Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2017/2018.

Première année M.I - Semestre 2.
Module : *Analyse 2* - Épreuve de Rattrapage.
Dimanche 10/06/2018 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1: (12pts)

1. Calculer l'intégrale indéfinie $\int \frac{dt}{\sqrt{2e^t - 1}}$ et ce, en posant le changement de variable $z = \sqrt{2e^t - 1}$.
2. On considère le problème de Cauchy (P) $\begin{cases} y''(x) = e^{y(x)} & (E) \\ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1 \end{cases}$. En utilisant uniquement l'équation (E), montrer que toute solution y de classe C^2 est en réalité de classe C^4.
3. En déduire, sans résoudre (P), le développement limité de y au voisinage de 0 et à l'ordre 3.
4. On se propose à présent de résoudre (P). Multiplier les deux membres de (E) par $y'(x)$ puis intégrer les deux membres. Montrer que l'on obtient ainsi une équation du premier ordre à variables séparables. Trouver ainsi la solution de (P).
5. Montrer que l'on peut simplifier la solution y ainsi calculée jusqu'à arriver à $y(x) = -\ln(1 - \sin x)$. Donner l'intervalle maximal d'existence de cette solution.
6. Retrouver ainsi le $DL_3(0)$ de la troisième question.

Exercice 2: (08pts) On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x(x - y)}$$

1. Montrer que cette équation est homogène.
2. Déterminer la solution générale de cette équation.

On donne les développements suivants au voisinage de 0 :

$$\ln(1 - t) = -t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 + t^3\varepsilon(t)$$
$$\cos(t) = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + t^5\varepsilon(t)$$

1ère année M.I - Semestre 2 - 2017/2018

Module : « Analyse II » - Epreuve de Rattrapage.

Corrigé.

Exercice 1 : (12 pts)

1°/ Calcul de l'intégrale indéfinie : $I = \int \frac{dt}{\sqrt{2e^t - 1}}$ 2pts

Comme indiqué, posons $z = \sqrt{2e^t - 1} \Leftrightarrow 2e^t - 1 = z^2$

$\Leftrightarrow e^t = \frac{1}{2}(z^2+1) \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{z^2+1}{2}\right) \Rightarrow dt = \frac{2z}{z^2+1}dz$

D'où $I = \int \frac{1}{z} \cdot \frac{2z}{z^2+1}dz = \int \frac{2}{z^2+1}dz = 2\,\mathrm{arctg}(z) + k$

et donc $\boxed{I = 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2e^t - 1}\right) + k}$

2°/ Considérons uniquement (E) : $y''(x) = e^{y(x)}$. On suppose que $y(\cdot)$ est une solution de (E) de classe C^2. Comme la fonction exponentielle est de classe C^∞ alors la composée $e^{y(\cdot)}$ est de classe C^2 aussi. 1pt
Mais $e^{y(\cdot)} = y''$ d'après (E), donc y'' est de classe C^2, càd y est de classe C^4.

3°/ Développement de y : Nous venons de montrer que y est de classe C^4, donc son développement de Taylor exprime son développement limité à l'ordre 3.

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

D'après les données de Cauchy on a : $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ 2pts

Maintenant par (E), $y''(0) = e^{y(0)} = e^0 = 1$ et $y'''(x) = y'(x)e^{y(x)}$

d'où $y'''(0) = y'(0)\,e^{y(0)} = 1 \cdot e^0 = 1$, et donc

$$\boxed{y(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)}$$

4°/ Résolution de (P) : Comme indiqué, on multiplie les deux membres de (E) par $y'(x)$: $y'(x)y''(x) = y'(x)e^{y(x)}$

Par intégration on a : $\frac{1}{2}(y'(x))^2 = e^{y(x)} + C_1$

Avec les données de Cauchy on peut écrire :

$$\frac{1}{2}(y'(0))^2 = e^{y(0)} + C_1 \iff \frac{1}{2} = 1 + C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = -1/2}$$

d'où $\frac{1}{2}(y'(x))^2 = e^{y(x)} - 1/2 \Rightarrow (y'(x))^2 = 2e^{y(x)} - 1$

La résolution d'un problème de Cauchy se faisant localement, on a que : au voisinage de 0, $y'(x)$ est voisin de $y'(0) = 1$ donc positif. D'où $\boxed{y'(x) = \sqrt{2e^{y(x)} - 1}}$ 4pts

C'est une équation du 1er ordre à variables séparables. D'où

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2e^y - 1}} = \int dx \Rightarrow 2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2e^y - 1}\right) = x + C_2$$

On peut déterminer C_2 par la donnée $y(0) = 0$.

$$2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2e^0 - 1}\right) = C_2 \Rightarrow C_2 = 2\,\mathrm{arctg}\,1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi/2$$

D'où $\mathrm{arctg}\left(\sqrt{2e^y - 1}\right) = \frac{x}{2} + \pi/4 \Rightarrow \sqrt{2e^y - 1} = tg\left(\frac{x}{2} + \pi/4\right)$

avec $\boxed{-\frac{3\pi}{2} < x < \pi/2}$ car $\frac{x}{2} + \pi/4 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (les valeurs de l'arctg)

Et donc $e^y = \frac{1}{2}\left[1 + tg^2\left(\frac{x}{2} + \pi/4\right)\right] = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2} + \pi/4\right)}$

et $\boxed{y(x) = -\ln\left[2\cos^2\left(\frac{x}{2} + \pi/4\right)\right]}$

5°/ Simplification de y : On a $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, d'où

$$y(x) = -\ln\left[1 + \cos\left(x + \pi/2\right)\right] = \boxed{-\ln(1 - \sin x)}$$ 1pt

Pour l'intervalle maximal d'existence, on doit avoir $1 - \sin x > 0$ et x voisin de 0, donc $\boxed{x \in \left]-\frac{3\pi}{2}, \pi/2\right[}$ (déjà trouvé).

6°/ Retrouver le $DL_3(0)$ de y : Il s'agit tout simplement de développer au voisinage de 0 et à l'ordre 3 la fonction $y(x) = -\ln(1-\sin x)$. On a :

$$\sin x = -(\cos x)' = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$$

et donc $y(x) = -\ln\left[1-\left(x-\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x)\right)\right]$

$$= \left(x-\frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^3 + x^3\varepsilon_1(x)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$$

$$\boxed{y(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_2(x)}$$

2pts

Exercice 2 : (08 pts) $\quad y' = \dfrac{x^2+xy-y^2}{x(x-y)}$

1°/ L'homogénéité : On a $y' = f(x,y) = \dfrac{x^2+xy-y^2}{x(x-y)}$

Il faut vérifier que $\forall \lambda \neq 0,\ f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$.

En effet $f(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{\lambda^2x^2+\lambda^2xy-\lambda^2y^2}{\lambda x(\lambda x-\lambda y)} = f(x,y)$. 1pt

2°/ Résolution : La résolution des équations homogènes se fait en posant $y = xz$ où z est la nouvelle fonction inconnue.

Alors $xz'+z = \dfrac{x^2+x^2z-x^2z^2}{x(x-xz)} = \dfrac{1+z-z^2}{1-z}$

$$\Rightarrow xz' = \frac{1+z-z^2}{1-z} - z = \frac{1+\cancel{z}-\cancel{z^2}-\cancel{z}+\cancel{z^2}}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$ 7pts

$$\Rightarrow (1-z)z' = 1/x \Rightarrow z - \frac{1}{2}z^2 = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow z^2 - 2z + 2C + 2\ln|x| = 0 \Rightarrow (z-1)^2 = k - 2\ln|x|$$

$(k = 1-2C)$

$$\Rightarrow z = 1 \pm \sqrt{k-2\ln|x|} \text{ et } \boxed{y = x\left(1\pm\sqrt{k-2\ln|x|}\right)}$$