. Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X. Montrer que $x \in \mathbf{Adh}\, A$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_n$ dans A tel que $d(x, x_n) \to 0$.

30. Montrer que les sous-ensembles suivants sont fermés dans $\mathbb{R}$.

(a) $[a, b]$ (b) $(-\infty, 0]$ (c) $\{1\}$ (d) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

31. Montrer que les sous-ensembles suivants sont fermés dans $\mathbb{R}^2$.

(a) Le disque fermé $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) Le rectangle fermé $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

(c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq a, y \geq b\}$

32. Soit $X = [0, 2] \setminus \{1\}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}$. Montre que le sous-ensemble $[0, 1) \subset X$ est a la fois ouvert et fermé dans X.

33. Soit A une partie d'un espace métrique (X, d).

(a) Montrer que si A est ouvert, l'intérieur de $\mathbf{Fr}(A)$ est vide ; ce résultat reste-t-il vrai avec A fermé ? avec A quelconque ?

(b) Montrer que A est ouvert si et seulement si $A \cap \mathbf{Fr}(A) = \varnothing$.

(c) Montrer que A est fermé si et seulement si $\mathbf{Fr}(A) \subset A$.

(d) Montrer que A est à la fois ouvert et fermé si et seulement si $\mathbf{Fr}(A) = \varnothing$.

(e) Montrer que $\mathbf{Fr}(\mathbf{Adh}\, A) \subset \mathbf{Fr}(A)$ et $\mathbf{Fr}(\mathbf{Int}\, A) \subset \mathbf{Fr}(A)$. Donner un exemple dans $\mathbb{R}$ où ces trois ensembles sont distincts.

34. Pour chacune des parties de $\mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer : $\mathbf{Adh}\, A_i, \mathbf{Int}\, A_i$, $\mathbf{Fr}\, A_i$, Is A_i (points isolés) et A_i' (points d'accumulations)

$A_1 = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup \{4, 7\}$, $A_2 = \mathbb{Z}, A_3 = \mathbb{Q}, A_4 = \{(-1)^k + 1/2^k : k \in \mathbb{N}\}$

35. (a) Montrer que si $A_1, \dots, A_n$ sont des sous-ensembles de X, alors

$$\mathbf{Int}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} \mathbf{Int}\, A_k$$

(b) Montrer que (a) n'est pas vraie pour des intersections infini.

36. Soit A une partie d'un espace métrique X. Montrer que les propositions suivantes son équivalentes :

(a) x est un point d'accumulation de A.

(b) Tout voisinage V de x contient une infinité de points de A

(c) $x \in \mathbf{Adh}(A - \{x\})$.

37. Si pour $k = 1, 2$, A_k est un sous-ensemble dense de l'espace métrique (X_k, d_k), montrer que $A_1 \times A_2$ est dense dans $X_1 \times X_2$. Donc le produit d'un nombre fini d'espace séparables est séparable.

38. Monter qu'un ouvert d'un espace métrique est ouvert si et seulement si c'est une union de boules ouvertes.

39. Si A est une partie de l'espace métrique X, montrer que

$$\mathbf{Int}\, A = \{x : \operatorname{dist}(x, A^c) > 0\}.$$

Pouvez-vous donner une caractérisation analogue de $\mathbf{Fr}\, A$?

40. (a) Si $A \subseteq X$, montrer que $x \in \mathbf{Adh}\, A$ si et seulement si x est soit un point d'accumulation de A ou un point isolé de A.

(b) Montrer que si une partie de X n'a pas de points d'accumulation, elle est fermée.

(c) Donner un exemple d'une partie infinie de $\mathbb{R}$ qui n'a pas de points d'accumulation.

41. Montrer que $x \in \mathbf{Adh}\, A$ si et seulement si il existe une suite (x_n) de points de A, tel que $x_n \to x$.

42. Soient A et B de parties bornées d'un espace métrique X.

(a) Monter que $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\mathbf{Adh}\, A)$.

(b) Monter que $\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(A, B)$.

3. Continuité sur les espaces métriques

Le concept de continuité d'une fonction est l'un des concepts fondamentaux en analyse. Nous allons étendre ce concept des fonction numériques $f : X \to \mathbb{R}$ vu dans le cours d'analyse élémentaire aux fonctions entre deux espaces métriques $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$. La définition de la continuité des fonctions d'une variable réelle est en effet un cas très spéciale de la continuité sur les espaces métriques. On établira que les ouverts (fermés) des espaces métriques vus dans le chapitre précédent jouent un grand rôle primordiale dans la continuité des fonctions entres ces espaces métriques. On verra que sur certains espaces métriques toute fonction est continue.

3.1 Continuité ponctuelle, séquentielle et globale

La **continuité ponctuelle** est la continuité en un point du domaine de f. Si $X \subseteq \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$ alors $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction numérique. La définition de la continuité ponctuelle pour les fonctions numériques d'une seule variable vue en analyse élémentaire, est donnée par la définition suivante.

Définition 3.1. On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction **continue** au point $a \in X$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - a| < \delta$, alors $|f(a) - f(x)| < \epsilon$.

La généralisation de la continuité ponctuelle entre espaces métriques arbitraires est donnée par la définition suivante.

Définition 3.2. On dit que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue au point $a \in X$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $d_X(x, a) < \delta$, alors $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Proposition 3.3. *Soit $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ et $a \in X$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est continue au point $a \in X$.*

(2) *Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $d_X(x, a) < \delta$, alors $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$.*

(3) *Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(B_{d_X}(a, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(a), \epsilon)$.*

(4) *Pour tout voisinage V de $f(a)$ il existe un voisinage U de a tel que $f(U) \subseteq V$.*

Définition 3.4. On dit que f est **séquentiellement continue** en a si pour toute suite (x_n) de X telle que $x_n \to a$ alors la suite $(f(x_n))$ est telle que $f(x_n) \to f(a)$.

Le résultat suivant montre que sur les espaces métriques, la continuité séquentielle est équivalente à la continuité ponctuelle.

Proposition 3.5. *$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue en $x = a$ si et seulement si lorsque $x_n \to a$ dans X, alors $f(x_n) \to f(a)$ dans Y.*

Démonstration. Supposons que f est continue en $x = a$ et $x_n \to a$ dans X. Puisque f est continue en $x = a$ alors pour $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $d_X(x, a) < \delta$ alors $d_Y(f(a), f(x)) < \epsilon$. Puisque $x_n \to a$, soit $N \geq 1$ tel que $d_X(x_n, a) < \delta$ quand $n > N$. Donc, $d_Y(f(x_n), f(a) < \epsilon$ quand $n \geq N$. Puisque ϵ est arbitraire, il s'en suit que $f(x_n) \to f(a)$.

Pour montrer la réciproque, supposons que f n'est **pas** continue en $x = a$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$ il existe au mois un x_n avec $d_X(x_n, a) < \dfrac{1}{n}$, mais $d_Y(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$. Cela veut dire que $x_n \to a$, mais $\{f(x_n)\}$ n'est pas convergente vers $f(a)$. ■

Nous n'allons pas passer beaucoup de temps à étudier les fonctions continues à un seul point, mais nous aurons beaucoup à dire sur les fonctions continues sur l'espace métrique entier c.ad. **continuité globale**.

Définition 3.6. $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est dite continue sur X, si elle est continue en tout point x de X.

Proposition 3.7. *Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est continue sur X.*

(2) *Si O est un ouvert de (Y, d_Y), alors $f^{-1}(O)$ est un ouvert de (X, d_X).*

(3) *Si F est un fermé de (Y, d_Y), alors $f^{-1}(F)$ est un fermé de (X, d_X).*

Démonstration. (2) $\Longleftrightarrow$ (3) parce que

$$f^{-1}(Y - O) = X - f^{-1}(O) \text{ et } f^{-1}(Y - F) = X - f^{-1}(F).$$

(1) $\Longrightarrow$ (2). Soit $a \in f^{-1}(O)$ alors $f(a) \in O$, et puisque O est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que la boule ouverte $B_{d_Y}(f(a), \epsilon) \subset O$ qui entraine que $f^{-1}(B_{d_Y}(f(a), \epsilon)) \subset f^{-1}(O)$.
D'autre part puisque f est continue, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(B_{d_X}(a, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(a), \epsilon)$, qui entraine que $B_{d_X}(a, \delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(a), \epsilon))$. En d'autres termes,

$$B_{d_X}(a; \delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(a), \epsilon)) \subset f^{-1}(O).$$

Donc $f^{-1}(O)$ est ouvert.
(2) $\Longrightarrow$ (1). Si $a \in X$ et $\epsilon > 0$, alors $B_{d_Y}(f(a), \epsilon)$ est un ouvert dans (Y, d_Y) ; donc par (2) on a que $f^{-1}(B_{d_Y}(f(a); \epsilon))$ est un ouvert dans (X, d_X) qui contient a. Ce qui montre qu'il

existe $\delta > 0$ tel que $B_{d_X}(a,\delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(a),\epsilon)) \Rightarrow f(B_{d_X}(a,\delta)) \subset B_{d_Y}(f(a),\epsilon)$ et donc f est continue au point a d'après proposition (3.3) . ■

Exemple 3.8.

(1) La fonction constante $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = c \in \mathbb{R}$ est continue.
On a seulement deux cas. Si $c \in U$ alors $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$ sinon $f^{-1}(U) = \varnothing$ et les deux des ouverts de $\mathbb{R}$.

(2) La fonction identité $(X, d_X) \longrightarrow (X, d_X)$ définie par $f(x) = x \in X$ est continue.
Si U est un ouvert de X alors $f^{-1}(U) = U$ est évidement un ouvert de X.

(3) Si (X,δ) est un espace métrique discret et (Y, d_Y) est un espace métrique quelconque alors tout fonction $f : (X,\delta) \to (Y, d_Y)$ est continue.
On a vu que toute partie de (X,δ) est ouverte et puisque si U est un ouvert de Y, $f^{-1}(U)$ est une partie de (X,δ) alors $f^{-1}(U)$ est ouvert dans (X,δ).

(4) Si (X,δ) est un espace métrique discret, les seules fonctions $f : (\mathbb{R}, d) \to (X,\delta)$ continues sont les fonctions constantes.
Tout singleton $\{x\}$ de (X,δ) est ouvert donc si f est $f^{-1}\{x\}$ est ouvert dans $(\mathbb{R}, d)$ donc doit être un intervalle (a,b). Cela entraine que l'image de tout intervalle est un singleton. Donc $f(\mathbb{R}) = \{c\}$.

(5) (X,d) est un espace métrique, $a \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x, x_0)$, alors f est continue et $|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$.

Attention. Soit $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ une fonction continue.
Si U est un ouvert de X alors $f(U)$ n'est pas nécessairement ouvert dans Y.
Si F est un fermé de X alors $f(F)$ n'est pas nécessairement fermé dans Y.
Autrement dit, l'image continue d'un ouvert (fermé) n'est pas nécessairement un ouvert (fermé).

(1) Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, si U est un ouvert de $\mathbb{R}$ on a $f(U) = \{0\}$ qui n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.

(2) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

(3) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Exemple 3.9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = x$, si $x \neq 0$. Évidement cette fonction n'est pas globalement continue dans $\mathbb{R}$. Pour le montrer on doit trouver un ouvert O de $\mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(O)$ n'est pas ouvert. Soit $O = (1/2, 2)$ alors $f^{-1}(O) = (1/2, 2) \cup \{0\}$ qui n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.10. Soit $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$, alors on dit que :

(1) f est une **application ouverte** si l'image directe de tout ouvert de X est un ouvert dans Y. Si $U \subseteq X$ est ouvert alors, $f(U)$ est ouvert dans Y,

(2) f est une **application fermée** si l'image directe de tout fermé de X est un fermé dans Y. Si $F \subseteq X$ est fermé alors, $f(F)$ est ouvert dans Y.

Exemple 3.11.

(1) **Application ouverte mais pas fermée :** Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$ est ouverte car $f((a,b)) = (e^a, e^b)$. Si U est ouvert alors $f(U)$ est ouvert dans $(0,\infty)$ et puisque $(0,\infty)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$, alors $f(U)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$. Cependant $f(\mathbb{R}) = (0,\infty)$ n'est pas fermé donc f n'est pas fermée. Donc $f(x) = e^x$ est une application continue, ouverte mais elle n'est pas fermée.

(2) **Application fermée mais pas ouverte :** Considérons la fonction constante $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = c \in \mathbb{R}$. Si F est fermé dans $\mathbb{R}$ alors $g(F) = \{c\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ aussi. Cependant si U est ouvert alors $g(U) = \{c\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$. Donc $g(x) = c$ est une application continue et fermée mais n'est pas ouverte.

(3) **Application ni ouverte ni fermée :** Considérons la fonction constante $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On a $h(\mathbb{R}) = (0, 1]$, donc h est une application continue mais n'est ni fermée ni ouverte.

(4) **Application ouverte et fermée :** Considérons la fonction constante $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $k(x) = Id_{\mathbb{R}}(x) = x$. On a $h(U) = U$ pour tout $U \subseteq \mathbb{R}$. Donc h est une application continue ouverte et fermée.

(5) **Application ouverte mais non continue :** Considérons la fonction $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{Z}, \delta)$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Toute partie de $(\mathbb{Z}, \delta)$ est ouverte, alors f est ouverte. Cependant $f^{-1}(\{0\}) = [0, 1)$ qui n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R}, d)$.

Remarque. Une application directe de la proposition 3.7 nous donne :

$$f \text{ est continiue} \Leftrightarrow f^{-1} \text{ est ouverte} \Leftrightarrow f^{-1} \text{ est fermée}$$

Proposition 3.12. *Soit $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ une application bijective. Alors, f est ouverte si et seulement si f est fermée.*

Démonstration. Si f est ouverte et $F \subset X$ est fermé, alors $F = X - O$ ou $O \subset X$ est ouvert et $f(F) = f(X) - f(O) = Y - f(O)$ qui est fermé dans Y. Même argument pour la réciproque. ■

Le théorème suivant donne les différentes caractérisations de continuité sur les espaces métriques. Les trois premières ont été démontrées dans la proposition précédente et le reste est laissé comme exercices.

Théorème 3.13. *Soient X, Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est continue.*

(2) *Pour tout voisinage V de $f(x)$ il existe un voisinage U de x tel que $f(U) \subseteq V$.*

(3) *$f^{-1}(O)$ est ouvert dans X pour tout ouvert O de Y.*

(4) *$f^{-1}(F)$ est fermé dans X pour tout fermé F de Y.*

(5) *$f(\mathbf{Adh}\,A) \subseteq \mathbf{Adh}[f(A)]$ pour toute partie A de X.*

(6) *$f^{-1}(\mathbf{Int}\,B) \subseteq \mathbf{Int}\,f^{-1}(B)$ pour toute partie B de Y.*

(7) *$\mathbf{Adh}\,f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\mathbf{Adh}\,B)$ pour toute partie B de Y.*

Proposition 3.14. *Si (X,d) est espace métrique et $A \subseteq X$, alors pour tout $x, y \in X$,*

$$|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \leq d(x,y).$$

Démonstration. Si $a \in A$, alors $d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$.
Ainsi, en prenant le infimum pour tout a dans A nous obtenons

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(x,A) &\leq \inf\{d(x,y)+d(y,a) : a \in A\} \\ &\leq d(x,y) + \operatorname{dist}(y,A) \text{ donc} \\ d(x,y) &\geq \operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A) \end{aligned}$$

En inversant les rôles de x et y nous obtenons

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(y,A) &\leq \inf\{d(y,x)+d(y,a) : a \in A\} \\ &\leq d(x,y) + \operatorname{dist}(x,A) \text{ donc} \\ -d(x,y) &\leq \operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A) \end{aligned}$$

d'où nous obtenons l'inégalité $|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \leq d(x,y)$. ∎

Corollaire 3.15. *Soit $A \subset X$, alors $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \operatorname{dist}(x,A)$ est une fonction continue.*

Maintenant, on combine des fonctions continues pour générer des exemples de nouvelles fonctions continues. Nous supposerons que le lecteur est déjà familier avec la continuité des différentes fonctions rencontrée dans le cours d'analyse élémentaire.
Nous avons le résultat suivant, qui est une extension des résultats vus dans le cours d'analyse pour les fonctions numériques. La démonstration peut se faire facilement en utilisant proposition 3.5.

Proposition 3.16. *Si (X,d) est espace métrique et $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, alors les fonctions suivantes sont aussi continues ;*
(a) $f+g$, (b) $f \cdot g$, (c) $|f|$, (d) $\left(\frac{f}{g}\right)$, si $g \neq 0$.

La dernière proposition est un moyen de combiner des fonctions continues pour obtenir une autre fonction continue. Un autre moyen est d'utiliser la composition de fonction.

Proposition 3.17. *Si $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$, $g : (Y,d_Y) \to (Z,d_Z)$ sont des fonctions continues, alors la composée $g \circ f : (X,d_X) \to (Z,d_Z)$ définie par $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ est aussi continue.*

Démonstration. Soit U un ouvert de Z, alors

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}[g^{-1}(U)].$$

Puisque g est continue $g^{-1}(U)$ est ouvert dans Y. De même f est continue $f^{-1}[g^{-1}(U)]$ est ouvert dans X. Ce qui montre que $(g \circ f)$ est continue. ∎

Proposition 3.18. *Soit (X,d_X) un espace métrique et $A \subset X$. Alors l'injection canonique $i : (A,d_A) \hookrightarrow (X,d_X)$ définie par $i(a) = a$ pour $a \in A$, est continue. De plus i est ouverte (fermée) si et seulement si A est ouvert (fermé).*

Démonstration. Soit O un ouvert de X, alors $i^{-1}(O) = O \cap A$ qui est ouvert dans (A,d_A) donc i est continue. Soit i ouverte et U un ouvert de A alors $i(U) = U = O \cap A$ est ouvert dans X si et seulement si A est ouvert dans X. ∎

Proposition 3.19. *Soient $f : (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ une application continue, $A \subset X$ et $f(X) \subseteq B \subseteq Y$. Alors les restriction suivantes sont continues.*

(1) *$g = f|_A : (A,d_A) \to (Y,d_Y)$.*

(2) *$h = f|^B : (X,d_X) \to (B,d_B)$.*

(3) *$k = f|^{f(X)} : (X,d_X) \to (f(X),d_{f(X)})$.*

Démonstration.

(1) $g = f|_A = f \circ i$ où i est l'injection canonique de A dans X, $i : A \hookrightarrow X$. g est la composée de deux fonctions continues, donc g est continue.

(2) $h = i \circ f$ où i est l'injection canonique de $f(X)$ dans B, $i : f(X) \hookrightarrow B$. g est la composée de deux fonctions continues, donc h est continue.

(3) Cas spécial où $B = f(X)$.

∎

Attention. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
La fonction f est discontinue en tout point $x \in \mathbb{R}$. Mais, la restriction $f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ est une fonction constante égale à 0, est donc continue. Donc le fait que f n'est pas continue n'implique pas que la restriction de f n'est pas continue aussi.

Proposition 3.20. *Soient (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques et $Z = X \times Y$ muni de la distance produit. Alors, les projections $p_X : X \times Y \to X$ et $p_Y : X \times Y \to Y$ définies par $p_X(x,y) = x$ et $p_Y(x,y) = y$ sont continues et ouvertes.*

Démonstration. Soit U un ouvert de X, alors $p_X^{-1}(U) = U \times Y$ qui est ouvert dans $X \times Y$. Si U un ouvert de X et V est un ouvert de Y alors $p_X(U \times V) = U$ est un ouvert dans X, donc p_X est une application ouverte. Même chose pour p_Y. ■

Proposition 3.21. *Soit (A, d_A) un sous-espace métrique de (X, d_Y), et soit $i : A \hookrightarrow X$ l'injection canonique. Supposons que $g : (Z, d_Z) \to (A, d_A)$ est une fonction. Alors, g est continue si et seulement si $i \circ g : (Z, d_Z) \to (X, d_X)$ est continue.*

Démonstration.
($\Rightarrow$) Si g est continue alors $i \circ g$ est continue car c'est la composée de deux fonctions continues.
($\Leftarrow$) Supposons que $i \circ g$ est continue. Si V est ouvert de A alors $V = U \cap A$ où U est un ouvert de X. Alors

$$g^{-1}(V) = g^{-1}(U \cap A) = g^{-1}(i^{-1}(U)) = (i \circ g)^{-1}(U)$$

qui est ouvert dans Z par continuité de $i \circ g$. Donc g est continue. ■

Théorème 3.22. *Soient X, Y et W des espaces métriques. Alors, $f : W \to X \times Y$ est continue si et seulement si $p_X \circ f : W \to X$ et $p_Y \circ f : W \to Y$ sont continues.*

Démonstration. Si f est continue, alors $p_X \circ f$ et $p_Y \circ f$ sont continues étant les composées de fonctions continues.
Suppose que $p_X \circ f$ et $p_Y \circ f$ sont continues. On doit montrer que l'image réciproque de tout ouvert de $X \times Y$ est un ouvert de W. Si U, V sont de ouverts de X, Y respectivement, alors $U \times V$ est un ouvert de $X \times Y$. En outre

$$U \times V = (U \times X) \cap (V \times Y) = p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V).$$

Alors,

$$f^{-1}(U \times V) = (f^{-1}p_X^{-1}(U)) \cap (f^{-1}p_Y^{-1}(V)) = (p_X \circ f)^{-1}(U) \cap (p_X \circ f)^{-1}(U)$$

qui est un ouvert étant l'intersection de deux ouverts, car $p_X \circ f$ et $p_Y \circ f$ sont continues. Donc f est continue. ■

Corollaire 3.23. *Soit X un espace métrique et $\Delta : X \to X \times X$ définie par $\Delta(x) = (x, x)$. Alors, Δ est continue.*

Démonstration. $(p_X \circ \Delta)(x) = p_X(x, x) = x = 1_X(x)$ qui est continue et $(p_Y \circ \Delta)(x) = p_X(x, x) = x = 1_X(x)$ qui est continue. Donc par théorème 3.22 Δ est continue. ■

Proposition 3.24. *Soient X et Y des espaces métriques et $x_0 \in X, y_0 \in Y$.*

Si $i_{x_0} : Y \to X \times Y$ est définie par $i_{x_0}(y) = (x_0, y)$, alors i_{x_0} est continue.
Si $i_{y_0} : X \to X \times Y$ est définie par $i_{y_0}(x) = (x, y_0)$, alors i_{y_0} est continue.

Démonstration. $(p_X \circ i_{y_0})(x) = p_X(x, y_0) = x = 1_X(x)$ qui est continue et $(p_Y \circ i_{y_0})(x) = p_X(x, y_0) = y_0$ est constante qui est continue. Donc par théorème 3.22 i_{y_0} est continue. ■

Proposition 3.25. *Soient X, Y et W des espaces métriques et $f : X \times Y \to W$ continue. Alors, pour tout $x_0 \in X, y_0 \in Y$ les applications $y \mapsto f(x_0, y)$ et $x \mapsto f(x, y_0)$ sont continues.*

Attention ! La réciproque est fausse. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

les applications partielles $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ sont continues mais f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exemple 3.26.

(1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (3x^2 + 5y^3, 7xy)$. Alors f est continue.

En utilisant théorème 3.22 il suffit de montrer que les projections $g(x, y) = 3x^2 + 5y^3$ et $h(x, y) = 7xy$ sont continues. $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont des projections donc continues. Donc $h(x, y) = 7xy$ est continue étant le produit de fonctions continues. De même $3x^2$ et $5y^3$ sont continues étant le produit de fonctions continues. Finalement $g(x, y)$ est continue étant la somme de fonctions continues.

(2) La fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $(x, y) \mapsto x + y$ (addition de deux vecteurs) est continue. INDICATION: *Utiliser théorème 3.22.*

(3) La fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $(t, x) \mapsto tx$ (multiplication par un scalaire) est continue. INDICATION: *Utiliser proposition 3.5.*

Proposition 3.27. *Soit (X, d_X) un espace métrique alors la diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times X$.*

Démonstration. On veut montrer que $X \times X \setminus \Delta$ est ouvert. Soit $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$ alors $x \neq y$. Puisque X est séparé alors ils existent des ouverts U, V de X tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \varnothing$. Posons $W = U \times V$, alors W est un ouvert de $X \times X$, $(x, y) \in W$ et $W \subseteq X \times X \setminus \Delta$ donc $X \times X \setminus \Delta$ est ouvert. ■

Proposition 3.28. *Si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue, alors le graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.*

Proposition 3.29. *Si $f, g : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ sont des applications continues, alors l'ensemble $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.*

Maintenant on utilise corollaire 3.15 pour montrer un très fameux résultat.

Lemme 3.30 (Lemme de Urysohn). *Si A et B sont deux sous-ensembles disjoints et fermés de X, alors il existe une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes :*

(a) $0 \leq f(x) \leq 1$ *pour tout* x *dans* X

(b) $f(x) = 0$ *pour tout* x *dans* A

(c) $f(x) = 1$ *pour tout* x *dans* B

Démonstration. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, A)}{\operatorname{dist}(x, A) + \operatorname{dist}(x, B)}$$

cette fonction est bien définie et satisfait les propriétés voulues. ■

Corollaire 3.31. *Si* F *un fermé de* X *et* G *est un ouvert de* X *tels que* $F \subset G$*, alors il existe une fonction continue* $f : X \to \mathbb{R}$ *telle que :*

(a) $0 \leq f(x) \leq 1$ *pour tout* x *dans* X*,*

(b) $f(x) = 1$ *pour tout* $x \in F$*,*

(c) $f(x) = 0$ *pour tout* $x \notin G$*.*

Démonstration. Utilisons le lemme de Urysohn avec $A = X - G$ et $B = F$. ■

3.2 Homéomorphisme

Rappelons que si une fonction $f : X \to Y$ est bijective, son inverse f^{-1} est une fonction $f^{-1} : Y \to X$ bijective aussi. On a que $(f \circ f^{-1})(y) = y$ pour tout $y \in Y$ et $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ pour $x \in X$.

Définition 3.32. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques, et $f : X \to Y$. On dit que f est un **homéomorphisme** de X sur Y si

(1) f est bijective,

(2) f est continue de X sur Y,

(3) f^{-1} est continue de Y sur X

S'il existe un homéomorphisme de X sur Y, on dit que X et Y sont **homéomorphes** ou bien **topologiquement équivalents** et on le note par $X \cong Y$.
Toute propriété **conservée** par un homéomorphisme est dite **propriété topologique**.

Exemple 3.33.

(1) Soit $X = (0, 1)$ et $Y = (a, b)$ avec $a < b$ munis de la distance usuelle. La fonction $f : (0, 1) \to (a, b)$ définie par la fonction linéaire $f(x) = a + (b - a)x$ est un homéomorphisme. La fonction réciproque est $f^{-1} : (a, b) \to (0, 1)$ définie par la fonction linéaire $f^{-1}(x) = (y - a)/(b - a)$. Donc $(0, 1)$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.

(2) Soit $X = (a, b)$ avec $a < b$ et $Y = \mathbb{R}$ munis de la distance usuelle sont homéomorphes. La fonction $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ définie par la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x - a} + \dfrac{1}{x - b}$ est un homéomorphisme.

(3) Soit (X, d_X) un espace métrique quelconque, alors la fonction identité $\mathrm{Id}_X : X \to X$ définie par $\mathrm{Id}_X(x) = x$ pour tout $x \in X$ est un homéomorphisme.

(4) La fonction $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ définie par $f(x) = x^2$ est un bijection continue et sa bijection réciproque est $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Donc f est un homéomorphisme.

(5) La fonction $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ définie par $f(x) = e^x$ est un bijection continue et sa bijection réciproque est $f^{-1}(x) = \ln x$. On a vue que $f(x) = e^x$ est une application ouverte mais elle n'est pas fermée.

Remarques :

(1) La relation "homéomorple" est une relation d'équivalence.

(2) Si f est un homéomorphisme, l'image réciproque et l'image directe de tout ouvert est un ouvert.

(3) Si f est un homéomorphisme, l'image réciproque et l'image directe de tout fermé est un fermé.

(4) Les application f et f^{-1} sont ouvertes et fermées.

(5) Un homéomorphisme établit une bijection entre les ouverts (resp. fermés) de X et ceux de Y.

(6) Une suite $x_n \to x$ dans X si et seulement si et seulement si $f(x_n) \to f(x)$ dans Y.

(7) Puisque $(0, 1) \simeq \mathbb{R}$ alors la bornitude n'est pas une propriété topologique.

(8) Puisque $(0, \infty) \simeq \mathbb{R}$ alors la fermeture n'est pas une propriété topologique.

Attention ! Il est important de noter, cependant, que la continuité de f et l'existence de l'inverse ne sont pas suffisantes pour conclure que f est un homéomorphisme. La continuité de la fonction inverse est quelque chose qui doit être vérifié séparément. Il est entièrement possible pour qu'une fonction soit continue et bijective, mais d'avoir un inverse discontinue. En voici deux exemples.

Exemple 3.34. $f : [0, 1] \cup (2, 3] \to [0, 2]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

I est facile de vérifier que f est continue et bijective sur son domaine. Cependant

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & 0 \leq y \leq 1 \\ y + 1 & 1 < y \leq 2 \end{cases}$$

n'est pas continue quand $y = 1$.

Exemple 3.35. Soit l'identité $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Alors, $f(x) = \mathrm{Id}(x) = x$ est continue et bijective, mais f^{-1} n'est pas continue. Considérons $A = \{x\}$ qui est ouvert dans $(\mathbb{R}, \delta)$, mais $(f^{-1})(A) = A$ n'est pas ouvert dans $(\mathbb{R}, d_1)$.

Proposition 3.36. *$\mathbb{R}$ est homéomorphe à $(-1, 1)$.*

Démonstration. La fonction $\phi(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est bijective et continue de $\mathbb{R}$ sur $(-1, 1)$. Puisque $\phi^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ on voit que ϕ^{-1} est continue de $(-1, 1)$ sur $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $(-1, 1)$. ∎

Remarque. Puisque $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $(-1, 1)$, alors la bornitude (le fait qu'un espace est borné) **n'est pas** une propriété topologique.

Corollaire 3.37.
(a) $\mathbb{R}$ est homéomorphe à (a, b), où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
(b) (a, b) est homéomorphe à (c, d), où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $a < b, c < d$.

Proposition 3.38. *Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des homéomorphismes alors $(g \circ f)$ l'est aussi.*

Proposition 3.39. *Soit $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ une bijection. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est un homéomorphisme.*
(2) *f est une application continue et ouverte.*
(3) *f est une application continue et fermée.*
(4) *f^{-1} est une application continue et ouverte.*
(5) *f^{-1} est une application continue et fermée.*
(6) *f^{-1} est un homéomorphisme.*
(7) *$f(\mathbf{Adh}\, A) = \mathbf{Adh}[f(A)]$.*

Démonstration.
(1) ⇔ (2) $f^{-1} : Y \to X$ est continue est équivalent à dire que pour tout ouvert $U \subset X$ on a $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ est ouvert.

(2) ⇔ (3) Puisque f est une bijection on applique proposition (3.12).

(2) ⇔ (4) f continue est équivalent à l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X. Mais cela est exactement la définition de f^{-1} ouverte.

(4) ⇔ (5) Puisque f est une bijection on applique proposition (3.12).

(1) ⇔ (6) évident.

(1) ⇔ (7) La continuité de f entraine que $f(\mathbf{Adh}\, A) \subset \mathbf{Adh}[f(A)]$. Puisque f est fermée alors $f(\mathbf{Adh}\, A)$ est fermé et $f(A) \subset f(\mathbf{Adh}\, A)$. De plus on a que on a $\mathbf{Adh}[f(A)]$ est le plus petit fermé contenant $f(A)$ donc $f(A) \subset \mathbf{Adh}[f(A)] \subset f(\mathbf{Adh}\, A)$. ∎

Proposition 3.40. *Si $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle et si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone, alors I et $f(I)$ sont homéomorphes.*

Démonstration. On fait la démonstration dans le cas ou $I = (a, b)$. Puisque f est strictement monotone alors f est injective donc $f : I \to f(I)$ est une bijection continue. Puisque f est ouverte alors $f(I) = (c, d)$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Mais $I = (a, b)$ est homéomorphe à $f(I) = (c, d)$. ∎

Remarque : La proposition reste vraie si $I = \mathbb{R}$.

Proposition 3.41. *Supposons que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est une application continue et soit $\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ le graphe de f. Alors, $g : X \to X \times Y$ définie par $g(x) = (x, f(x))$ est un homéomorphisme entre X et Γ_f.*

Démonstration. Soit $h : \Gamma_f \to X$ la fonction définie par $h(x, f(x)) = x$. h est une restriction de la projection $p_X : X \times Y \to X$ sur Γ_f qui est continue donc h est continue. De plus notons que :

$$(g \circ h)(x, (f(x)) = g[h(x, f(x))] = g(x) = (x, f(x))$$

et

$$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h[(x, f(x))] = x$$

qui donne que $(g \circ h) = 1_{\Gamma_f}$ et $(h \circ g) = 1_X$ donc $g = h^{-1}$ et $h = g^{-1}$. Cela entraine que g un homéomorphisme entre X et Γ_f. ∎

Exemple 3.42. $\mathbb{R}$ et $A = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ sont homéomorphes car A est le graphe de la fonction $f(x) = x^2$.

Proposition 3.43. *Supposons que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est un homéomorphisme et $A \subset X$ tel que $f(A) = B$. Alors les restrictions, $g = f|_A : A \to B$ et $h = f|_{X \setminus A} : X \setminus A \to Y \setminus B$ sont aussi des homéomorphismes.*

Démonstration. La démonstration est laissée au lecteur comme exercice. ∎

3.3 Métriques équivalentes

Définition 3.44. Soient d et d' deux métriques de X.

(1) On dit que d et d' sont **topologiquement équivalentes** si l'identité $Id : (X, d) \to (X, d')$ est un homéomorphisme. Il est donc indifférent, topologiquement parlant, de travailler avec l'une ou l'autre des distances. En particulier, deux distances sont topologiquement équivalentes si et seulement si toute suite convergente pour une distance est convergente vers la même limite pour l'autre distance.

(2) On dit que les distances d et d' sont **Lipschitz-équivalentes** s'ils existent des constantes positives h, k tel que pour tout $x, y \in X$,

$$hd'(x, y) \leq d(x, y) \leq kd'(x, y).$$

(3) Si X est un espace vectoriel, on dit que les normes N et N' sont **deux normes équivalentes** s'ils existent des constantes $h, k > 0$ tel que pour tout $x \in X$,

$$hN'(x) \leq N(x) \leq kN'(x).$$

Définition 3.45. Une application $g : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+$ est dite sous-additive si pour tout $x, y \in \mathbb{R}+$ on a :

$$g(x + y) \leq g(x) + g(y)$$

Exemple 3.46.

(a) $g(x) = |x|$

(b) $g(x) = |\sin x|$

(c) $g(x) = ax + b, b > 0$

(d) $g(x) = \arctan(|x|)$

(e) $g(x) = \ln(1 + x), x \geq 0$

(f) $g(x) = \dfrac{x}{1+x}, x \geq 0$

Proposition 3.47. *Si (X, d) est un espace métrique et $g : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+$ est une fonction positive, croissante et concave, alors $f(|x|)$ est sous-additive.*

Proposition 3.48. *Si (X, d) est un espace métrique et $g : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+$ est une fonction croissante, sous-additive et ne s'annulant qu'en 0, alors $(g \circ d)$ est une distance sur X.*

Corollaire 3.49. *Si (X, d) est un espace métrique alors*

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

est une distance équivalente à d sur X et $d'(x, y) < 1$.

Démonstration. Considérons la fonction $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$ pour $x \geq 0$. La fonction g possède l'hypothèse de la proposition précédente. Donc $d'(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ est une métrique sur X. Pour l'équivalence des métriques on note que $d(x, y) = \dfrac{d'(x, y)}{1 - d'(x, y)}$, donc $d(x_n, x) \to 0$ si et seulement si $d'(x_n, x) \to 0$. ∎

Proposition 3.50.

(1) *Les métriques Lipschitz-équivalentes sont topologiquement équivalentes*

(2) *Deux normes sont équivalentes si et seulement si leurs distances correspondantes sont équivalentes.*

(3) *Si d et d' sont équivalentes, alors (X, d) et (X, d') ont la même topologie.*

Exemple 3.51.

(1) Dans $X = \mathbb{R}^2$ on a

$$\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \leq 2\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|$$

donc d_1 et d_∞ sont equivalentes sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Généralement si $X = \mathbb{R}^n$ et d_1, d_2, d_∞ sont les distances définies dans l'exemple 2.5 alors

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq nd_\infty(x, y)$$

Donc d_1, d_2, d_∞ sont des métriques equivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

(3) Si $X = \mathbb{R}^n$ alors la distance Euclidienne d_2 et la distance discrète δ ne sont pas equivalentes.

(4) Si (X, d) est un espace métrique et $d'(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ alors d et d' sont équivalentes sur X.

3.4 Continuité uniforme

Définition 3.52. Soient (X, d) et (Y, d') deux espace métriques et $f : X \to Y$.

(a) On dit que f est **uniformément continue** si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $d'(f(x), f(a)) < \epsilon$ pour tout $x, a \in X$ tels que $d(x, a) < \delta$.

(b) On dit que f est k-lipschitzienne si et seulement si il existe $k > 0$ tel que pour tout $x, a \in X$, $d'(f(x), f(a)) < kd(x, a)$.

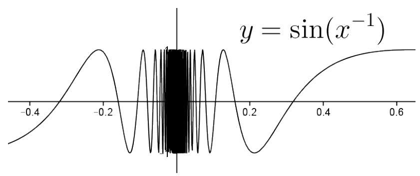
Remarques :

(1) Quelle est la différence entre continuité et continuité uniforme ?
Dans la définition de la continuité en un point x_0, le δ dépend de x_0. Dans la définition de la continuité uniforme, ce δ ne dépend plus de x_0. Il est le même quel que soit x_0 dans X. Cette uniformité fait des fonctions uniformément continues des fonctions plus souples d'utilisation que les fonctions continues.

(2) Toute fonction uniformément continue est continue, mais pas réciproquement.

Exemple 3.53. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est continue mais pas uniformément continue. En effet, pour tout $\delta > 0$, considérons $x = n \in \mathbb{N}$ et $y = n + \delta$. On aura $|f(x) - f(y)| = (n + \delta)^2 - n^2 = 2n\delta + \delta^2 > 2n\delta$, et cela peut être fait aussi grand que l'on veut, peu n'importe quelle petite valeur de δ.

Exemple 3.54. La fonction $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x^{-1})$ est continue mais n'est pas uniformément continue. Si $\delta > 0$, alors il existent des points $s, t \in (0, \delta)$ avec $f(s) = -1$ et $f(t) = 1$, de sorte que $|f(s) - f(t)| = 2$, même si $|s - t| < \delta$.



Proposition 3.55. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et à dérivée bornée avec $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in I$. Alors, f est M-lipschitzienne.*

Démonstration.

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(t)\ dt \right| \leq \int_y^x \left| f'(t) \right|\ dt \leq M|x - y|.$$

Donc f est M-lipschitzienne. ■

Proposition 3.56. *Toute fonction k-lipschitzienne est uniformément continue.*

On a donc ;

$$f \text{ lipschitzienne } \Longrightarrow f \text{ uniformément continue } \Longrightarrow f \text{ continue}$$

Exemple 3.57. Soit X un espace métrique, $A \subseteq X$ et $f : X \to \mathbb{R}+$ définie par $f(x) = \operatorname{dist}(x, A)$. On montrera dans les exercices que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$. Donc f est 1-lipschitzienne qui entraine qu'elle est uniformément continue.

3.5 Exercices

1. Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espace métriques et $f : X \to Y$. Montrer les assertions suivantes :

(a) f est continue en x_0 si et seulement si pour tout voisinage V de $f(x_0)$ il existe un voisinage V' de x_0, tel que $f(V') \subset V$.

(b) f est continue en x_0 si et seulement si pour tout voisinage V de $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0.

(c) La fonction $Id_X(x) = x$ est continue.

(d) Toute fonction constante de X dans Y est continue.

(e) La composée de deux fonctions continues est continue.

(f) Si (X, d_X) est discret alors f est continue.

(g) Si f est continue et $A \subset X$, alors la restriction $f_|A : A \to Y$ est continue. La réciproque est fausse.

2. Si (X, d) un espace métrique, $f : B(a; r) \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $x = a$ avec $f(a) = 0$, et $g : B(a; r) \to \mathbb{R}$ est fonction bornée (pas nécessairement continue), alors le produit fg est continue en $x = a$.

3. Soit X un espace métrique et $A \subset X$ est un voisinage de x_0, montrer que la restriction $f|_A : A \to Y$ est continue en x_0 si et seulement si f est continue en x_0.

4. Soit X un espace métrique et $f : X \to \mathbb{R}$, $A = (-\infty, a)$ et $B = (b, \infty)$. Montrer que f est continue si et seulement si $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$ sont des ouverts de X.

5. Soit $f : X \to Y$ une fonction continue et F est un ouvert de X. Montrer par un contre exemple que $f(F)$ n'est pas nécessairement un fermé de Y.

6. Soient X, Y deux espaces métriques, $A \subseteq X$ et $f : X \to Y$. Montrer que f est continue si et seulement si $f(\mathbf{Adh}\, A) \subseteq \mathbf{Adh}[f(A)]$

7. Soient X, Y deux espaces métriques, $A \subseteq X$ et $f : X \to Y$. Montrer que f est continue si et seulement si pour toute partie B de Y, $f^{-1}(\mathbf{Int}\, B) \subseteq \mathbf{Int}\, f^{-1}(B)$.

8. Montrer que la fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $(x, y) \mapsto x + y$ (addition de deux vecteurs) est continue.
INDICATION: *Utiliser proposition 3.5.*

9. Montrer que la fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $(t, x) \mapsto tx$ (multiplication par un scalaire) est continue.

10. Monter que si (X, d) est un espace métrique, $a \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = d(x, a)$, alors f est continue et $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$.

11. Monter que si (X, δ) est un espace métrique discret, les seules fonctions continues de $[0, 1]$ dans (X, δ) sont les fonctions constantes.

12. Montrer qu'une bijection $f : X \to Y$ est ouverte si et seulement si elle est fermée.

13. Montrer que la projection $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\pi_1(x_1, x_2) = x_1$ est continue, ouverte mais n'est pas fermée.

14. Soient $X = (\mathbb{R}, \delta), Y = (\mathbb{R}, d), f = \mathrm{Id}_X : X \to Y$ et $g = \mathrm{Id}_Y : Y \to X$. Montrer que :
(1) f est continue mais n'est ni ouverte ni fermée.
(2) g n'est pas continue mais elle est ouverte et fermée.
Noter que cela montre que la réciproque d'une fonction continue et bijective n'est pas nécessairement continue.

15. Montrer que la projection $p_X : (X \times Y, d_{X\times Y}) \to (X, d_X)$ définie par $p_X(x, y) = x$ est continue.

16. Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Pour $x \in X$; $d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

(a) Montrer que si $x, y \in X$ alors $|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \leq d(x, y)$.

(b) En déduire que la fonction $f(x) = d(x, A)$ est continue.

(c) Monter que $\mathbf{Adh}\, A = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$

(d) On suppose $x_0 \notin A$. Trouver deux ouverts U et V qui séparent x_0 et A c.a.d. tels que $x_0 \in U, A \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.

17. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Indication : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

18. Proposition (3.27). Montrer que si (X, d_X) un espace métrique alors la diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times X$.

19. Proposition (3.28). Montrer que si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue, alors le graphe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ est fermé dans $X \times Y$.

20. Proposition (3.29). Montrer que si $f, g : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ sont des applications continues, alors l'ensemble $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.

21. **(Théorème de catégorie de Baire)** Supposons que A, B sont des ouverts dense dans X. Montrer que $A \cap B$ est dense et ouvert dans X.

22. Soit (X, d) un espace métrique et $1_X : X \to X$ l'identité définie par $1_X(x) = x$ pour tout $x \in X$. Montrer que 1_X est un homéomorphisme.

23. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ continues. Montrer que si $g \circ f$ est un homéomorphisme et si f est surjective alors f et g sont des homéomorphismes.

24. Supposons que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est un homéomorphisme et $A \subset X$ tel que $f(A) = B$. Alors les restrictions, $g = f|_A : A \to B$ et $h = f|_{X\setminus A} : X \setminus A \to Y \setminus B$ sont aussi des homéomorphismes.

25. Soient $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$. Montrer que f est un homéomorphisme.

26. Montrer que $(-1, 1)$ et la parabole $y = x^2$ sont homéomorphes.

27. Montrer qu'un cercle et une ellipse sont homéomorphes.

28. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ continues. Montrer que si $(g \circ f)$ est un homéomorphisme et si f est surjective alors f et g sont des homéomorphismes.

29. Soient $f : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ définie par $f(x) = \tan^{-1}(x) = \arctan(x)$. Montrer que f est uniformément continue.

30. Montrer les propositions suivantes :

(a) Si f est uniformément continue alors f est continue.

(b) Si f et g sont uniformément continues alors $f \circ g$ est aussi.

(c) La fonction 1_X est uniformément continue

(d) Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue

31. Montrer les propositions suivantes :

(a) Deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes.

(b) Deux normes équivalentes induisent deux distances équivalentes.

(c) Deux distances sont topologiquement équivalentes si et seulement si toute suite convergente pour une distance est convergente vers la même limite pour l'autre distance.

32. Montrer que si $X = \mathbb{R}^n$ et d_1, d_2, d_∞ sont les distances définies dans l'exemple 2.5 alors

$$d_\infty(x, y) \leq d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n d_\infty(x, y)$$

33. Supposons que X est espace métrique qui possède deux distance d et d', tel que pour tout $x_1, x_2 \in X$ et il existe une constante positive k

$$d(x_1, x_2) \leq k d'(x_1, x_2)$$

(a) Monter que $B_d(x; r/k) \subseteq B_{d'}(x; r)$ pour tout $x \in X$ et $r > 0$.

(b) Déduire que tout d-ouvert est d'-ouvert.

4. Espaces métriques complets

4.1 Les Suites dans un espace métrique

Rappelons que tout au long du chapitre (X, d) est un espace métrique donné. Dans cette section, nous allons discuter les suites numériques comme une extension du même concept rencontré dans le cours d'analyse élémentaire.
Une suite (x_n) est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$: $n \mapsto x_n$.

Définition 4.1. Une suite $(x_n)_n$ dans $\mathbb{R}$ converge vers x si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre naturel N tel que si $n \geq N$, alors $|x_n - x| < \epsilon$.
On le note $x_n \to x$ ou bien $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

L'extension de cette définition sur un espace métrique (X, d) devient ;

Définition 4.2. Une suite $(x_n)_n$ dans X converge vers x si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre naturel N tel que si $n \geq N$, alors $d(x_n, x) < \epsilon$.

Remarques.

1. Nous signalons que la valeur de N dans la définition dépend de la valeur de ϵ. Le plus petit ϵ est, le plus grand N doit être.
2. Le fait que $d(x_n, x) < \epsilon$ pour $n \geq N$, veut dire la boule ouverte $B(x; \epsilon)$ contient $x_N, x_{N+1}, \ldots$. Donc cette boule contient une infinité des éléments de la suite (x_n). Il y a donc un nombre fini des éléments de la suite (x_n) a l'extérieur de la boule.

Proposition 4.3. *La limite d'une suite convergente dans un espace métrique est unique.*

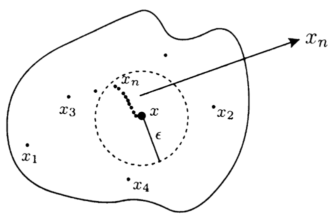


FIGURE 4.1: $B(x; \epsilon)$ contient une infinité des éléments de la suite (x_n)

Exemple 4.4.

(a) Soit $X = \mathbb{R}$, la suite $(1 + e^{-n})_n$ converge vers 1, c.a.d. $\lim_{n\to\infty}(1 + e^{-n}) = 1$.

(b) Soit (X, d) l'espace métrique discret, alors une suite (x_n) dans X converge vers x si et seulement s'il existe N tel que $x_n = x$ quand $n \geq N$.

(c) Si (Z, d) est le produit cartésien des deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y), alors la suite (x_n, y_n) de Z converge vers (x, y) si et seulement si $x_n \to x$ et $y_n \to y$.

La valeur des suites et le concept de convergence commence faire surface dans la proposition suivante. Cette proposition nous donne une nouvelle caractérisation d'une partie fermée et éventuellement l'adhérence d'une partie d'un espace métrique.

Proposition 4.5. *Le sous-ensemble F de X est fermé si et seulement toute suite (x_n) de F telle que $x_n \to x$, alors $x \in F$.*

Démonstration. Tout d'abord supposons que F est fermé, que (x_n) est une suite d'éléments de F, et $x_n \to x$. Si $x \notin F$, alors le fait $X \setminus F$ est ouvert signifierait qu'il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset X \setminus F$. Mais il y aurait alors un N de telle sorte que pour $n \geq N, d(x_n, x) < r$, c'est-à-dire $x_n \in B(x; r) \subset X \setminus F$, qui est une contradiction au fait que $\{x_n\} \in F$. Donc x doit être un élément de F.
Maintenant supposons que $x_n \to x$, où $x_n, x \in F$. On veut montrer que F est fermé. Si $x \in \mathbf{Adh}\, F$, alors selon la proposition 2.39, $B(x; r) \cap F \neq \varnothing$ pour chaque $r > 0$. En particulier, pour chaque n il existe $x_n \in B(x; n^{-1}) \cap F$. Donc (x_n) est une suite de F avec $d(x_n, x) < n^{-1}$, alors $x_n \to x$, et donc $x \in F$. Donc $\mathbf{Adh}\, F \subseteq F$ qui prouve que F est fermé. ∎

Définition 4.6. Soit (x_n) une suite dans X, alors une suite extraite (sous-suite) de (x_n) est une autre suite obtenue en ne prenant que certains éléments (une infinité) de la suite de départ. On la note $(x_{n_k}) = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\}$, où $n_1 < n_2 < \cdots$. Par exemple si (x_n) est une suite alors $(x_{n^2}) = \{x_1, x_4, x_9, \ldots\}$ est une sous-suite de (x_n).

Lemme 4.7. *Soit A une partie de l'espace métrique X, et x un point d'accumulation de A, alors il existe une suite de nombres positifs $\{\epsilon_n\}$ et une suite de point distincts $(a_n)_n$ dans A, tel que : (i) $\epsilon_n \leq n^{-1}$; (ii) $a_n \neq x$; (iii) $d(x, a_n) < \epsilon_n$.*

Théorème 4.8. *Soit A une partie de l'espace métrique X.*

(a) *Un point x est un point d'accumulation de A si et seulement s'il existe une suite de points dans A qui converge vers x.*

(b) $\mathbf{Adh}\, A = A \cup \{x : x$ *est un point d'accumulation de* $A\} = A \cup A'$.

(c) *A est fermé si et seulement si A contient tous ces points d'accumulations.*

Démonstration.

(a) Supposons que (a_n) est une suite de points distincts de A tel que $a_n \to x$. Si $\epsilon > 0$, alors il existe N tel que $a_n \in B(x;\epsilon)$ pour $n > N$. Puisque les points a_n sont distincts, il existe au moins un point différent de x. Donc x est un point d'accumulation. Maintenant supposons que x est un point d'accumulation de A. On utilise lemme 4.7, pour finir la démonstration de la partie (a).

(b) Soit $B = A \cup \{x : x$ est un point d'accumulation de$A\}$ selon proposition 4.5 on a que $B \subset \mathbf{Adh}\, A$. D'autre part si $x \in \mathbf{Adh}\, A$ selon proposition 4.5 il existe une suite $(a_n)_n$ dans A tel que $a_n \to x$. Si a_n contient un nombre infini de points distincts alors il existe une sous-suite (a_{n_k}) de termes distincts et en utilisant partie (a) x est un point d'accumulation, donc $x \in A$. Si a_n contient un nombre fini de termes distincts alors $a_{n_k} = x$ pour toutes les valeurs de $k \geq 1$, et donc $x \in A$.

(c) La partie (c) est évidente à partir de (b).

■

Remarque :
Soit (x_n) une suite de points de X. Si a est un point d'accumulation (une valeur d'adhérence) de (x_n) si il satisfait l'une les propriétés suivantes, qui sont toutes équivalentes :

(a) Tout voisinage de a contient une infinité de points de la suite (x_n).

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbf{Adh}\{x_k, k \geq n\}$

(c) $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{Adh}\{x_k, k \geq n\}$

Définition 4.9. Si $A \subseteq X$ et $x \in X$, alors la distance de x à A est

$$\mathrm{dist}(x, A) = \{d(x, a) : a \in A\}.$$

Il est clair que, lorsque $x \in A, \mathrm{dist}(x, A) = 0$. Mais il est possible que la distance d'un point à un ensemble soit 0 lorsque le point n'est pas dans A.

Proposition 4.10. *Si $A \subseteq X$, alors $\mathbf{Adh}\, A = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, A) = 0\}$.*

Démonstration. Si $x \in \mathbf{Adh}\, A$, alors il existe une suite (a_n) dans A tel que $a_n \to x$. Donc $d(x, a_n) \to 0$, et il s'ensuit que $\mathrm{dist}(x, A) = 0$.
Si $\mathrm{dist}(x, A) = 0$, alors il existe une suite $\{a_n\}$ dans A tel que $d(x, a_n) \to 0$. Donc, $a_n \to x$, et $x \in \mathbf{Adh}\, A$. ■

Exemple 4.11. Si $X = \mathbb{R}$, l'ensemble $A = \{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ représente est une suite bornée dans X. On a $x_{2n} \to 2$ et $x_{2n+1} \to 0$ donc $d(A, 2) = d(A, 0) = 0$ et $\{0, 2\} \in \mathbf{Adh}\, A$.

4.2 Suite de Cauchy et complétude

Définition 4.12. Une suite (x_n) de X est une suite de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $m, n > N$ alors $d(x_n, x_m) < \epsilon$. L'espace métrique X est dit **complet** si toute suite de Cauchy dans X est convergente.

Un espace normé complet est dit **espace de Banach**. Dans tel espace pour monter qu'une suite est convergente il suffit de monter qu'elle est de Cauchy, qui ne demande pas la connaissance de la limite.

Théorème 4.13. *Soit (X, d) un espace métrique, alors*

(1) *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

(2) *Toute suite de Cauchy est bornée.*

(3) *Toute sous suite de Cauchy est de Cauchy.*

(4) *Tout suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente est convergente.*

Démonstration. (1) En fait si $x_n \to x$ et $\epsilon > 0$, alors on choisi N tel que $d(x, x_n) < \epsilon/2$. Alors, quand $m, n > N$, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \epsilon$.
(2) Facile.
(3) Soit a un point fixe dans X et (x_n) une suite de Cauchy dans X. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $m, n \geq N$ alors $d(x_n, x_m) < 1$.

$$d(a, x_n) \leq d(a, x_N) + d(x_N, x_n) \leq d(a, x_m) + 1$$

Puisque l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_N\}$ est fini, il est borné et ainsi $d(a, x_N) < M < \infty$. Donc $d(a, x_n) \leq 1 + M$
(4) Supposons que $x_{n_k} \to x$, et soit $\epsilon > 0$. On choisi un nombre naturel N_1 tel que $d(x_{n_k}, x) < \epsilon/2$ pour $n_k \geq N_1$, et on choisi un nombre naturel N_2 tel que $d(x_n, x_m) < \epsilon/2$ quand $m, n \geq N_2$. Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$, et soit $n \geq N$. On choisi $n_k \geq N$. Puisque on a que $n_k \geq N_1$ et $n, nk > N_2$, on aura que

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

■

Remarques :
– Les espaces complets sont ceux ou les suites convergentes sont les suites de Cauchy.
– Les réciproques de (1) et (2) sont évidement fausses.

Exemple 4.14.

(a) Si $X = (0, 1)$, la suite $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est une suite de Cauchy dans X dont la limite est égale à 0 qui n'est pas dans X.

(b) Si $X = \mathbb{R}$, la suite $\{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ est une suite bornée dans X mais n'est pas de Cauchy.

La vertu de la notion d'être Cauchy, lorsque l'espace est complet, c'est que vous savez la limite existe sans avoir à produire cette limite.

Proposition 4.15. *Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques et $f : X \to Y$ uniformément continue.*

(a) *Si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans X, alors $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans Y.*

(b) *Si de plus f est un homéomorphisme et si Y est complet, alors X est complet.*

Théorème 4.16 (Théorème de Cantor)**.** *Un espace métrique (X,d) est complet si et seulement si chaque fois que F_n est une suite de sous-ensembles non vides satisfaisant :*
(i) chaque F_n est fermé ; *(ii) $F_1 \supseteq F_2 \ldots$;* *(iii) $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$*
alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ est un singleton.

Démonstration. Supposons (X,d) est complet et $\{F_n\}$ satisfait les conditions du théorème. Pour chaque n soit $x_n \in F_n$. Si $\epsilon > 0$, soit N tel que $\operatorname{diam} F_n < \epsilon$ pour $n > N$. Donc, si $m,n > N$, alors (ii) implique que $x_m, x_n \in F_N$ et donc $d(x_m,x_n) \leq \operatorname{diam} F_N < \epsilon$. Ainsi x_n est une suite de Cauchy qui converge vers x parce que X est complet. Puisque les F_n sont fermés alors $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. S'il y a un autre point $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, alors $d(x,y) \leq \dim F_n$ pour chaque $n \geq 1$. Selon (iii) $\operatorname{diam} F_n \to 0$ donc $x = y$.
Supposons que (X,d) satisfait les conditions énoncées et que (x_n) est une suite de Cauchy. Soit $F_n = \mathbf{Adh}\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$.Il est clair que, (i) et (ii) sont satisfaites. Si $\epsilon > 0$, alors soit N tel que $d(x_m,x_n) < \epsilon$ quand $m,n \geq N$. Mais quand $k \geq N, \operatorname{diam} F_k = \sup\{d(x_m,x_n) : m,n \geq k\} \leq \epsilon$. Ainsi la suite $\{F_n\}$ satisfait condition (iii), donc $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$. Mais pour $n \geq 1, d(x,x_n) \leq \operatorname{diam} F_n \to 0$. Donc, $x_n \to x$ c.a.d. que (X,d) est complet. ∎

Corollaire 4.17. *$(\mathbb{R},d)$ avec $d(x,y) = |x-y|$ est complet.*

Démonstration. Soit $\{F_n\}$ une suite de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ satisfaisant les trois conditions dans le théorème précédant. Puisque chacun à un diamètre fini, ils sont bornés. Utilisant l'axiome de complétude de $\mathbb{R}$, $a_n = \inf F_n$ et $b_n = \sup F_n$ existent. Puisque F_n sont fermés, alors $a_n, b_n \in F_n$ et donc $0 \leq b_n - a_n \leq \operatorname{diam} F_n \to 0$. Puisque $F_{n+1} \subseteq F_n$, il s'en suit que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Les suites $\{a_n\}$ et $\{a_n\}$ sont donc monotones et bornées qui doivent converger. Ils existent donc des points $a, b \in F_n$ tels que $a_n \to a$ et $b_n \to b$ Donc $|b-a| \leq \operatorname{diam} F_n \to 0$, donc $a = b$. Donc, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{a\}$. Par le théorème de Cantor, $\mathbb{R}$ est complet. ∎

Proposition 4.18.

(a) *Le produit de deux espaces métriques $(X,d_X),(Y,d_Y)$ est complet si et seulement si (X,d_X) et (Y,d_Y) sont complets.*

(b) *Le produit d'un nombre fini d'espaces métriques est complet si et seulement si tous ses facteurs sont complets.*

Exemple 4.19.

(a) $(\mathbb{R}^n, d_2)$ muni de la distance euclidienne est complet.

(b) $(\mathbb{C}^n, d_2)$ muni de la distance euclidienne est complet.

(c) (ℓ^2, d_2) est complet.

(d) L'espace $(\mathcal{B}(D,\mathbb{R}), d_\infty)$ des fonction réelles bornées sur le domaine D, avec sup métrique d_∞, est complet.

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|$$

Proposition 4.20. *Si (X,d_X) est un espace métrique complet et $A \subseteq X$, alors*
Le sous-espace métrique (A,d_A) est complet si et seulement si A est fermé dans X.

Remarque. *Dans les espaces métriques complets, les parties complètes pour la métrique induite sont exactement les parties fermées.*

Il n'est pas difficile de trouver des exemples d'espaces métriques qui ne sont pas complets. Par exemple en utilisant la proposition précédente nous pouvons considérer n'importe quel sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui n'est pas fermé.

Exemple 4.21. Les espace métriques (X,d) suivants muni de la distance euclidienne ne sont pas complets :
(a) $X = \mathbb{Q}$
On peut approcher un irrationnel $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ par une suite de rationnels $x_n = \dfrac{y_n}{d_n}$. La suite $\{x_n\}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc dans $\mathbb{Q}$. Elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ puisque $r \notin \mathbb{Q}$.
(b) $X = (a,b)$. Pourquoi ?

Attention. La complétude **n'est pas** une propriété topologique.
On a vu dans le corollaire (3.37) que $\mathbb{R}$ et $X = (a,b)$ sont homéomorphes. Cependant dans cette section on a vu que $(\mathbb{R},d)$ est complet mais (X,d) n'est pas complet. Donc la complétude n'est pas une propriété topologique.

Rappelons qu'un ensemble est borné si son diamètre est fini.

Proposition 4.22.

(a) *Tout sous-ensemble A de (X,d) est borné si et seulement si pour tout x dans X il existe un $r > 0$ tel que $A \subseteq B(x;r)$.*

(b) *L'union d'un nombre fini d'ensembles bornés est bornée.*

(c) *Une suite de Cauchy dans (X,d) est un ensemble borné.*

Démonstration.

(a) Si $A \subseteq B(x;r)$, alors $\operatorname{diam} A \leq 2r$; donc A est borné.
Inversement, supposons que A est borné et $\operatorname{diam} A = \delta$. Soit $x \in X$ et $a_0 \in A$. Pour tout point $a \in A$ on a $d(x,a) \leq d(x,a_0) + d(a_0,a) \leq d(x,a_0) + \delta$. Si on pose $r = 2[d(x,a_0) + \delta]$, alors $A \subseteq B(x;r)$.

(b) Si A_k sont bornés pour $1 \leq k \leq n$ et $x \in X$, alors soit $r_k > 0$ tel que $A_k \subseteq B(x;r_k)$. Si on pose $r = r_1 + \cdots + r_n$, alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n \subseteq B(x;r)$.

(c) Si $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy, alors il existe $N \geq 1$ tel que $d(x_n, x_m) < 1$ pourvu que $m, n \geq N$. Si $A = \{x_1, \ldots, x_N\}$ et $B = \{x_n : n > N\}$, alors $\{x_n\} = A \cup B$. A est borné car c'est un ensemble fini. B est borné car $\operatorname{diam} B \leq 1$. En utilisant (b), $\{x_n\} = A \cup B$ est borné.

■

4.3 Théorème du point fixe

Définition 4.23. Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \to X$. On dit que f est une application contractante (ou simplement une contraction) si et seulement s'il existe $0 < k < 1$ tel que pour tout $x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) < kd(x, y).$$

Donc une contraction est k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$.

Corollaire 4.24. *Si $X \subseteq \mathbb{R}$ alors $f : X \to X$ avec $|f'| < k < 1$ est une contraction.*

Démonstration. Voir proposition 3.55 ■

Proposition 4.25. *Toute contraction sur un espace métrique X est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et posons $\delta = \epsilon/k$. Pour $x, y \in X$ tel que $d(x, y) < \delta$ on a $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) < \epsilon$ ■

Le théorème qui suit est très important et est un des théorèmes qui a le plus d'applications dans l'analyse.

Théorème 4.26 (Théorème du point fixe-Banach 1922).
Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une contraction. Alors, il existe un point unique $a \in X$ tel que $f(a) = a$. De plus, si $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, alors

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{et} \quad d(a, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, f(x_0))$$

Démonstration. Supposons que f est une contraction, alors il existe $k \in (0, 1)$ tel que pour pour $x, y \in X$, on a $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$.
Pour l'unicité, supposons que a et a' sont deux point fixes de f, alors

$$d(a, a') = d(f(a), f(a')) \leq kd(a, a').$$

Ce qui est possible que si $d(a, a') = 0$, donc $a = a'$.
Si $x_0 \in X$ et $(x_n)_n$ est la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$. Alors pour tout $n \geq 1$ on a

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq k^n d(x_1, x_0).$$

On en déduit que si $m = n + p$,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= d(x_{n+p}, x_n) \\ &= d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots + k^n) d(x_1, x_0) \\ &\leq k^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{p-1} k^i \\ &\leq k^n \frac{(1-k^p)}{1-k} d(x_1, x_0) \text{ puisque } 1 - k^p < 1 \text{ on obtient} \\ &< \frac{k^n}{1-k} d(x_0, f(x_0)) \to 0 \text{ quand } n \to \infty \text{ car } k \in (0, 1). \end{aligned}$$

La suite (x_n) est donc de Cauchy, et comme X est complet, il existe $a \in X$ tel que $x_n \to a$.
Or f est uniformément continue (car Lipschitzienne) donc $f(x_n) \to f(a)$.
Mais $x_{n+1} = f(x_n)$, en passant à la limite, on obtient $a = f(a)$ et donc a est un point fixe de f. ■

Remarque :
Remarques :

(a) Le théorème du point fixe est aussi connu comme théorème de l'application contractante.

(b) Le théorème du point fixe de Banach est un outil très utilisé pour démontrer l'existence de solutions pour les problèmes de Cauchy associes à des équations différentielles ordinaires (EDO) ou même à des équations aux dérivées partielles (EDP).

(c) L'hypothèse $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ n'implique pas que f est une contraction.

(d) L'hypothèse X complet est fondamentale. Par exemple, si $X = (0, 1)$ et $f(x) = x/3$, alors f est contractante et n'a pas de point fixe dans X.

(e) Cette méthode des itérations est un excellent outil de calcul numérique des valeurs approchées du point fixe.

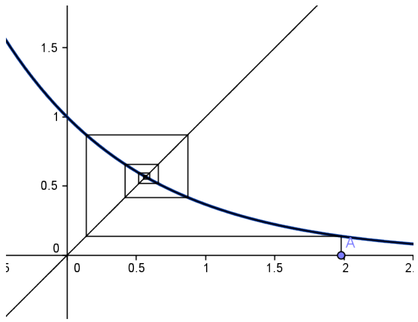


FIGURE 4.2: Itérations du point fixe $e^{-x} = x$

Exemple 4.27. Trouver le nombre des solutions de l'équation $\cos x = x$.
Posons $f : X \to X$ ou $f(x) = \cos x$ et $X = [-1, 1]$. X est complet car il est fermé dans $\mathbb{R}$ et $|f'(x)| \le k \le 1$. Le théorème des accroissements finis implique que pour tout $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \le k|x - y|.$$

Il s'en suit que l'équation $\cos x = x$ admet une seule solution d'après le théorème du point fixe.

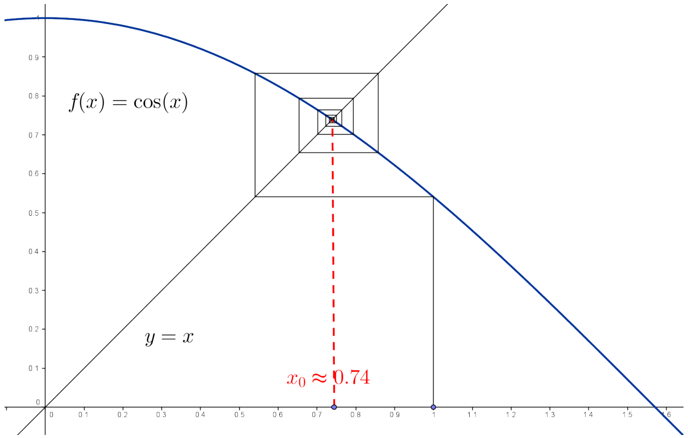


FIGURE 4.3: Itérations du point fixe de $f(x) = \cos(x)$

Corollaire 4.28. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $|f'| < k < 1$ alors f possède un point fixe.*

Exemple 4.29. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ avec $f(x) = \dfrac{1}{3}e^x$. Alors, $|f'(x)| = \dfrac{1}{3}e^x \le \dfrac{e}{3} < 1$.
Donc f possède un point fixe unique dans $[0, 1]$.
Posons $a_1 = \dfrac{1}{2}$ et $a_{n+1} = f(a_n)$, alors $a_{11} \approx 0.6182$ et le point fixe est $a \approx 0.61906 = a_{21}$. Cette méthode est généralement lente pour trouver le point fixe. Pour cela on a fait des méthodes comme celle de Newton-Raphson pour trouver la solution du point fixe plus rapidement.

Remarque :
Si on exprime la fonction f sous la forme $f(x) = g(x) - x$. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ revient à trouver le point fixe x_0 de l'équation $g(x) = x$. Ceci est possible lorsque g applique l'intervalle $[a, b]$ dans lui-même et s'il existe une certaine constante k telle que $|g'(x)| \le k < 1$ pour tout $x \in [a, b]$.
La suite $(x_n)_n$ déterminée par une valeur initiale choisie sur $[a, b]$ et par la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$, converge vers la solution de l'équation x_0.

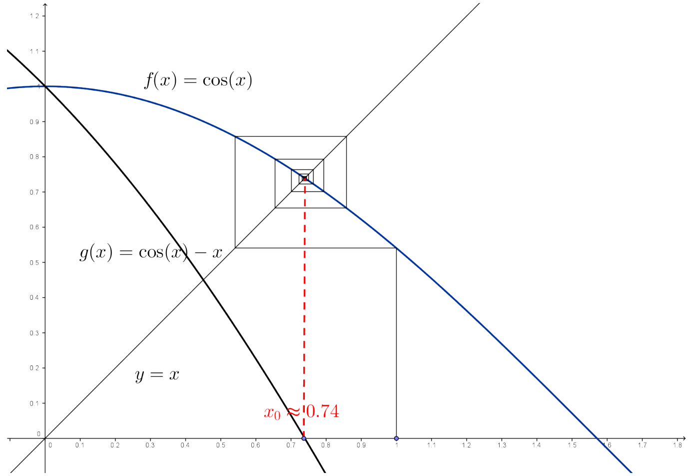


FIGURE 4.4: Graphes de $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \cos(x) - x$

Méthode de Newton-Raphson

Supposons que $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable, $f'(x) \ne 0$ pour tout $x \in I$ et qu'il existe $0 \le k < 1$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| \le k$$

Alors, $f(x) = 0$ a une solution unique $x = a \in I$, obtenue en prenant une valeur initiale a_0 et en posant $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ ou $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
La raison étant si on pose $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, alors $g'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$, donc g est une contraction et $g(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$.

Exemple 4.30. Soit $f(x) = x^2 - 2$ pour $x \in [1, 2]$, cherchons une approximation de la racine positive de f. On a

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| = \left|\frac{(x^2-2)(2)}{(2x)^2}\right| = \left|\frac{4x^2-4}{4x^2}\right| = \left|1 - \frac{1}{x^2}\right| \le 1 \text{ for } x > 1$$

Posons $a_1 = 3/2$, $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = \dfrac{3x - x^2 + 2}{3}$ on aura $a_7 \approx 1.414214$.

Résumé

Résumons ce que nous avons appris au sujet de la complétude. Un ensemble complet est celui dans lequel si une suite a la propriété que les distances entre ces termes tendent vers zéro, alors la suite converge vers un point de l'ensemble. Tout ensemble complet est fermé, mais un ensemble fermé n'est pas nécessairement complet. Cependant si (X, d) est un espace métrique complet ; alors une partie de X est complète si et seulement si elle est fermée. Tous les principaux espaces que nous rencontrons dans nos applications $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}$ et $C(a, b)$ avec leurs métriques habituels) sont complets et ainsi de tous leurs sous-ensembles fermés sont complets.

4.4 Exercices

1. Montrer les propositions suivante :
- Toute suite convergente est de Cauchy.
- Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
- Toute suite de Cauchy est bornée.
- Toute suite de Cauchy qui possède une sous-suite convergente converge.

2. Soit $X = \mathbb{R}$ avec les métriques suivantes :

(a) $d(x, y) = |x^3 - y^3|$

(b) $d(x, y) = |e^x - e^y|$

(c) $d(x, y) = |\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(y)|$

Pour qu'elles de ces métrique (X, d) est t-il complet ?

3. Montrer que la distance $d(x, y) = \left|\dfrac{x}{1 + |x|} - \dfrac{y}{1 + |y|}\right|$ sur $\mathbb{R}$ est topologiquement équivalente à la distance usuelle mais $\mathbb{R}$ muni de cette distance n'est pas complet.

4. Soient d_1 et d_2 deux métriques équivalentes sur le même espace X. Monter que si (X, d_1) est complet, alors (X, d_2) l'est aussi.

5. (Proposition 4.15) Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques , $f : X \to Y$ uniformément continue et $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans X.

(a) Montrer que $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans Y.

(b) Si de plus, f est bijective et f^{-1} est continue, montrer que si Y est complet X est complet.

6. Montrer que si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, alors $(x_n^2)_n$ est de Cauchy aussi.

7. (Proposition 4.20) Si (X, d_X) est un espace métrique complet et $A \subseteq X$, alors Le sous-espace métrique (A, d_A) est complet si et seulement si A est fermé dans X.

8. (a) Montrer que toute intersection de parties complètes de X est une partie complète de X.
(b) Montrer que toute réunion finie de parties complètes de X est une partie complète de X.

9. Si (X, δ) est l'espace métrique discret, alors une suite (x_n) dans X converge vers x si et seulement si, il existe N tel que $x_n = x$ quand $n \geq N$.

10. Montrer que l'espace métrique discret (X, δ) est complet.

11. Si (Z, d_Z) est le produit cartésien des deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y), avec $d_Z((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$.

(1) Montrer que la suite $(x_n, y_n) \to (x, y)$ dans Z si et seulement si $x_n \to x$ et $y_n \to y$.

(2) Montrer que si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont complets alors (Z, d_Z) est complet aussi.

12. Supposons que (x_n) est suite de X qui converge vers x et $z_1, \ldots, z_m$ est collection fini de points dans X. On défini une nouvelle suite $(y_n)_n$ dans X en laissant $y_k = z_k$ pour $1 \leq k \leq m$ et $y_k = x_{k_m}$ quand $k \geq m+1$. Montrer que $y_n \to x$.

13. Soit (Z, d_Z) le produit cartésien des deux espaces métriques (X, d_X) et (Y, d_Y).
(a) Montrer que la suite $(z_n)_n = (x_n, y_n)_n$ est une suite de Cauchy dans Z si et seulement si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans X et $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy dans Y.
(b) Montrer que Z est complet si et seulement si les deux X et Y sont complets.

14. Montrer que toute contraction est continue.

15. Trouver un exemple simple de fonctions $f : A \subset \mathbb{R} \to A$ vérifiant l'inégalité $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ ne possédant aucun point fixe.

16. (a) Montrer que pour $x \geq 1$ et $t \geq 0$, $\sqrt{x+t} - \sqrt{x} \leq t/2$.
(b) Montrer que $f(x) = \sqrt{x}$ est une contraction sur $[1, \infty)$ (c) Trouver le point fixe de f.

17. Monter que toute fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$ a un point fixe sur $[a, b]$.

18. Monter la fonction $f : [1, 2] \to [1, 2]$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

a un point fixe unique sur $[1, 2]$, et trouver ce point.

19. Monter que l'équation $x^5 + 7x - 1 = 0$ possède une solution unique dans $[0, 1]$. Trouver le point fixe en utilisant la méthode de Newton.

20. Soit $f : (0, 1/4) \to (0, 1/4)$ définie par $f(x) = x^2$. Montrer que f est une contraction qui ne possède aucun point fixe.

21. Soit $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ définie par $f(x) = x + x^{-1}$. Montrer que $[0, \infty)$ est complet et $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour $x, y \in [1, \infty)$, mais f n'est pas une contraction et n'a aucun point fixe.