TC

TD : 1

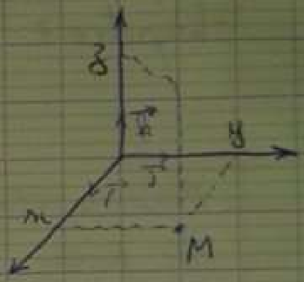
des opérateurs vectoriels.

I. 1 : opérateur nabla $\vec{\nabla}$

Systémes de coordonnées cartésiennes :

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$



$$\vec{\nabla} \begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta x} \\ \dfrac{\delta}{\delta y} \\ \dfrac{\delta}{\delta z} \end{cases}$$

l'opérateur $\vec{\nabla}$ "nabla" est un opérateur aux dérivées partielles. Il permet de déterminer le gradient la divergence, le rotationnel et le laplacien

I. 2 : le gradient

f : fonction scalaire : $f(x, y, z)$

par exemple : $f(x, y, z) = x^2 + y + z^2$

la définition du gradient :

$$\vec{grad}\, f = \vec{\nabla} . f$$

$$\vec{grad}\, f = \begin{cases} \dfrac{\delta f(x, y, z)}{\delta x} \\ \dfrac{\delta f(x, y, z)}{\delta y} \\ \dfrac{\delta f(x, y, z)}{\delta z} \end{cases}$$

I-3) la divergence:

__definition__: soit un vecteur $\vec{A}\begin{pmatrix} a_x & \vec{i} \\ a_y & \vec{j} \\ a_z & \vec{k} \end{pmatrix}$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{A}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \vec{B}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{A}}_{\text{scalaire}} = \frac{\delta a_x}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta a_y}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta a_z}{\delta z}\vec{k}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} \\ \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{d z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

- le rotationnel:

soit le vecteur $\vec{A}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$

$$\vec{rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

$$\vec{rot}\,\vec{A}: \begin{matrix} \vec{i} & \frac{\delta}{\delta x} & a_x \\ \vec{j} & \frac{\delta}{\delta y} & a_y \\ \vec{k} & \frac{\delta}{\delta z} & a_z \end{matrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec{A} = \begin{cases} \frac{\delta a_z}{\delta y} - \frac{\delta a_y}{\delta z} & \vec{i} \\ \frac{\delta a_x}{\delta z} - \frac{\delta a_z}{\delta x} & \vec{j} \\ \frac{\delta a_y}{\delta x} - \frac{\delta a_x}{\delta y} & \vec{k} \end{cases}$$

EXO1:

démontrer que $\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{grad}\, G) = \vec{0}$

sachant que: G est une fonction scalaire.

$$\overrightarrow{grad}\, G = \begin{cases} \dfrac{\delta G(x,y,z)}{\delta x} \\ \dfrac{\delta G(x,y,z)}{\delta y} \\ \dfrac{\delta G(x,y,z)}{\delta z} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\, G) = \begin{array}{ccc} i & \dfrac{\delta}{\delta x} & \dfrac{\delta G}{\delta x} \\ j & \dfrac{\delta}{\delta y} & \dfrac{\delta G}{\delta y} \\ z & \dfrac{\delta}{\delta z} & \dfrac{\delta G}{\delta z} \end{array}$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\, G) = \begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{\delta G}{\delta z}\right) - \dfrac{\delta}{\delta z}\left(\dfrac{\delta G}{\delta y}\right) = \dfrac{\delta^2 G}{\delta y \delta z} - \dfrac{\delta^2 G}{\delta y \delta z} = 0 \\ \dfrac{\delta}{\delta z}\left(\dfrac{\delta G}{\delta x}\right) - \dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta G}{\delta z}\right) = 0 \\ \dfrac{\delta}{\delta x}\left(\dfrac{\delta G}{\delta y}\right) - \dfrac{\delta}{\delta y}\left(\dfrac{\delta G}{\delta x}\right) = 0 \end{cases}$$

EXO2:

- $div(\overrightarrow{Rot}\, \vec{A}) = 0$
- $div(G.\vec{A}) = G\, div \vec{A} + \vec{A}\, \overrightarrow{grad} G$
- $div(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B}\, \overrightarrow{rot} \vec{A} - \vec{A}\, \overrightarrow{rot} \vec{B}$