Département de Mathématiques
Université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel

Introduction aux Équations aux Différences

Cours destiné aux étudiants du première et deuxième année

Master en Mathématiques

Belhannache Farida
Maître de conférences

Table des matières

Introduction

Les équations aux différences sont devenues un outil de valeur et ont beaucoup d'importance dans plusieurs domaines et disciplines scientifiques et ceci par leurs nombreuses applications dans les sciences appliquées telles que l'économie, la biologie, la théorie des probabilités, l'ecologie,...etc. D'une part, elles sont utilisées pour la simulation des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles, dans l'analyse numérique pour la résolution des équations à l'aide des suites, avec la recherche de la valeur approchée de la solution par exemple le schéma numérique d'Euler ou de Runge-Kutta. D'autre part, elle sont utilisées en modélisation des phénomènes de la vie réelle, notamment en dynamique des populations.

Dans le premier chapitre de ce cours, nous commençons par donner quelques notions du calcul aux différences ; ensuite nous étudions les équations aux différences linéaires à coefficients variables et à coéfficients constants ainsi que leurs stabilités. Le chapitre se termine par une série d'exercices.

Nous commençons le deuxième chapitre par quelques définitions concernant les équations aux différences non linéaires ; ensuite nous présentons la méthode de linéarisation et quelques types d'équations aux différences non linéaires qui peuvent être résolus en les transformant aux équations aux différences linéaires. Nous terminons ce chapitre par l'étude du comportement asymptotique des solutions d'une équation aux différences non linéaire et d'une série d'exercices.

La première partie du troisième chapitre est consacrée à l'étude des systèmes d'équations aux différences linéaires. Dans la deuxième partie, nous présentons quelques notions de base et des résultats fondamentaux concernant les systèmes d'équations aux différences non linéaires. Nous finissons le chapitre par l'étude du comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations aux différences non linéaires et d'une série d'exercices.

Ce polycopié a fait l'objet d'un cours enseigné durant l'année universitaire 2017/2018 au département de mathématiques de l'université Mohammed Seddik Ben Yahia-Jijel. Il s'adresse aux étudiants du Master "Mathématiques Fondamentales et Discrètes" et du Master "Analyse Fonctionnelle".

Notations

Dans tout ce cours on désignera par

$\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs.

$\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

$\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels.

$\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres naturels non nuls.

$\mathbb{N}_{n_0} = \{n_0, n_0+1, ...\}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{R}^s = \{(x_1, ..., x_s)^t,\ x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, ..., s\}\},\ s \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

$x, y : \mathbb{N}_{n_0} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux suites réelles.

$C_i^j = \frac{j!}{i!(j-i)!},\ \ \forall j, i \in \mathbb{N},\ \ i \leq j$.

$r \in \mathbb{N}$.

$k \in \mathbb{N}^*$.

$M_s(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $s \times s$ réelles.

Chapitre 1

Équations aux différences linéaires

Dans ce chapitre, nous allons regrouper quelques notions de base et des résultats fondamentaux concernant les équations aux différences linéaires. Nous commençons par donner quelques notions du calcul aux différences ; ensuite nous étudions les équations aux différences linéaires à coefficients variables et à coéfficients constants ainsi que leurs stabilités. Nous finissons ce chapitre par une série d'exercices.

1.1 Notions sur le calcul aux différences

Définition 1.1.1 *On définit l'opérateur de différence Δ et l'opérateur de décalage E respectivement par*

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.1}$$

$$Ex(n) = x(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.2}$$

Remarque 1.1.1

1. *Δ et E sont des opérateurs linéaires.*
2. *Δ et E commuttent, c'est à dire $\Delta E = E\Delta$.*
3. *$\Delta = E - I$ où I est l'opérateur identité, c'est à dire $Ix(n) = x(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$*

Définition 1.1.2 *En général, on définit Δ^r et E^r respectivement par*

$$\Delta^r x(n) = \Delta(\Delta^{r-1}x(n)), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.3}$$

$$E^r x(n) = x(n+r), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.4}$$

Lemme 1.1.1 *De la Remarque 1.1.1 on peut montrer facilement les égalités suivantes*

$$\Delta^r = (E-I)^r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} C_i^r E^i \tag{1.5}$$

$$E^r = (\Delta + I)^r = \sum_{i=0}^{r} C_i^r \Delta^i \tag{1.6}$$

où $C_0^0 = 1$ et $C_i^0 = 0$ si $i \neq 0$.

Théorème 1.1.1 *Soit $\{x(n)\}_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $x(0) = x_0$. Alors*

$$x(n) = x(0+n) = E^n x_0 = \sum_{i=0}^{n} C_i^n \Delta^i x_0 \tag{1.7}$$

$$\Delta^n x_0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_i^n E^i x_0 \tag{1.8}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer les égalitées (1.5) et (1.6) à x_0.

■

Proposition 1.1.1 *On a les propriétés suivantes pour Δ.*

(a)

$$\sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta x(i) = x(n) - x(n_0), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.9}$$

(b)

$$\Delta\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} x(i)\right) = x(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.10}$$

(c)

$$\Delta\left(x(n)y(n)\right) = Ex(n)\Delta y(n) + y(n)\Delta x(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.11}$$

(d)

$$\Delta\left(\frac{x(n)}{y(n)}\right) = \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)Ey(n)}, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.12}$$

et $y(n)$ est non nulle sur $\mathbb{N}_{n_0}$.

(e) *Soit $P(n) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i n^{k-i}$ un polynôme de degré k (i.e $a_0 \neq 0$) où $a_i, i \in \{0, 1, ..., k\}$ sont des réels. Alors*

$$\Delta^k P(n) = a_0 k!. \tag{1.13}$$

$$\Delta^{k+i} P(n) = 0, \ \forall i \geq 1. \tag{1.14}$$

Démonstration. En utilisant (1.1) et (1.2) on trouve

(a)

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta x(i) &= \sum_{i=n_0}^{n-1} (x(i+1) - x(i)) \\ &= \sum_{i=n_0+1}^{n} x(i) - \sum_{i=n_0}^{n-1} x(i) \\ &= x(n) - x(n_0). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \Delta \left(\sum_{i=n_0}^{n-1} x(i) \right) &= \sum_{i=n_0}^{n} x(i) - \sum_{i=n_0}^{n-1} x(i) \\ &= x(n). \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \Delta (x(n)y(n)) &= x(n+1)y(n+1) - x(n)y(n) \\ &= x(n+1)(y(n+1) - y(n)) + y(n)(x(n+1) - x(n)) \\ &= Ex(n)\Delta y(n) + y(n)\Delta x(n). \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{x(n)}{y(n)}\right) &= \frac{x(n+1)}{y(n+1)} - \frac{x(n)}{y(n)} \\
&= \frac{x(n+1)y(n) - x(n)y(n+1)}{y(n+1)y(n)} \\
&= \frac{y(n)(x(n+1) - x(n)) - x(n)(y(n+1) - y(n))}{y(n+1)y(n)} \\
&= \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)Ey(n)}.
\end{aligned}$$

(e)

$$\Delta P(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i(n+1)^{k-i} - \sum_{i=0}^{k} a_i n^{k-i}.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
(n+1)^k &= \sum_{i=0}^{k} C_i^k n^i = 1 + kn + \frac{k(k-1)}{2!}n^2 + \cdots + kn^{k-1} + n^k \\
(n+1)^{k-1} &= 1 + (k-1)n + \frac{(k-1)(k-2)}{2!}n^2 + \cdots + (k-1)n^{k-2} + n^{k-1} \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Donc

$$\Delta P(n) = a_0 k n^{k-1} + P_1(n)$$

où P_1 est un polynôme de degré inférieur strictement à $k-1$, c'est à dire deg $P_1 < k-1$.

De la même manière on peut montrer que

$$\begin{aligned}
\Delta^2 P(n) &= a_0 k(k-1)n^{k-2} + P_2(n) \text{ avec deg } P_2 < k-2, \\
\Delta^3 P(n) &= a_0 k(k-1)(k-2)n^{k-3} + P_3(n) \text{ avec deg } P_3 < k-3, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

d'où (1.13).

Pour montrer (1.14) il suffit d'utiliser (1.3) et (1.13).

■

Proposition 1.1.2 *Soit*

$$P(E) = \sum_{i=0}^{k} a_i E^{k-i} \tag{1.15}$$

où E est l'opérateur défini par (1.2) et $a_i, i \in \{0, 1, ..., k\}$ sont des réels. Alors

1. *Pour tout $b \in \mathbb{R}$ on a*

$$P(E)b^n = P(b)b^n, \ n \in \mathbb{N}^* \tag{1.16}$$

2.

$$P(E)(b^n x(n)) = b^n P(bE)x(n), \ n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.17}$$

Démonstration. En utilisant (1.4) et (1.15) on trouve

1.

$$\begin{aligned} P(E)b^n &= (a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + \cdots + a_k I)b^n \\ &= a_0 b^{n+k} + a_1 b^{n+k-1} + \cdots + a_k b^n \\ &= (a_0 b^k + a_1 b^{k-1} + \cdots + a_k) b^n \\ &= P(b)b^n. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(E)(b^n x(n)) &= (a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + \cdots + a_k I)(b^n x(n)) \\ &= a_0 E^k b^n x(n) + a_1 E^{k-1} b^n x(n) + \cdots + a_k I b^n x(n) \\ &= a_0 b^{n+k} x(n+k) + a_1 b^{n+k-1} x(n+k-1) + \cdots + a_k b^n x(n) \\ &= b^n (a_0 b^k x(n+k) + a_1 b^{k-1} x(n+k-1) + \cdots + a_k x(n)) \\ &= b^n P(bE)x(n). \end{aligned}$$

■

1.2 Équations aux différences linéaires à coefficients variables

Définition 1.2.1 *Une équation de la forme*

$$y(n+k)+p_1(n)y(n+k-1)+\cdots+p_k(n)y(n)=g(n), \quad n\in\mathbb{N}_{n_0} \tag{1.18}$$

avec $p_i(n),\ i\in\{1,\dots,k\}$ *et* $g(n)$ *sont des fonctions réelles définies sur* $\mathbb{N}_{n_0}$ *et* $p_k(n)\neq 0$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}_{n_0}$ *s'appelle équation aux différences linéaire non homogène d'ordre* k*.*

Définition 1.2.2 *On appelle équation homogène associée à l'équation* (1.18) *l'équation*

$$y(n+k)+p_1(n)y(n+k-1)+\cdots+p_k(n)y(n)=0, \ \ n\in\mathbb{N}_{n_0} \tag{1.19}$$

Définition 1.2.3 *Une suite* $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *est dite solution de l'équation* (1.18) *si elle satisfait cette équation.*

Observons que si nous fixons k conditions initiales pour l'équation (1.18)

$$y(n_0)=c_0, \ \ y(n_0+1)=c_1, \ \dots\ , \ y(n_0+k-1)=c_{k-1}, \tag{1.20}$$

où les $c_i,\ i\in\{0,\dots,k-1\}$ sont des constantes réelles, alors on obtient le problème suivant

$$\begin{cases} y(n+k)+p_1(n)y(n+k-1)+\cdots+p_k(n)y(n)=g(n), \ \ \forall n\in\mathbb{N}_{n_0} \\ y(n_0)=c_0, \ \ y(n_0+1)=c_1,\dots,y(n_0+k-1)=c_{k-1}. \end{cases} \tag{1.21}$$

Théorème 1.2.1 *Le problème* (1.21) *admet une solution unique.*

Démonstration.

i) Du problème (1.21), on trouve

$$y(n+k)=-p_1(n)y(n+k-1)-p_2(n)y(n+k-2)-\cdots-p_k(n)y(n)+g(n), \ \ \forall n\in\mathbb{N}_{n_0}, \tag{1.22}$$

donc si on pose $n = n_0$ dans (1.22) on obtient

$$\begin{aligned} y(n_0+k) &= -p_1(n_0)y(n_0+k-1) - \cdots - p_k(n_0)y(n_0) + g(n_0) \\ &= -p_1(n_0)c_{k-1} - p_2(n_0)c_{k-2} - \cdots - p_k(n_0)c_0 + g(n_0) \end{aligned}$$

alors $y(n_0+k)$ existe.
Pour déterminer $y(n_0+1+k)$ on pose $n = n_0+1$ dans (1.22) on trouve

$$\begin{aligned} y(n_0+1+k) &= -p_1(n_0+1)y(n_0+k) - p_2(n_0+1)y(n_0+k-1) - \cdots \\ &\quad -p_k(n_0+1)y(n_0+1) + g(n_0+1) \\ &= -p_1(n_0+1)y(n_0+k) - \cdots - p_k(n_0+1)c_1 + g(n_0+1) \end{aligned}$$

et donc $y(n_0+1+k)$ existe.
De la même manière on peut montrer l'existence de $y(n)$ pour tout $n \geq n_0+k$ ce qui donne l'existence d'une solution du problème (1.21).

ii) Maintenant on va montrer l'unicité de la solution, pour cela supposons qu'il existe deux solutions $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ et $\{\widetilde{y}(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ du problème (1.21), alors $\{z(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ où $z(n) = (y - \widetilde{y})(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$ est une solution de l'équation (1.22) avec $g \equiv 0$ et $c_0 = c_1 = \ldots = c_{k-1} = 0$. Comme on a vu dans la peruve de l'existence d'une solution, il est facile de montrer que $z \equiv 0$, ce qui implique l'unicité de la solution.

■

Exemple 1.2.1 *On considère l'équation aux différences linéaires d'ordre deux suivante*

$$y(n+2) + \frac{n}{n+1}\,y(n+1) - 3y(n) = n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.23}$$

avec $y(0) = 1$ *et* $y(1) = -1$ *et on va calculer* $y(3)$ *et* $y(4)$.
D'abord, nous récrivons l'équation (1.23) *sous la forme*

$$y(n+2) = \frac{-n}{n+1}\,y(n+1) + 3y(n) + n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.24}$$

Posons $n = 0$ *dans l'équation* (1.24), *on aura*

$$y(2) = 3y(0) = 3,$$

pour $n = 1$ *on obtient*

$$y(3) = \frac{-1}{2}y(2) + 3y(1) + 1 = \frac{-7}{2}.$$

Lemme 1.2.1 *Soit l'opérateur* L *défini par*

$$Ly(n) = \sum_{i=0}^{k} p_i(n)y(n+k-i),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.25}$$

Alors L *est linéaire.*

Démonstration. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} L(\alpha x(n) + \beta y(n)) &= \sum_{i=0}^{k} p_i(n)(\alpha x(n+k-i) + \beta y(n+k-i)) \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{k} p_i(n)x(n+k-i) + \beta \sum_{i=0}^{k} p_i(n)y(n+k-i) \\ &= \alpha Lx(n) + \beta Ly(n). \end{aligned}$$

■

Remarque 1.2.1 *Soit* L *défini par* (1.25)*. Alors l'équation* (1.18) *prend la forme*

$$Ly(n) = g(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.26}$$

et l'équation (1.19) *sera*

$$Ly(n) = 0,\ n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.27}$$

avec $p_0(n) = 1,\ n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

Proposition 1.2.1 *Soit* S *l'ensemble des solutions de l'équation* (1.27)*. Alors* S *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Conséquence directe du Lemme 1.2.1. ■

Définition 1.2.4 *Soient* $f_i(n),\ i \in \{1, \ldots, r\}$ *des fonctions définies sur* $\mathbb{N}_{n_0}$.

On dit que $f_i(n)$ *sont linéairement indépendantes sur* $\mathbb{N}_{n_0}$ *si*

$$\forall \alpha_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} \Longrightarrow \alpha_i = 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, r\}.$$

Exemple 1.2.2 $3^n, n3^n$ *et* $n^2 3^n$ *sont linéairement indépendantes sur* $\mathbb{N}^*$.
En effet

$$\begin{aligned} \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n + \alpha_3 n^2 3^n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^* &\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 n^2 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \\ &\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

Définition 1.2.5 *Un ensemble de* k *solutions de l'équation* (1.27) *linéairement indépendantes est dit ensemble fondamental de solutions de cette équation.*

Définition 1.2.6 *Soient* $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$, $\{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \ldots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *des solutions de l'équation* (1.27). *On définit le Casoratien* $W(n)$ *de ces solutions par*

$$W(n) = \begin{vmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \cdots & y_k(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \cdots & y_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \cdots & y_k(n+k-1) \end{vmatrix},\quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \quad (1.28)$$

Exemple 1.2.3 *Considérons l'équation aux différences suivante*

$$y(n+2) + \frac{3}{2} y(n+1) + \frac{1}{2} y(n) = 0,\ n \in \mathbb{N}. \quad (1.29)$$

Vérifions que $\{(-1)^n\}_{n=0}^{+\infty}$ *et* $\left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}_{n=0}^{+\infty}$ *sont des solutions de l'équation* (1.29) *et calculons leur Casoratien.*
On a

$$(-1)^{n+2} + \frac{3}{2}(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}(-1)^n = 0,$$

et

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Par définition le Casoratien $W(n)$ *de* $\{(-1)^n\}_{n=0}^{+\infty}$ *et* $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=0}^{+\infty}$ *est*

$$\begin{aligned} W(n) &= \begin{vmatrix} (-1)^n & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ (-1)^{n+1} & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n(-1)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}},\ \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Lemme 1.2.2 (Lemme d'Abel) *Soient* $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$, $\{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \ldots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *des solutions de l'équation* (1.27) *et soit* $W(n)$ *leur Casoratien, alors*

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)}\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i)\right)W(n_0),\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.30}$$

Pour démontrer ce lemme on a besoin du lemme suivant.

Lemme 1.2.3 *Considérons l'équation aux différences linéaire du premier ordre suivante*

$$y(n+1) = a(n)y(n),\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.31}$$

avec $y(n_0) = y_0$ *et* $a(n)$ *est une fonction définie sur* $\mathbb{N}_{n_0}$, *alors la solution de l'équation* (1.31) *est définie sur* $\mathbb{N}_{n_0}$ *par*

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right]y_0. \tag{1.32}$$

Démonstration. (Par récurrence)

Pour $n = n_0 + 1$, de l'équation (1.31) on a

$$y(n_0+1) = a(n_0)y(n_0) = a(n_0)y_0 = \left[\prod_{i=n_0}^{n_0} a(i)y_0\right],$$

donc (1.32) est vraie pour $n = n_0 + 1$.

Maintenant supposons que (1.32) est vraie pour n et montrons la pour

$n+1$.

On a

$$y(n+1) = a(n)y(n) = a(n)\left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 = \left[\prod_{i=n_0}^{n} a(i)\right] y_0.$$

D'où (1.32). ■

Démonstration du Lemme 1.2.2

On va démontrer le lemme pour $k=3$ et de la même manière on peut montrer le cas général.

Considérons l'équation aux différences

$$y(n+3) + p_1(n)y(n+2) + p_2(n)y(n+1) + p_3(n)y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \qquad (1.33)$$

Soient $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$, $\{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ et $\{y_3(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ trois solutions de l'équation (1.33) alors le Casoratien de ces solutions est

$$W(n+1) = \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ y_1(n+3) & y_2(n+3) & y_3(n+3) \end{vmatrix}, \ n \in \mathbb{N}_{n_0} \qquad (1.34)$$

de L'équation (1.33), on a

$$y_i(n+3) = -p_1(n)y_i(n+2) - p_2(n)y_i(n+1) - p_3(n)y_i(n), \quad i = 1, 2, 3, \ n \in \mathbb{N}_{n_0}$$

et

$$W(n+1) = \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ -p_1(n)y_1(n+2) & -p_1(n)y_2(n+2) & -p_1(n)y_3(n+2) \\ -p_2(n)y_1(n+1) & -p_2(n)y_2(n+1) & -p_2(n)y_3(n+1) \\ -p_3(n)y_1(n) & -p_3(n)y_2(n) & -p_3(n)y_3(n) \end{vmatrix}, \ n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

En utilisant les propriétés des déterminants on trouve

$$\begin{aligned} W(n+1) &= \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ -p_3(n)y_1(n) & -p_3(n)y_2(n) & -p_3(n)y_3(n) \end{vmatrix} \\ &= -p_3(n) \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ y_1(n) & y_2(n) & y_3(n) \end{vmatrix} \\ &= -p_3(n)(-1)^2 \begin{vmatrix} y_1(n) & y_2(n) & y_3(n) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) & y_3(n+2) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & y_3(n+1) \end{vmatrix} \\ &= (-1)^3 p_3(n) W(n), \ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \end{aligned}$$

D'où

$$W(n+1) = (-1)^3 p_3(n) W(n), \ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.35}$$

D'après le Lemme 1.2.3, on obtient

$$\begin{aligned} W(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1}(-1)^3 p_3(i)\right] W(n_0) \\ &= (-1)^{3(n-n_0)}\left[\prod_{i=n_0}^{n-1} p_3(i)\right] W(n_0). \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat.

Remarque 1.2.2 *Si l'équation* (1.27) *est à coefficients constants* $p_1,\ p_2, \ldots, p_k$, *alors*

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} p_k^{n-n_0} W(n_0). \tag{1.36}$$

Corollaire 1.2.1 *Supposons, dans* (1.27), *que* $p_k(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$. *Alors*

$$W(n) \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0} \Longleftrightarrow W(n_0) \neq 0.$$

Théorème 1.2.2 *L'ensemble* $\{\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty},\ \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \ldots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}\ \}$ *des solutions de l'équation* (1.27) *est un ensemble fondamental de solutions si et seulement si* $W(n_0) \neq 0$.

Démonstration. Soient $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty},\ \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \ldots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ des solutions de l'équation (1.27) et soient $\alpha_i,\ i \in \{1, ..., k\}$ des constantes réelles. Supposons que

$$\alpha_1 y_1(n) + \alpha_2 y_2(n) + \cdots + \alpha_k y_k(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$$

alors on trouve k équations

$$\begin{aligned} &\alpha_1 y_1(n) + \alpha_2 y_2(n) + \cdots + \alpha_k y_k(n) = 0, \\ &\alpha_1 y_1(n+1) + \alpha_2 y_2(n+1) + \cdots + \alpha_k y_k(n+1) = 0, \\ &\vdots \\ &\alpha_1 y_1(n+k-1) + \alpha_2 y_2(n+k-1) + \cdots + \alpha_k y_k(n+k-1) = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$Y(n)\xi = (0, 0, \ldots, 0)^t, \tag{1.37}$$

où

$$Y(n) = \begin{pmatrix} y_1(n) & y_2(n) & \cdots & y_k(n) \\ y_1(n+1) & y_2(n+1) & \cdots & y_k(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n+k-1) & y_2(n+k-1) & \cdots & y_k(n+k-1) \end{pmatrix},$$

et

$$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)^t.$$

Observons que

$$W(n) = \det Y(n).$$

L'équation (1.37) admet une seule solution qui est la solution triviale (nulle) i.e., $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ si et seulement si

$$\det Y(n) = W(n) \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

En combinant cette condition avec le Corollaire 1.2.1 on obtient le résultat voulu. ■

Exemple 1.2.4 *Montrer que* $\{\{2^n\}_{n=0}^{+\infty}, \{(-3)^n\}_{n=0}^{+\infty}\}$ *est un ensemble fondamental de solutions de l'équation*

$$y(n+2) + y(n+1) - 6y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.38}$$

i) Il est facile de montrer que $\{2^n\}_{n=0}^{+\infty}$ et $\{(-3)^n\}_{n=0}^{+\infty}$ sont des solutions de l'équation (1.38).

ii) Soit $W(n)$ le Casoratien des suites $\{2^n\}_{n=0}^{+\infty}$ et $\{(-3)^n\}_{n=0}^{+\infty}$, alors

$$W(n) = \begin{vmatrix} 2^n & (-3)^n \\ 2^{n+1} & (-3)^{n+1} \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$$

donc

$$\begin{aligned} W(0) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ &= -5 \neq 0. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 1.2.2, $\{\{2^n\}_{n=0}^{+\infty}, \{(-3)^n\}_{n=0}^{+\infty}\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (1.38).

Théorème 1.2.3 ***(Théorème fondamental)*** *Considérons l'équation* (1.27). *Si* $p_k(n) \neq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, *alors l'équation* (1.27) *admet un ensemble fondamental de* k *solutions.*

Démonstration. D'après le Théorème 1.2.1, le problème

$$\begin{cases} y_i(n+k) + p_1(n)y_i(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y_i(n) = 0, \; n \in \mathbb{N}_{n_0} \\ y_i(n_0+i-1) = 1, \;\; y_i(n_0+j) = 0, \quad j \neq i-1, \;\; 1 \leq i \leq k, \end{cases}$$

admet des solutions $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \; \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \ldots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$, soit $W(n)$ leur Casoratien. Alors

$$\begin{aligned} W(n_0) &= \begin{vmatrix} y_1(n_0) & y_2(n_0) & \cdots & y_k(n_0) \\ y_1(n_0+1) & y_2(n_0+1) & \cdots & y_k(n_0+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(n_0+k-1) & y_2(n_0+k-1) & \cdots & y_k(n_0+k-1) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

d'où

$$W(n_0) = \det \mathrm{I_k} = 1 \neq 0,$$

donc d'après le Théorème 1.2.2, $\{\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, \ldots, \{y_k(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (1.27). ■

Corollaire 1.2.2 *L'espace S des solutions de l'équation* (1.27) *est de dimension k.*

Maintenant on considère l'équation (1.26) où g est une fonction discrète tel que $g(n) \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$.

On peut facilement vérifier le lemme suivant

Lemme 1.2.4 *La différence entre deux solutions de l'équation* (1.26) *est solution de l'équation* (1.27).

Remarque 1.2.3 *L'ensemble des solutions de l'équation* (1.26) *n'est pas un espace vectoriel.*

Théorème 1.2.4 *Soient $\{y_i(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}, i \in \{1, ..., k\}$ des solutions linéairement indépendantes de l'équation* (1.27) *et soit $\{y_p(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution particulière de l'équation* (1.26), *alors toute autre solution $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ de l'équation* (1.26) *s'écrit sous la forme*

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(n) + y_p(n), \quad c_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, ..., k\} \text{ et } n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

Démonstration. Soient $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution de l'équation (1.26) et $\{y_p(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution particulière de la même équation. D'après le Lemme 1.2.4 la suite $\{(y - y_p)(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ est une solution de l'équation (1.27).

Donc

$$y(n) - y_p(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(n), \ n \in \mathbb{N}_{n_0}$$

d'où

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(n) + y_p(n), \ n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

■

1.2.1 Méthode de la variation de la constante

Considérons l'équation aux différences non homogène du second ordre suivante

$$y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_2(n)y(n) = g(n), \; n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.39}$$

où $p_i,\; i = 1,2$ et g sont des fonctions réelles définies sur $\mathbb{N}_{n_0}$, $p_2(n) \neq 0$ et $g(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$.
L'équation homogène associée à (1.39) est

$$y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_2(n)y(n) = 0. \tag{1.40}$$

Soient $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ et $\{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.40). On pose

$$y(n) = c_1(n)y_1(n) + c_2(n)y_2(n) \tag{1.41}$$

est une solution particulière de l'équation (1.39) où $\{c_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ et $\{c_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ sont deux suites qui seront déterminées après. Alors

$$\begin{aligned} y(n+1) &= c_1(n+1)y_1(n+1) + c_2(n+1)y_2(n+1) \\ &= +c_2(n)y_2(n+1) + \Delta c_1(n)y_1(n+1) \\ &\quad +\Delta c_2(n)y_2(n+1), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \end{aligned} \tag{1.42}$$

avec Δ est l'opérateur défini par (1.1).
Cette méthode impose que

$$\Delta c_1(n)y_1(n+1) + \Delta c_2(n)y_2(n+1) = 0, \; n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.43}$$

De (1.42) et (1.43) on obtient

$$\begin{aligned} y(n+2) &= c_1(n)y_1(n+2) + c_2(n)y_2(n+2) + \Delta c_1(n)y_1(n+2) \\ &\quad +\Delta c_2(n)y_2(n+2), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Substituons (1.41), (1.42) et (1.44) dans (1.39) on trouve

$$\Delta c_1(n)y_1(n+2) + \Delta c_2(n)y_2(n+2) = g(n), \ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.45}$$

Soit $W(n)$ le Casoratien des solutions $\{y_1(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ et $\{y_2(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$. Alors

$$\begin{aligned} W(n+1) &= \begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2) \end{vmatrix} \\ &= y_1(n+1)y_2(n+2) - y_2(n+1)y_1(n+2). \end{aligned} \tag{1.46}$$

Multiplions (1.45) par $y_2(n+1)$ on trouve

$$\Delta c_1(n)y_1(n+2)y_2(n+1) + \Delta c_2(n)y_2(n+2)y_2(n+1) = g(n)y_2(n+1). \tag{1.47}$$

En combinant (1.43) et (1.47) on obtient

$$\Delta c_1(n)\left(y_1(n+2)y_2(n+1) - y_2(n+2)y_1(n+1)\right) = g(n)y_2(n+1), \tag{1.48}$$

ce qui implique

$$\Delta c_1(n) = \frac{-g(n)y_2(n+1)}{W(n+1)}, \ \ n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

En utilisant (1.10) on a

$$c_1(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{-g(i)y_2(i+1)}{W(i+1)}, \ \ n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

De la même manière on trouve

$$\Delta c_2(n) = \frac{g(n)y_1(n+1)}{W(n+1)}, \ \ n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

d'où

$$c_2(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g(i)y_1(i+1)}{W(i+1)}, \ \ n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

1.3 Équations aux différences linéaires à coefficients constants

1.3.1 Résolution de l'équation homogène

Dans ce paragraphe on s'intéresse aux équations aux différences linéaires homogènes à coefficients constants d'ordre k de la forme

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = 0,\ n \in \mathbb{N} \tag{1.49}$$

avec $p_i,\ i \in \{1, ..., k\}$ sont des constantes réelles et $p_k \neq 0$. Notre objectif est de trouver un ensemble fondamental de solutions de l'équation (1.49) et par conséquent sa solution générale.

Proposition 1.3.1 *Soit λ un nombre complexe non nul. Si la suite définie par $y(n) = \lambda^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ est une solution de l'équation* (1.49)*, alors λ est solution de l'équation*

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_k = 0. \tag{1.50}$$

Démonstration. Soit $y(n) = \lambda^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Substituons les termes de cette suite dans (1.49) nous obtenons

$$\lambda^{n+k} + p_1 \lambda^{n+k-1} + \cdots + p_k \lambda^n = 0,\ n \in \mathbb{N} \tag{1.51}$$

donc

$$\lambda^n \left[\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_k\right] = 0,\ n \in \mathbb{N} \tag{1.52}$$

d'où (1.50). ∎

Remarque 1.3.1 *L'équation* (1.50) *est appelée équation caractéristique associée à l'équation* (1.49).

Théorème 1.3.1 *Soient $\lambda_i, i \in \{1, ..., k\}$ les solutions distinctes de l'équation* (1.50). *Alors*
$\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ *est un ensemble fondamental de solutions de l'équation* (1.49).

Démonstration. Soient $\{\lambda_i^n\}_{n=0}^{+\infty}, i \in \{1, ..., k\}$ des solutions de l'équation (1.49) et $W(n)$ le Casoratien de ces solutions, d'après le Théorème 1.2.2 il suffit de montrer que $W(0) \neq 0$.
On a

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix},$$

c'est le déterminant de $Vandermonde$, alors

$$W(0) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i), \tag{1.53}$$

Puisque les $\lambda_i, i \in \{1, ..., k\}$ sont distinctes, il résulte de (1.53) que $W(0) \neq 0$, donc $\{\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (1.49). ■

Corollaire 1.3.1 *La solution générale de l'équation* (1.49) *est donnée par*

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n, \quad c_i \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

Lemme 1.3.1 *Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ des solutions de l'équation* (1.50) *de multiplicités $m_1, m_2, \ldots, m_r$ respectivement tels que $r \leq k$ et $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = k$. Alors*

$$\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \ldots, n^{m_1-1}\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, n^{m_2-1}\lambda_2^n, \cdots, \lambda_r^n, \cdots, n^{m_r-1}\lambda_r^n\}$$

est un ensemble fondamental de solutions de l'équation (1.49).

Pour la démonstration (voir [2]).

Corollaire 1.3.2 *La solution générale de l'équation* (1.49) *s'écrit sous la forme*

$$y_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n, \qquad c_{i,j} \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 1.3.1 (Racines réelles simples)
Considérons l'équation aux différences suivante

$$y(n+2) + 2y(n+1) - y(n) = 0, \; n \in \mathbb{N} \tag{1.54}$$

avec $y(0) = 0$ *et* $y(1) = 1$.
L'équation caractéristique associée à l'équation (1.54) *est*

$$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

et les solutions de cette équation sont

$$\lambda_1 = -1 - \sqrt{2} \text{ et } \lambda_2 = -1 + \sqrt{2}.$$

Donc la solution générale de l'équation (1.54) *est*

$$y(n) = c_1 \left(-1 - \sqrt{2}\right)^n + c_2 \left(-1 + \sqrt{2}\right)^n, \qquad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2, \; n \in \mathbb{N}.$$

D'après les conditions initiales on a

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + \left(-1 - \sqrt{2}\right) + c_2 \left(-1 + \sqrt{2}\right) = 1, \end{cases}$$

donc

$$c_1 = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \; et \; c_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

d'où la solution de l'équation (1.54) *avec* $y(0) = 0$ *et* $y(1) = 1$ *est*

$$y(n) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \left(-1 - \sqrt{2}\right)^n + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-1 + \sqrt{2}\right)^n, \; n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 1.3.2 (Racines réelles multiples)
Considérons l'équation aux différences suivante

$$y(n+2) - y(n+1) + \frac{1}{4} y(n) = 0, \; n \in \mathbb{N} \tag{1.55}$$

avec $y(0) = 1$ *et* $y(1) = 0$.

L'équation caractéristique associée à cette équation est

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \text{ de multiplicité } m = 2.$$

Donc la solution générale de l'équation (1.55) *est*

$$y_n = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 n \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2,\ n \in \mathbb{N}.$$

D'après les conditions initiales on a

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ \dfrac{1}{2} + c_2 \left(\dfrac{1}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

donc $c_1 = 1$ *et* $c_2 = -1$ *et la solution de l'équation* (1.55) *avec* $y(0) = 1$ *et* $y(1) = 0$ *est*

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n - n \left(\frac{1}{2}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 1.3.3 (Racines complexes) *Considérons l'équation aux différences suivante*

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = 0,\ n \in \mathbb{N} \tag{1.56}$$

et supposons que l'équation caractéristique associée à (1.56) *admet deux solutions complexes*

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \text{ et } \lambda_2 = \alpha - i\beta, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

donc la solution générale de l'équation (1.56) *est*

$$y(n) = c_1(\alpha + i\beta)^n + c_2(\alpha - i\beta)^n, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2,\ n \in \mathbb{N}.$$

Maintenant on utilise les coordonnées polaires i.e.,

$$\begin{cases} \alpha = r\cos\theta, \\ \beta = r\sin\theta, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} y(n) &= c_1(r\cos\theta + ir\sin\theta)^n + c_2(r\cos\theta - ir\sin\theta)^n \\ &= c_1 r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) + c_2 r^n(\cos n\theta - i\sin n\theta) \\ &= r^n\left[(c_1+c_2)\cos(n\theta) + i(c_1-c_2)\sin(n\theta)\right] \\ &= r^n[a_1\cos(n\theta) + a_2\sin(n\theta)],\ n\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

où $a_1 = c_1 + c_2$ *et* $a_2 = i(c_1 - c_2)$.
Soit

$$\cos\omega = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}},\ \ \sin\omega = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}},\ \ \omega = \arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right).$$

alors la solution générale de l'équation (1.56) *devient*

$$\begin{aligned} y(n) &= r^n\sqrt{a_1^2+a_2^2}\,[\cos\omega\cos(n\theta) + \sin\omega\sin(n\theta)] \\ &= r^n\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cos(n\theta-\omega) \\ &= Ar^n\cos(n\theta-\omega),\ n\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

avec $A = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

1.3.2 Méthode des coefficients indéterminés

Dans cette partie on s'intéresse aux équations aux différences linéaires non homogènes à coefficients constants d'ordre k de la forme

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = g(n),\ n\in\mathbb{N} \tag{1.57}$$

où g est une fonction réelle non nulle définie sur $\mathbb{N}$, $p_i, i \in \{1, ..., k\}$ sont des constantes réelles et $p_k \neq 0$. Notre objectif est de trouver une solution particulière de l'équation ci-dessus en utilisant la méthode des coefficients indéterminés.

Définition 1.3.1 *Soient g une fonction réelle définie sur $\mathbb{N}$ et E l'opérateur défini par* (1.2). *Un polynôme opératoriel $N(E)$ est dit annulateur de g si on a*

$$N(E)g(n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.58}$$

Exemple 1.3.4 *1. $N(E) = E - 3I$ est un annulateur de la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par $g(n) = 3^n$.*

2. $N(E) = E^2 + I$ est un annulateur de la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par $h(n) = cos\frac{n\pi}{2}$.

Maintenant on va écrire l'équation (1.57), en utilisant l'opérateur E, sous la forme

$$P(E)y(n) = g(n), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.59}$$

où $P(E) = E^k + p_1E^{k-1} + \cdots + p_kI$.
Supposons que $N(E)$ est un annulateur de g et nous appliquons $N(E)$ sur les deux membres de (1.59) on trouve

$$N(E)P(E)y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.60}$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les solutions de l'équation caractéristique associée à (1.60) et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ les solutions de l'équation caractéristiques associée à l'équation

$$N(E)y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.61}$$

Alors on a deux cas

Cas 1 $\lambda_i \neq \mu_j, \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Dans ce cas on prend une solution particulière $\{y_p(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ sous la forme de la solution générale de l'équation (1.61) mais avec des constantes qui seront déterminées après la substitution de $\{y_p(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ dans l'équation (1.57).

Cas 2 $\exists i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tel que $\lambda_i = \mu_j$. Dans ce cas on considère une solution particulière sous la forme de la solution générale de l'équation (1.60) après éliminer les termes qui sont dans la solution générale de l'équation homogène associée à (1.57) puis substituons cette solution dans l'équation (1.57) pour déterminer les constantes.

1.4 Analyse de la stabilité des solutions

Dans cette partie on donne quelques éléments de la théorie de la stabilité des solutions des équations aux différences linéaires.

Définition 1.4.1 *On dit qu'une solution* $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *de l'équation* (1.19) *est stable si pour toute autre solution* $\{y^*(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *de la même équation la suite* $\{e(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *où* $e(n) = y(n) - y^*(n)$ *est bornée pour tout* $n \in \mathbb{N}_{n_0}$.
Sinon on dit que $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *est instable.*

Définition 1.4.2 *On dit qu'une solution* $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *de l'équation* (1.19) *est asymptotiquement stable si pour toute autre solution* $\{y^*(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *de la même équation on a*

$$\lim_{n\to+\infty} e(n) = \lim_{n\to+\infty} (y(n) - y^*(n)) = 0.$$

Exemple 1.4.1 *Considérons de nouveau l'équation* (1.55). *D'après L'exemple 1.3.2 la solution générale de cette équation est de la forme*

$$y(n) = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 n \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

soit

$$y^*(n) = c_1^{'} \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2^{'} n \left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad (c_1^{'}, c_2^{'}) \in \mathbb{R}^2,\ (c_1^{'}, c_2^{'}) \neq (c_1, c_2)$$

une autre solution de l'équation (1.55). *Il est clair que*

$$\lim_{n\to+\infty} (y(n) - y^*(n)) = 0,$$

donc $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *est asymptotiquement stable.*

Exemple 1.4.2 *Considérons l'équation aux différences*

$$y(n+3) - (\alpha+\beta+1)y(n+2) + (\alpha+\beta+\alpha\beta)y(n+1) - \alpha\beta y(n) = 0,\ n \in \mathbb{N}, \quad (1.62)$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$*,* $|\alpha| < 1$ *et* $|\beta| \leq 1$*.*
L'équation caractéristique associé à (1.62) *est*

$$(\lambda - 1)(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) = 0,$$

donc toute solution $\{y(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ *s'écrit sous la forme*

$$y(n) = c_1 + c_2\alpha^n + c_3\beta^n, \qquad (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$$

soit $\{y^*(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ *une autre solution de l'équation* (1.62)*, alors*

$$y^*(n) = c_1' + c_2'\alpha^n + c_3'\beta^n, \qquad (c_1', c_2', c_3') \in \mathbb{R}^3,\ (c_1', c_2', c_3') \neq (c_1, c_2, c_3)$$

donc

$$|y(n) - y^*(n)| \leq |c_1 - c_1'| + |c_2 - c_2'| + |c_3 - c_3'|,$$

d'où $\{y(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ *est stable.*

Théorème 1.4.1 *On considère l'équation* (1.49) *et soit* $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *une solution de cette équation. Alors* $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *est stable si et seulement si les modules des solutions de l'équation caractéristique* (1.50) *sont inférieurs ou égales à 1, avec ceux de module égale à 1 sont des racines simples.*

Démonstration. Soient $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ et $\{y^*(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ deux solutions différentes de l'équation (1.49) et soient $\lambda_i, i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ les solutions de l'équation (1.50) de multiplicités $m_i, i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ respectivement et $\sum\limits_{i=1}^{s} m_i = k$. Alors

$$y(n) - y^*(n) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i - 1} (c_{i,j} - c_{i,j}^*) n^j \lambda_i^n, \quad (c_{i,j}, c_{i,j}^*) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.63}$$

Il est clair que si n est fini, la quantité (1.63) est bornée, il nous reste à étudier le comportement de cette quantité quand n tend vers $+\infty$.

i) Supposons que la quantité (1.63) est bornée et qu'il existe une solution de l'équation (1.50) de module strictement supérieur à 1, alors la quantité (1.63) tend vers l'infini. Donc on a une contradiction avec l'hypothèse.

ii) Inversement, les termes qui correspondent à des racines de modules strictement inférieurs à 1 tends vers zéro et ceux qui correspondent à des racines de module égale à un (donc simples) donnent une quantité bornée.

■

Théorème 1.4.2 *Soit* $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *une solution de l'équation* (1.49). *Alors* $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *est asymptotiquement stable si seulement si toutes les solutions de l'équation* (1.50) *sont à l'intérieur du disque unité.*

Démonstration. Soient $\{y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$, $\{\overline{y}(n)\}_{=n_0}^{+\infty}$ deux solutions différentes de l'équation (1.49) et $\lambda_i, i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ les solutions de l'équation (1.50) de multiplicités $m_i, i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ respectivement et $\sum_{i=1}^{s} m_i = k$.
On a

$$y(n) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j}\, n^j\, \lambda_i^n, \quad c_{i,j} \in \mathbb{R}$$

et

$$\overline{y}(n) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} \overline{c}_{i,j}\, n^j\, \lambda_i^n, \quad \overline{c}_{i,j} \in \mathbb{R},$$

ainsi

$$y(n) - \overline{y}(n) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} (c_{i,j} - \overline{c}_{i,j})\, n^j\, \lambda_i^n. \tag{1.64}$$

i) Supposons que

$$\lim_{n\to+\infty} (y(n) - \overline{y}(n)) = 0,$$

et qu'il existe une racine caractéristique λ^* de module supérieur ou égale à un, donc les termes $n^j(\lambda^*)^n$ ne tend pas vers zéro (c'est une contradiction).

ii) Inversement si $|\lambda_i| < 1, \forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ alors le membre de droite de l'équation (1.64) tend vers zéro quand n tend vers l'infini i.e.,

$$\lim_{n\to+\infty} (y(n) - \overline{y}(n)) = 0.$$

■

Le tableau suivant est utilisé pour trouver l'expression de quelques solutions particulières $y_p(n)$ de l'équation (1.57).

$g(n)$	$y_p(n)$
α^n	$c_1\alpha^n$
$n^k\alpha^n$	$(c_0 + c_1 n + \cdots + c_k n^k)\alpha^n$
$\alpha^n\sin(bn), \alpha^n\cos(bn)$	$(c_1\sin(bn) + c_2\cos(bn))\alpha^n$
$n^k\alpha^n\sin(bn), n^k\alpha^n\cos(bn)$	$(c_0 + c_1 n + \cdots + c_k n^k)\alpha^n\sin(bn) + (d_0 + d_1 n + \cdots + d_k n^k)\alpha^n\cos(bn)$

TAB. 1.1 – Une solution particulière y_p si α n'est pas une solution de l'équation caractéristique (1.50).

1.5 Exercices

Exercice 1.5.1 *Soit* $\lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \dots, k\}$ *avec* $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. *Montrer que*

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le k} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Exercice 1.5.2 *On considère l'équation aux différences suivante*

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.65}$$

où a, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sont des fonctions discrètes et* $y(0) = y_0$.

1. *Posons* $y(n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a(i)\right) z(n), \quad n \in \mathbb{N}$ *dans (1.65). Montrer que*

$$\Delta z(n) = \frac{g(n)}{\prod_{i=0}^{n} a(i)}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ puis déduire } z(n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. *En utilisant la question précédente, montrer que*

$$y(n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a(i)\right) y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right) g(r), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.66}$$

3. Montrer que la solution de l'équation

$$y(n+1) = by(n) + c, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.67}$$

où $b, c \in \mathbb{R}$ *et* $y(0) = y_0$ *est donnée par*

$$y(n) = \begin{cases} b^n y_0 + c\left(\frac{b^n-1}{b-1}\right), & si\ b \neq 1 \\ y_0 + cn, & si\ b = 1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 1.5.3 *Montrer que* $\{\{n\}_{n=0}^{+\infty}, \{2^n\}_{n=0}^{+\infty}\}$ *est un ensemble fondamental de solutions pour l'équation aux différences*

$$y(n+2) - \frac{3n-2}{n-1}y(n+1) + \frac{2n}{n-1}y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.68}$$

Exercice 1.5.4 *Considérons l'équation aux différences suivante*

$$y(n+2) + p_1(n)y(n+1) + p_2(n)y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.69}$$

Soint $\{y_1(n)\}_{n=0}^{+\infty}$, $\{y_2(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ *deux solutions de l'équation* (1.69) *et* $W(n)$ *leur Casoratien. Montrer que*

$$y_2(n) = y_1(n)\left(\sum_{r=0}^{n-1} \frac{W(r)}{y_1(r)y_1(r+1)}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.70}$$

Exercice 1.5.5 *Déterminer la solution générale de l'équation aux différences suivante*

$$y(n+3) + 3y(n+2) - 4y(n+1) - 12y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.71}$$

Exercice 1.5.6 *Déterminer la solution générale des équations suivantes par la méthode des coefficients indéterminés.*

1) $y(n+2) + 8y(n+1) + 12y(n) = e^n, \quad n \in \mathbb{N}.$

2) $y(n+2) + 8y(n+1) + 7y(n) = n2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$

3) $y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = 5.3^n, \quad n \in \mathbb{N}.$

Chapitre 2

Équations aux différences non linéaires

Nous commençons ce chapitre par quelques définitions concernant les équations aux différences non linéaires ; ensuite nous présentons la méthode de linéarisation et quelques types d'équations aux différences non linéaires qui peuvent être résolus en les transformant aux équations aux différences linéaires. Nous terminons ce chapitre par l'étude du comportement asymptotique d'une équation aux différences non linéaire et d'une série d'exercices.

2.1 Définitions

Dans cette section, on désigne par I une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 2.1.1 *Soit $f : I^{k+1} \longrightarrow I$ une fonction continue, alors l'équation aux différences d'ordre $k+1$ suivante*

$$x(n+1) = f(x(n), x(n-1), \ldots, x(n-k)), \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

est dite non linéaire si elle n'est pas de la forme (1.18).

Définition 2.1.2 *Une solution de l'équation* (2.1) *est une suite $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ qui satifait l'équation* (2.1) *pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Si nous précisons $k+1$ conditions initiales

$$x(-k), x(-k+1), \ldots, x(0) \in I,$$

alors

$$\begin{aligned} x(1) &= f(x(0), x(-1), \ldots, x(-k)) \\ x(2) &= f(x(1), x(0), \ldots, x(1-k)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

et la solution $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ existe et unique pour tout $n \geq -k$ et elle est définie par les conditions initiales.

Définition 2.1.3 *Soit* $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ *une solution de l'équation* (2.1) *et soit* $p \geq 1$ *un entier.*

1. *On dit que* $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ *est éventuellement périodique de période p s'il existe un entier* $n_1 \geq -k$ *tel que*

$$x(n+p) = x(n), \ \forall n \in \mathbb{N}_{n_1}.$$

2. *Si* $n_1 = -k$ *on dit que* $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ *est périodique de période p.*

Définition 2.1.4 *Soit* $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ *une solution de l'équation* (2.1).
On dit que $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ *est permanente si* $\exists\ m, M > 0$ *et si* $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$m \leq x_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}.$$

Définition 2.1.5 *Soit J un intervalle de* $\mathbb{R}$ *tel que* $J \subseteq I$, *alors J est appelé intervalle invariant pour l'équation* (2.1) *si*

$$x(-k), x(-k+1), \ldots, x(0) \in J \Longrightarrow x(n) \in J, \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.2 Points d'équilibre et stabilité

Définition 2.2.1 *On dit que* $\overline{x} \in I$ *est un point d'équilibre de l'équation* (2.1) *si*

$$\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x}, ..., \overline{x}).$$

Définition 2.2.2 *Soient* $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ *une solution de l'équation* (2.1) *et* $\overline{x}$ *un point d'équilibre de la même équation.*
On dit que $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ *est non oscillatoire autour du point* $\overline{x}$ *si*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \ x(n) > \overline{x}, \ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$$

ou

$$\exists \ n_0 \in \mathbb{N}, \ x_n < \overline{x}, \ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0},$$

sinon on dit que $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ *est oscillatoire autour du point* $\overline{x}$.

Définition 2.2.3 *Soit* $\overline{x}$ *un point d'équilibre de l'équation* (2.1).

1. *On dit que* $\overline{x}$ *est stable si* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tel que si* $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ *est une solution de l'équation* (2.1) *avec les conditions initiales* $x(-k), x(-k+1), \dots, x(0) \in I$ *vérifiant*

$$| \ x(-k) - \overline{x} \ | + | \ x(-k+1) - \overline{x} \ | + \cdots + | \ x(0) - \overline{x} \ | < \delta,$$

   alors

$$| \ x(n) - \overline{x} \ | < \varepsilon, \ \forall n \geq -k.$$

   Sinon on dit que $\overline{x}$ *est instable.*

2. *On dit que* $\overline{x}$ *est asymptotiquement stable si* $\overline{x}$ *est stable, et s'il existe* $\gamma > 0$ *tel que si* $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ *est une solution de l'équation* (2.1) *avec les conditions initiales* $x(-k), x(-k+1), \dots, x(0) \in I$ *vérifiant*

$$| \ x(-k) - \overline{x} \ | + | \ x(-k+1) - \overline{x} \ | + \cdots + | \ x(0) - \overline{x} \ | < \gamma,$$

   alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x(n) = \overline{x}.$$

3. *On dit que* $\overline{x}$ *est attractif si pour toute solution* $\{x(n)\}_{n=-k}^{+\infty}$ *de l'équation* (2.1) *avec les conditions initiales* $x(-k), x(-k+1), \dots, x(0) \in I$, *on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x(n) = \overline{x}.$$

4. *On dit que $\overline{x}$ est globalement stable si $\overline{x}$ est asymptotiquement stable et attractif.*

Maintenant on suppose que

$$\begin{array}{rcl} f: I^{k+1} & \longrightarrow & I \\ (u_0, u_1, \ldots, u_k) & \longrightarrow & f(u_0, u_1, \ldots, u_k) \end{array}$$

est une fonction différentiable dans un voisinage du point $(\overline{x}, \overline{x}, ..., \overline{x})$, où $\overline{x}$ est un point d'équilibre de l'équation (2.1). Soient $p_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x})$ pour $i = 0, 1, \ldots, k$ les dérivées partielles de f au point $\overline{x}$ par rapport à $u_0, u_1, \ldots, u_k$ respectivement.

Définition 2.2.4 *L'équation*

$$y(n+1) = p_0 y(n) + p_1 y(n-1) + \cdots + p_k y(n-k), \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

est appelée équation linéaire associée à l'équation (2.1) *autour du point $\overline{x}$, et l'équation*

$$\lambda^{k+1} - p_0 \lambda^k - \cdots - p_{k-1}\lambda - p_k = 0 \tag{2.3}$$

est appelée équation caractéristique de l'équation (2.2) *autour du point $\overline{x}$.*

Théorème 2.2.1 ***(Stabilité par linéarisation [4])*** *Soit $\overline{x}$ un point d'équilibre de l'équation* (2.1).

1. *Si toutes les solutions de l'équation caractéristique* (2.3) *sont dans le disque unité ouvert, alors le point d'équilibre $\overline{x}$ est asymptotiquement stable.*
2. *Si au moins une solution de l'équation caractéristique* (2.3) *est de module strictement supérieur à 1, alors le point d'équilibre $\overline{x}$ est instable.*

Définition 2.2.5 *Soit $\overline{x}$ un point d'équilibre de l'équation* (2.1). *On dit que $\overline{x}$ est hyperbolique s'il n'y a pas des solutins de l'équation* (2.3) *de module égal à un, sinon $\overline{x}$ est appelé non hyperbolique.*

Théorème 2.2.2 *[4] Considérons l'équation suivante*

$$\lambda^2 + p_0\lambda + p_1 = 0 \tag{2.4}$$

où $p_0, p_1 \in \mathbb{R}$. Alors les deux solutions de (2.4) sont dans le disque unité ouvert si et seulement si

$$|p_0| < 1 + p_1 < 2. \tag{2.5}$$

Théorème 2.2.3 *[4] Soit l'équation d'ordre trois suivante*

$$\lambda^3 + p_0\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0 \tag{2.6}$$

où $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$. Alors les trois solutions de (2.6) sont dans le disque unité ouvert si et seulement si

$$|p_0 + p_2| < 1 + p_1,\ |p_0 - 3p_2| < 3 - p_1,\ p_2^2 + p_1 - p_2p_0 < 1. \tag{2.7}$$

Théorème 2.2.4 *[4] Considérons l'équation d'ordre quatre suivante*

$$\lambda^4 + p_0\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 = 0 \tag{2.8}$$

où $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}$. Alors les solutions de (2.8) sont dans le disque unité ouvert si et seulement si

$$|p_0 + p_2| < 1 + p_1 + p_3,\ |p_2 - p_0| < 2(1 - p_3),\ p_1 - 3p_3 < 3$$

et

$$p_3 + p_1 + p_3^2 + p_2^2 + p_3^2p_1 + p_3p_0^2 < 1 + 2p_3p_1 + p_2p_0 + p_3p_2p_0 + p_3^3. \tag{2.9}$$

Théorème 2.2.5 ***(Théorème de Rouché[1])*** *Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert simplement connexe U du plan complexe $\mathbb{C}$. Soit K un compact contenu dans U et dont le bord Γ admet un paramétrage de classe C^1 par morceaux. On suppose que*

$$|f(\zeta) - g(\zeta)| < |g(\zeta)|,\ \forall\, \zeta \in \Gamma.$$

Alors f et g ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicité) dans K.

Théorème 2.2.6 ***(Théorème de Clark[4])*** *Supposons, dans* (2.3), *que* $p_i \in \mathbb{R},\ i \in \{0, 1, \ldots, k\}$. *Si*

$$\sum_{i=0}^{k} |p_i| < 1.$$

Alors toutes les solutions de (2.3) *sont dans le disque unité ouvert.*

Démonstration. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{C}$ par

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1}$$

et

$$g(\lambda) = -p_0\lambda^k - \cdots - p_{k-1}\lambda - p_k.$$

En appliquant le théorème de Rouché sur $\Gamma = \{\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1\}$ on trouve le résultat. ■

2.3 Équations aux différences non linéaires qui se ramènent aux équations aux différences linéaires

Nous allons donner dans cette section quelques types d'équations aux différences non linéaires qui peuvent être résolus en les transformant aux équations aux différences linéaires.

2.3.1 Équation de Riccati homogène

On considère l'équation aux différences homogène suivante

$$x(n+1)x(n) + p(n)x(n+1) + q(n)x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.10}$$

où p et q sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}$.
Tout d'abord on pose

$$y(n) = \frac{1}{x(n)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Alors

$$x(n) = \frac{1}{y(n)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

et

$$x(n+1) = \frac{1}{y(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Substituons (2.12) et (2.13) dans (2.10) on trouve

$$\frac{1}{y(n+1)}\frac{1}{y(n)} + p(n)\frac{1}{y(n+1)} + q(n)\frac{1}{y(n)} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Multiplions cette équation par $y(n)y(n+1)$ on obtient

$$1 + p(n)y(n) + q(n)y(n+1) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Il est clair que l'équation (2.14) est une équation aux différences linéaire d'ordre un.

2.3.2 Équation de Riccati non homogène

Maintenant on considère l'équation aux différences non homogène suivante

$$x(n+1)x(n) + p(n)x(n+1) + q(n)x(n) = g(n), \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.15}$$

où p, q et g sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}$.
Pour résoudre cette équation, on utilise un changement de variable différent de (2.11).

On pose

$$x(n) = \frac{y(n+1)}{y(n)} - p(n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Alors

$$x(n+1) = \frac{y(n+2)}{y(n+1)} - p(n+1), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Substituons (2.16) et (2.17) dans (2.15) on trouve

$$\left(\frac{y(n+2)}{y(n+1)} - p(n+1)\right)\left(\frac{y(n+1)}{y(n)} - p(n)\right) + p(n)\left(\frac{y(n+2)}{y(n+1)} - p(n+1)\right)$$

$$+q(n)\left(\frac{y(n+1)}{y(n)} - p(n)\right) = g(n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.18}$$

Donc

$$\frac{y(n+2)}{y(n)} - p(n)\frac{y(n+2)}{y(n+1)} - p(n+1)\frac{y(n+1)}{y(n)} + p(n)\frac{y(n+2)}{y(n+1)}$$

$$+q(n)\frac{y(n+1)}{y(n)} - p(n)q(n) = g(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

D'où

$$\frac{y(n+2)}{y(n)} + (q(n) - p(n+1))\frac{y(n+1)}{y(n)} - p(n)q(n) = g(n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.19}$$

Multiplions (2.19) par $y(n)$ on obtient

$$y(n+2) + (q(n) - p(n+1))\, y(n+1) - (p(n)q(n) + g(n))y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.20}$$

c'est une équation aux différences linéaire homogène d'ordre deux.

2.3.3 Équation de Riccati généralisée

Soit l'équation aux différences

$$x(n+1) = \frac{a(n)x(n) + b(n)}{c(n)x(n) + d(n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.21}$$

où a, b, c et d sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}$ telles que $c(n) \neq 0$ et $a(n)d(n) - b(n)c(n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

On pose

$$c(n)x(n) + d(n) = \frac{y(n+1)}{y(n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.22}$$

de (2.22) on trouve

$$x(n) = \frac{y(n+1)}{c(n)y(n)} - \frac{d(n)}{c(n)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.23}$$

Substituons (2.23) dans (2.21) on obtient

$$\frac{y(n+2)}{c(n+1)y(n+1)} - \frac{d(n+1)}{c(n+1)} = \frac{a(n)\left(\frac{y(n+1)}{c(n)y(n)} - \frac{d(n)}{c(n)}\right) + b(n)}{c(n)\left(\frac{y(n+1)}{c(n)y(n)} - \frac{d(n)}{c(n)}\right) + d(n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.24}$$

ce qui implique

$$\frac{y(n+2)}{c(n+1)y(n+1)} - \frac{d(n+1)}{c(n+1)} = \frac{a(n)\left(\frac{y(n+1)}{c(n)y(n)} - \frac{d(n)}{c(n)}\right) + b(n)}{\frac{y(n+1)}{y(n)}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.25}$$

Multiplions (2.25) par $c(n+1)y(n+1)$ on trouve

$$\begin{aligned} y(n+2) - d(n+1)y(n+1) = \frac{a(n)}{c(n)}c(n+1)y(n+1) - \frac{a(n)}{c(n)}d(n)c(n+1)y(n+1) \\ +b(n)c(n+1)y(n), \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} y(n+2) - \left(d(n+1) + \frac{c(n+1)}{c(n)}a(n)\right)y(n+1) \\ + (a(n)d(n) - b(n)c(n))\frac{c(n+1)}{c(n)}y(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

C'est une équation aux différences linéaire d'ordre deux.

2.3.4 Équation de type $h\left(n, \frac{x(n+1)}{x(n)}\right) = 0$

On considère l'équation aux différences

$$h\left(n, \frac{x(n+1)}{x(n)}\right) = 0, \; n \in \mathbb{N} \tag{2.28}$$

où h est linéaire. Pour résoudre cette équation aux différences non linéaires, on pose

$$y(n+1) = \frac{x(n+1)}{x(n)},$$

donc l'équation (2.28) devient une équation aux différences linéaire de la forme

$$h(n, y(n)) = 0, \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.29}$$

2.3.5 Équation de la forme $(x(n+k))^{r_1} \cdots (x(n))^{r_{k+1}} = g(n)$

Soit l'équation aux différences

$$(x(n+k))^{r_1}(x(n+k-1))^{r_2} \cdots (x(n))^{r_{k+1}} = g(n), \ n \in \mathbb{N} \tag{2.30}$$

où $r_i, i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$ sont des nombres réels. Pour résoudre ce type d'équations aux différences non linéaires, on utilise le changement de variable suivant

$$y(n) = ln(x(n))$$

donc on obtient l'équation aux différences linéaire suivante

$$r_1 y(n+k) + r_2 y(n+k-1) + \cdots + r_{k+1} y(n) = 0, \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.31}$$

2.4 Étude du comportement des solutions d'une équation aux différences non linéaire

Considérons le problème suivant [3]

$$x(n+1) = \alpha + \frac{x(n-1)}{(x(n))^k}, \ \ n \in \mathbb{N}, \tag{2.32}$$

où $x(-1), \ x(0) \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 2.4.1 *Toute solution de l'équation* (2.32) *est strictement positive.*

Lemme 2.4.1 *L'équation* (2.32) *admet un seul point d'équilibre* $\overline{x} > 1$.

Démonstration. Soit $\overline{x} \in \mathbb{R}_+^*$ un point d'équilibre de l'équation (2.32), alors

$$\overline{x} = \alpha + \frac{\overline{x}}{\overline{x}^k},$$

donc

$$\overline{x}^k - \alpha\overline{x}^{k-1} - 1 = 0,$$

d'où

$$\overline{x}^{k-1}(\overline{x} - \alpha - \overline{x}^{1-k}) = 0.$$

Alors les points d'équilibres de l'équation (2.32) sont les zéros de la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = x - x^{1-k} - \alpha. \tag{2.33}$$

On distingue deux cas

Cas $\mathbf{k = 1}$ La fonction $g(x)$ devient

$$g(x) = x - \alpha - 1,$$

donc l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique $x = \alpha + 1 > 1$.

Cas $\mathbf{k > 1}$ On a

$$g'(x) = 1 - (1-k)x^{-k} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*,$$

donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et comme

$$g(1) = -\alpha < 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty,$$

alors l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique $x > 1$.

■

Lemme 2.4.2 *L'équation linéaire associée à l'équation* (2.32) *est*

$$y(n+1) = \frac{-k}{\overline{x}^k} y(n) + \frac{1}{\overline{x}^k} y(n-1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. Considérons la fonction

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y)=\alpha+\dfrac{y}{x^k}, \end{array}$$

f est une fonction continue et différentiable donc l'équation linéaire associée à l'équation (2.32) est

$$y(n+1)=p_0y(n)+p_1y(n-1),\quad n\in\mathbb{N},$$

avec

$$p_0=\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},\overline{x})=\frac{-k}{\overline{x}^k}\qquad \text{et}\qquad p_1=\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x},\overline{x})=\frac{1}{\overline{x}^k}.$$

■

Théorème 2.4.1 *L'équation* (2.32) *admet une solution périodique de période deux si et seulement si* $(x(-1),x(0))$ *est une solution du système*

$$\begin{cases} x &= \alpha+\dfrac{x}{y^k}, \\ y &= \alpha+\dfrac{y}{x^k}. \end{cases}\tag{2.34}$$

Démonstration. Soit $\{x(n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.32).

i) Supposons que $\{x(n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ est une solution périodique de période deux, alors

$$x(-1)=x(1)=\alpha+\frac{x(-1)}{(x(0))^k}$$

et

$$\begin{aligned} x(0)=x(2) &= \alpha+\frac{x(0)}{(x(1))^k} \\ &= \alpha+\frac{x(0)}{(x(-1))^k}. \end{aligned}$$

Ce qui donne que $(x(-1),x(0))$ est une solution du système (2.34).

ii) Maintenant supposons que $(x(-1),x(0))$ est une solution du système (2.34) et montrons que $\{x(n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ est une solution périodique de période deux.

On a

$$x(1)=\alpha+\frac{x(-1)}{(x(0))^k}\quad \text{et}\quad x(2)=\alpha+\frac{x(0)}{(x(1))^k},$$

comme $(x(-1), x(0))$ est une solution du système (2.34), alors

$$x(-1) = \alpha + \frac{x(-1)}{(x(0))^k} \quad \text{et} \quad x(0) = \alpha + \frac{x(0)}{(x(-1))^k},$$

donc

$$x(1) = x(-1) \quad \text{et} \quad x(2) = x(0),$$

et par induction on trouve que $\{x(n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ est une solution périodique de période deux.

■

Lemme 2.4.3 *Soit $\alpha > 1$, alors toute solution de l'équation* (2.32) *est bornée.*

Démonstration. Soit $\{x(n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.32).
De l'équation (2.32) on trouve

$$x(n) > \alpha, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

donc

$$\frac{1}{(x(n))^k} < \frac{1}{\alpha^k}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

alors

$$x(n+1) < \alpha + \frac{x(n-1)}{\alpha^k}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Posons $\beta = \dfrac{1}{\alpha^k}$, on aura donc

$$x(n+1) < \alpha + \beta x(n-1), \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

ce qui donne

$$x(2) < \alpha + \beta x(0) \text{ et } x(3) < \alpha + \beta x(1),$$

et par recurrence on peut montrer les estimations suivantes

$$x(2n+1) < \alpha(1 + \beta + \beta^2 + \cdots + \beta^{n-1}) + \beta^n x(1), \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et

$$x(2n) < \alpha(1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{n-1}) + \beta^n x(0),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors

$$x(2n+1) < \frac{\alpha(1-\beta^n)}{1-\beta} + \beta^n x(1),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et

$$x(2n) < \frac{\alpha(1-\beta^n)}{1-\beta} + \beta^n x(0),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme $\alpha > 1$ alors $\beta < 1$, donc

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^*,\ x(n) \leq \frac{\alpha}{1-\beta},\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_1}$$

■

Théorème 2.4.2 *Si* $k(k+1)^{\frac{1-k}{k}} < \alpha$, *alors le point d'équilibre* $\overline{x}$ *de l'équation* (2.32) *est asymptotiquement stable.*

Démonstration. D'après le Lemme 2.4.2 on trouve que l'équation caractéristique associée à l'équation (2.32) autour du point $\overline{x}$ est

$$\lambda^2 + \frac{k}{\overline{x}^k}\lambda - \frac{1}{\overline{x}^k} = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} |p_0| + |p_1| &= \left|\frac{-k}{\overline{x}^k}\right| + \left|\frac{1}{\overline{x}^k}\right| \\ &= \frac{k+1}{\overline{x}^k}, \end{aligned}$$

D'autre part, on a la fonction g définie par (2.33) est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$g((k+1)^{\frac{1}{k}}) = k(k+1)^{\frac{1-k}{k}} - \alpha < 0 = g(\overline{x}),$$

donc

$$\overline{x} > (k+1)^{\frac{1}{k}},$$

d'où

$$|p_1| + |p_2| < 1.$$

Donc d'après le théorème de Clark, $\overline{x}$ est asymptotiquement stable. ■

Théorème 2.4.3 *Si $\alpha > k^{\frac{1}{k}} \geq 1$, alors $\overline{x}$ est globalement stable.*

Démonstration.

i) Tout d'abord on va montrer que

$$\alpha > k^{\frac{1}{k}} \geq 1 \Longrightarrow k(k+1)^{\frac{1-k}{k}} < \alpha,$$

supposons le contraire i.e.,

$$k(k+1)^{\frac{1-k}{k}} \geq \alpha,$$

alors

$$k(k+1)^{\frac{1-k}{k}} \geq \alpha > k^{\frac{1}{k}},$$

donc

$$(k+1)^{\frac{1-k}{k}} > k^{\frac{1-k}{k}},$$

d'où

$$(k+1)^{\frac{k-1}{k}} < k^{\frac{k-1}{k}},$$

posons maintenant

$$h(x) = x^{\frac{k}{k-1}}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad h'(x) = \frac{k}{k-1} x^{\frac{1}{k-1}} \geq 0,$$

donc h est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors

$$h((k+1)^{\frac{k-1}{k}}) < h(k^{\frac{k-1}{k}}),$$

d'où

$$k+1 < k,$$

c'est une contradiction, donc

$$k(k+1)^{\frac{1-k}{k}} < \alpha,$$

et d'après le Théorème 2.4.2, $\overline{x}$ est asymptotiquement stable.

ii) Soit $\{x(n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution de l'équation (2.32).

Montrons que

$$\lim_{n\to+\infty} x(n) = \overline{x}.$$

Du Lemme 2.4.3, on a $\{x(n)\}_{n=-1}^{+\infty}$ est bornée. Soient

$$a = \liminf_{n\to+\infty} x(n) \quad \text{et} \quad b = \limsup_{n\to+\infty} x(n),$$

alors

$$\forall \varepsilon \in \,]\, 0, a\, [, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \;\; \forall n \geq n_0, \quad a - \varepsilon \leq x(n) \leq b + \varepsilon,$$

il résulte de cette double inégalité que

$$\alpha + \frac{a-\varepsilon}{(b+\varepsilon)^k} \leq x(n+1) \leq \alpha + \frac{b+\varepsilon}{(a-\varepsilon)^k}, \quad \forall n \geq n_0 + 1,$$

donc

$$\alpha + \frac{a-\varepsilon}{(b+\varepsilon)^k} \leq a \leq b \leq \alpha + \frac{b+\varepsilon}{(a-\varepsilon)^k}.$$

Comme ε est arbitraire on aura

$$\alpha + \frac{a}{b^k} \leq a \leq b \leq \alpha + \frac{b}{a^k}, \tag{2.35}$$

donc

$$\alpha b^k a^{k-1} + a^k \leq a^k b^k \leq \alpha a^k b^{k-1} + b^k,$$

alors

$$\alpha b^k a^{k-1} - \alpha a^k b^{k-1} \leq b^k - a^k,$$

d'où

$$\alpha b^{k-1} a^{k-1}(b-a) \leq b^k - a^k, \tag{2.36}$$

supposons que $b \neq a$, donc l'inégalité (2.36) implique

$$\alpha b^k a^{k-1} \leq \frac{b^k - a^k}{b-a}.$$

Posons maintenant $f(x) = x^k$, f vérifie les conditions du théorème des accroissements finis, donc il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Ce qui donne

$$\frac{b^k - a^k}{b - a} = kc^{k-1},$$

et comme $c \in]a, b[$, alors

$$\frac{b^k - a^k}{b - a} < kb^{k-1},$$

donc

$$\alpha b^{k-1} a^{k-1} \leq \frac{b^k - a^k}{b - a} < kb^{k-1},$$

d'où

$$\alpha a^{k-1} < k,$$

d'après ce qui précède on a $\alpha < a$, donc

$$\alpha \alpha^{k-1} < \alpha a^{k-1} < k,$$

d'où

$$\alpha^k < k.$$

C'est une contradiction avec $\alpha > k^{\frac{1}{k}}$, donc $a = b$. D'après les inégalités (2.35) et comme $a = b$ on a

$$\begin{cases} \alpha + \dfrac{b}{b^k} \leq b \leq \alpha + \dfrac{b}{b^k}, \\ \alpha + \dfrac{a}{a^k} \leq a \leq \alpha + \dfrac{a}{a^k}, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} b = \alpha + \dfrac{b}{b^k}, \\ a = \alpha + \dfrac{a}{a^k}, \end{cases}$$

et comme $\overline{x}$ est le seul point d'équilibre de l'équation (2.32), alors

$$a = b = \overline{x}.$$

On a affirmé que

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = a = b = \overline{x},$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} x(n) = \overline{x}.$$

■

2.5 Exercices

Exercice 2.5.1 *Déterminer la solution de chaque des équations aux différences suivantes*

1) $x(n+1) = \frac{1}{x(n)x(n-1)}, \ n \in \mathbb{N}, \ \ x(-1), x(0) \in \mathbb{R}_+^*.$

2) $x(n+1) = \frac{1+x(n)}{x(n-1)}, \ n \in \mathbb{N}, \ x(-1), x(0) \in \mathbb{R}_+^*.$

3) $x(n+1) = \frac{1+x(n)+x(n-1)}{x(n-2)}, \ n \in \mathbb{N}, \ x(-2), x(-1), x(0) \in \mathbb{R}_+^*.$

4) $x(n+1) = \frac{x(n)x(n-2)}{x(n-1)x(n-3)}, \ n \in \mathbb{N}, \ x(-3), x(-2), x(-1), x(0) \in \mathbb{R}_+^*.$

Exercice 2.5.2 *Considérons l'équation aux différences suivante*

$$x(n+1) = \frac{\beta x(n)}{1 + x(n-2)}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.37}$$

où $\beta, x(-2), x(-1), x(0) \in \mathbb{R}_+$.

1. *Montrer que* $\overline{x} = 0$ *est un point d'équilibre de l'équation* (2.37) *globalement stable si* $\beta < 1$ *et instable si* $\beta > 1$.
2. *Déterminer les points d'équilibre* $\overline{y} \in \mathbb{R}_+^*$ *de l'équation* (2.37) *puis trouver une condition nécessaire et suffisante pour que* $\overline{y}$ *soit asymptotiquement stable.*

Exercice 2.5.3 *On considère l'équation aux différences suivante*

$$x(n+1) = \frac{2x(n)+3}{3x(n)+2}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.38}$$

(i) *Transformer cette équation à une équation aux différences linéaire puis résoudre cette dernière.*

(ii) *Déduire la solution générale de l'équation* (2.38).

Exercice 2.5.4 *Mêmes questions de l'exercice 2.5.3 pour les équations aux différences suivantes*

1) $x^2(n+1) - 3x(n+1)x(n) + 2x^2(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$

2) $x(n+2) = \frac{x^2(n+1)}{x^2(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Chapitre 3

Systèmes d'équations aux différences

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des systèmes d'équations aux différences linéaires. Dans la deuxième partie nous présentons quelques notions de base et des résultats fondamentaux concernant les systèmes d'équations aux différences non linéaires. Nous finissons le chapitre par l'étude du comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations aux différences non linéaires et d'une série d'exercices.

3.1 Systèmes d'équations aux différences linéaires

3.1.1 Systèmes autonomes

Soient $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_s(\mathbb{R})$ une matrice (constante) régulière, B est une fonction définie sur $\mathbb{N}_{n_0}$ avec $B(n) \in \mathbb{R}^s$ et $s \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Définition 3.1.1 *On appelle système d'équations aux différences linéaire autonome d'ordre 1 non homogène l'équation*

$$Y(n+1) = AY(n) + B(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{3.1}$$

Définition 3.1.2 *Le système*

$$Y(n+1) = AY(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}, \tag{3.2}$$

est dit homogène.

Par récurrence on peut montrer la Proposition suivante

Proposition 3.1.1 **1)** *Le système* (3.2) *avec* $Y(n_0) = Y_0$ *a une solution unique et cette solution est*

$$Y(n) = A^{n-n_0}Y_0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{3.3}$$

2) *Le système* (3.1) *avec* $Y(n_0) = Y_0$ *a une solution unique et cette solution est*

$$Y(n) = A^{n-n_0}Y_0 + \sum_{i=n_0}^{n-1} A^{n-i-1}B(i), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{3.4}$$

3.1.2 Systèmes non autonomes homogènes

Soient $A = (a_{ij}(n))_{i,j} \in M_s(\mathbb{R})$ une matrice régulière sur $\mathbb{N}_{n_0}$.

Définition 3.1.3 *On appelle système d'équations aux différences non autonome homogène l'équation*

$$Y(n+1) = A(n)Y(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{3.5}$$

Par récurrence on peut montrer la proposition suivante

Proposition 3.1.2 *Le système* (3.5) *avec* $Y(n_0) = Y_0$ *admet une solution unique et cette solution est*

$$Y(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) \right) Y_0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{3.6}$$

où

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) = \begin{cases} A(n-1)A(n-2)\ldots A(n_0) & \text{si } n > n_0 \\ I \quad \text{si } n = n_0 \end{cases}$$

Définition 3.1.4 *Soit* $\Phi(n) \in M_s(\mathbb{R})$. *On dit que* Φ *est une matrice fondamentale pour le système* (3.5) *si* Φ *est régulière sur* $\mathbb{N}_{n_0}$ *et satisfait l'équation aux différences matricielle suivante*

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{3.7}$$

Remarque 3.1.1 *Une matrice dont les colonnes sont des solutions linéairement indépendantes du système* (3.5) *est une matrice fondamentale pour ce système.*

Théorème 3.1.1 *[2] L'équation aux différences matricielle* (3.7) *admet une solution unique* Ψ *qui vérifie* $\Psi(n_0) = I$.

Maintenant on considère $\Phi(n)$ une matrice fondamentale pour le système (3.5). On note

$$\Phi(n, m) = \Phi(n)\Phi^{-1}(m), \quad n \in \mathbb{N}_m. \tag{3.8}$$

Lemme 3.1.1 *On a les assertions suivantes*

1) $\Phi^{-1}(n, m) = \Phi(m, n)$.

2) $\Phi(n, m)$ *est une matrice fondamentale pour le système* (3.5).

3) $\Phi(n, r)\Phi(r, m) = \Phi(n, m), \ n \in \mathbb{N}_r, r \in \mathbb{N}_m$.

4) $\Phi(n, m) = \prod_{i=m}^{n-1} A(i)$.

Démonstration.

1) De (3.8) on trouve

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(n, m) &= (\Phi^{-1})^{-1}(m)\Phi^{-1}(n) \\ &= \Phi(m)\Phi^{-1}(n) \\ &= \Phi(m, n). \end{aligned}$$

2) D'aprés **1)** on a $\Phi(n, m)$ est régulière donc pour montrer qu'elle est une matrice fondamentale pour le système (3.5) il suffit de vérifier que $\Phi(n, m)$ est une solution de l'équation (3.7).

De (3.8) on a

$$\Phi(n + 1, m) = \Phi(n + 1)\Phi^{-1}(m)$$

et comme $\Phi(n)$ est une matrice fondamentale pour le système (3.5), alors

$$\begin{aligned} \Phi(n + 1, m) &= A(n)\Phi(n)\Phi^{-1}(m) \\ &= A(n)\Phi(n, m). \end{aligned}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}_r,\ r \in \mathbb{N}_m$. Par définition on a

$$\begin{aligned}\Phi(n,r)\Phi(r,m) &= \Phi(n)\Phi^{-1}(r)\Phi(r)\Phi^{-1}(m)\\ &= \Phi(n)I\Phi^{-1}(m)\\ &= \Phi(n,m).\end{aligned}$$

4) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_m$.

(i) pour $n = m$ évident.

(ii) Supposons que $\Phi(n,m) = \prod_{i=m}^{n-1} A(i)$. Alors (3.7) et (3.8) impliquent

$$\begin{aligned}\Phi(n+1,m) &= A(n)\Phi(n,m)\\ &= A(n)\prod_{i=m}^{n-1} A(i)\\ &= \prod_{i=m}^{n} A(i).\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.1.1 *Il existe une matrice fondamentale unique* $\Phi(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)$ *pour le système* (3.5) *vérifiant* $\Phi(n_0) = I$.

Lemme 3.1.2 *La solution générale du système* (3.5) *s'écrit sous la forme*

$$Y_h(n) = \Phi(n)C, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}$$

où $\Phi(n)$ *est une matrice fondamentale pour ce système et* $C = (c_1, c_2, \ldots, c_s)^t \in \mathbb{R}^s$.

Remarque 3.1.2 *Comme dans la deuxième section du chapitre I, on peut montrer que l'ensemble des solutions du système* (3.5) *est un espace vectoriel de dimension* s.

3.1.3 Systèmes non autonomes non homogènes

Soient $A = (a_{ij}(n))_{i,j} \in M_s(\mathbb{R})$ une matrice régulière. B est une fonction définie sur $\mathbb{N}_{n_0}$ avec $B(n) \in \mathbb{R}^s$ et $s \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

Définition 3.1.5 *On appelle système d'équations aux différences non autonome non homogène l'équation suivante*

$$Y(n+1) = A(n)Y(n) + B(n), \ \ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{3.9}$$

Proposition 3.1.3 *Toute solution du système* (3.9) *s'écrit sous la forme*

$$Y(n) = Y_h(n) + Y_p(n), \ \ n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{3.10}$$

où $\{Y_h(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *est la solution générale du système* (3.5) *et* $\{Y_p(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *est une solution particulière du système* (3.9).

Démonstration. Soient $\{Y_p(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une solution particulière du système (3.9) et $\{Y(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ une autre solution du même système. Alors si on pose $Z(n) = (Y_h - Y_p)(n), \ \ n \in \mathbb{N}_{n_0}$ on trouve

$$\begin{aligned} Z(n+1) &= Y_h(n+1) - Y_p(n+1) \\ &= A(n)Y_h(n) + B(n) - A(n)Y_p(n) - B(n) \\ &= A(n)Z(n), \ \ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \end{aligned}$$

Donc $\{Z(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ est une solution du système (3.5), ce qui donne le résultat. ■

Corollaire 3.1.2 *Toute solution du système* (3.9) *s'écrit sous la forme*

$$Y(n) = \Phi(n)C + Y_p(n), \ \ n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{3.11}$$

où $\Phi(n)$ *est une matrice fondamentale pour le système* (3.5).

Lemme 3.1.3 *La suite* $\{Y_p(n)\}_{n=n_0}^{+\infty}$ *définie par*

$$Y_p(n) = \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n, r+1)B(r) \tag{3.12}$$

est une solution particulière du système (3.9).

Démonstration. En utilisant (3.7), (3.8) et (3.12) on trouve

$$\begin{aligned}
Y_p(n+1) &= \sum_{r=n_0}^{n} \Phi(n+1, r+1)B(r) \\
&= \sum_{r=n_0}^{n-1} \Phi(n+1, r+1)B(r) + \Phi(n+1, n+1)B(n) \\
&= \sum_{r=n_0}^{n-1} A(n)\Phi(n, r+1)B(r) + B(n) \\
&= A(n)Y_p(n) + B(n).
\end{aligned}$$

■

De la Proposition 3.1.3 et le Lemme 3.1.3 on trouve le théorème suivant

Théorème 3.1.2 *Le système* (3.9) *avec* $Y(n_0) = Y_0$ *admet une solution unique et cette solution est*

$$Y(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right) Y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} A(i)\right) B(r), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \qquad (3.13)$$

3.2 Transformation d'une équation aux différences linéaire d'ordre supérieur en un système d'équations aux différences linéaires d'ordre 1

Dans cette section on va voir comment transformer une équation aux différences d'ordre supérieur en un système d'équations aux différences d'ordre 1. Considérons l'équation aux différences (1.18).

Si on pose

$$\begin{aligned}
x_1(n) &= y(n)\\
x_2(n) &= y(n+1) = x_1(n+1)\\
x_3(n) &= y(n+2) = x_2(n+1)\\
x_4(n) &= y(n+3) = x_3(n+1)\\
&\vdots\\
x_k(n) &= y(n+k-1) = x_{k-1}(n+1)
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= x_2(n)\\
x_2(n+1) &= x_3(n)\\
x_3(n+1) &= x_4(n)\\
x_4(n+1) &= x_5(n)\\
&\vdots\\
x_{k-1}(n+1) &= x_k(n)\\
x_k(n+1) &= y(n+k) = -p_1(n)x_k(n) - p_2(n)x_{k-1}(n) - \cdots - p_k(n)x_1(n) + g(n)
\end{aligned}$$

ce qui donne le système d'équations aux différences linéaires non autonome non homogène suivant

$$X(n+1) = A(n)X(n) + B(n),\ n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{3.14}$$

avec

$$X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n)\\ x_2(n)\\ x_3(n)\\ \vdots\\ x_k(n) \end{pmatrix},\ B(n) = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ g(n) \end{pmatrix}.$$

et

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_k(n) & -p_{k-1}(n) & -p_{k-2}(n) & \dots & -p_1(n) \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.2.1 *1. Si on considère l'équation aux différences linéaire à coefficients constants* (1.57), *alors le système équivalent à cette équation est* (3.14) *avec* $X(n)$, $B(n)$ *sont comme dans le cas précédent et*

$$A(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_k & -p_{k-1} & -p_{k-2} & \dots & -p_1 \end{pmatrix}.$$

2. Si $g(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_{n_0}$. *Alors on obtient un système homogène.*

3.3 Systèmes d'équations aux différences non linéaires

3.3.1 Définitions et résultats généraux

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et

$$f : I^{k+1} \times J^{r+1} \to I,\ g : I^{k+1} \times J^{r+1} \to J$$

deux fonctions de classe C^1. On considère le système d'équations aux différences suivant

$$\begin{cases} x(n+1) = f(x(n), x(n-1), \dots, x(n-k), y(n), y(n-1), \dots, y(n-r)), \\ y(n+1) = g(x(n), x(n-1), \dots, x(n-k), y(n), y(n-1), \dots, y(n-r)), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.15}$$

où r est un entier strictement positif. Alors, si on associe ce système avec un ensemble des conditions initiales $(x(i), y(i)) \in I \times J$, $i \in \{-k, \dots, 0\}$ et $j \in \{-r, \dots, 0\}$, le système (3.15) admet une solution unique $\{(x(n), y(n))\}_{n=-l}^{+\infty}$, où $l = min(r, k)$.
L'écriture vectorielle du système (3.15) est

$$X(n+1) = F(X(n)), \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.16}$$

où

$$\begin{array}{cccc} F: & I^{k+1} \times J^{r+1} & \rightarrow & I^{k+1} \times J^{r+1} \\ & \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix} & \mapsto & F\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_r) \\ u_0 \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ g(u_0, u_1, \dots, u_k, v_0, v_1, \dots, v_r) \\ v_0 \\ \vdots \\ v_{r-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$X(n) = (x(n),\, x(n-1), \dots, x(n-k), y(n),\, y(n-1), \dots, y(n-r))^t .$$

Définition 3.3.1 *Une solution $\{(x(n), y(n))\}_{n=-l}^{+\infty}$ du système (3.15) est éventuellement périodique de période $p \in \mathbb{N}$ si $\exists\, n_1 \geq -l$, tel que*

$$x(n+p) = x(n) \;\; et \;\; y(n+p) = y(n), \;\; \forall n \in \mathbb{N}_{n_1}.$$

Si $n_1 = -l$, on dit que $\{(x(n), y(n))\}_{n=-l}^{+\infty}$ est périodique de période p.

Définition 3.3.2 *Un point $(\overline{x}, \overline{y}) \in I \times J$ est dit point d'équilibre du système (3.15) si*

$$\overline{x} = f(\overline{x}, \overline{x}, \dots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \dots, \overline{y}),$$

et

$$\overline{y} = g(\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \overline{y}, \ldots, \overline{y}).$$

Définition 3.3.3 *Un vecteur $\overline{X} \in I^{k+1} \times J^{r+1}$ est dit point d'équilibre du système (3.16) si*

$$\overline{X} = F(\overline{X}).$$

Remarque 3.3.1 *Il est clair que $(\overline{x}, \overline{y})$ est un point d'équilibre du système (3.15) si et seulement si $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \ldots, \overline{y}, \overline{y})$ est un point d'équilibre du système (3.16).*

Dans tout ce qui suit on désigne par $\|.\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^{k+r+2}$.

Définition 3.3.4 *Soit $\overline{X}$ un point d'équilibre du système (3.16).*

1. *On dit que $\overline{X}$ est stable si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que si $\{X(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ est une solution du système (3.16) avec la condition initiale $X(0) = X_0 \in I^{k+r+2}$ vérifiant*

$$\|X_0 - \overline{X}\| < \delta,$$

alors

$$\|X(n) - \overline{X}\| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sinon on dit que $\overline{X}$ est instable.

2. *On dit que $\overline{X}$ est asymptotiquement stable si $\overline{X}$ est stable, et s'il existe $\gamma > 0$ tel que si $\{X(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ est une solution du système (3.16) avec la condition initiale $X_0 \in I^{k+r+2}$ vérifiant*

$$\|X(n) - \overline{X}\| < \gamma,$$

alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} X(n) = \overline{X}.$$

3. *On dit que $\overline{X}$ est globalement stable si $\overline{X}$ est stable et si pour toute solution $\{X(n)\}_{n=0}^{+\infty}$ du système (3.16) avec la condition initiale $X_0 \in I^{k+r+2}$, on a*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} X(n) = \overline{X}.$$

Définition 3.3.5 *Soit $\overline{X}$ un point d'équilibre du système (3.16). Supposons que $F \in C^1(I^{k+r+2}, I^{k+r+2})$. On appelle système linéaire associé au système (3.16) autour du point $\overline{X}$ le système*

$$X(n+1) = AX(n), \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.17}$$

où $A = D_F$ est la matrice jacobienne de F au point $\overline{X}$.

Théorème 3.3.1 *[5] Considérons le système (3.16) où $F \in C^1(I^{k+r+2}, I^{k+r+2})$, et soit $\overline{X}$ un point d'équilibre de ce système.*

1. *Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne D_F se trouvent dans le disque unité ouvert, alors le point d'équilibre $\overline{X}$ est asymptotiquement stable.*
2. *Si au moins une des valeurs propres de la matrice jacobienne D_F est de module strictement supérieur à 1, alors le point d'équilibre $\overline{X}$ est instable.*

Définition 3.3.6 *Soient $\{(x(n), y(n))\}_{n=-l}^{+\infty}$ une solution du système (3.15) et $(\overline{x}, \overline{y})$ un point d'équilibre du même système.*
On dit que $\{\left(x(n), y(n)\right)\}_{n=-l}^{+\infty}$ est oscillatoire autour du point $(\overline{x}, \overline{y})$ si $\{x(n)\}_{n=-l}^{+\infty}$ est oscillatoire autour de $\overline{x}$ ou $\{y(n)\}_{n=-l}^{+\infty}$ est oscillatoire autour de $\overline{y}$.
Si $\{x(n)\}_{n=-l}^{+\infty}$ et $\{y(n)\}_{n=-l}^{+\infty}$ sont non oscillatoires autour de $\overline{x}$ et $\overline{y}$ respectivement on dit que $\{(x(n), y(n))\}_{n=-l}^{+\infty}$ est non oscillatoire autour de $(\overline{x}, \overline{y})$.

3.3.2 Étude du comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations aux différences non linéaires

On considère le système non linéaire suivant [7]

$$x(n+1) = \frac{x(n) + x(n-1)}{A + y(n)y(n-1)}, \quad y(n+1) = \frac{y(n) + y(n-1)}{B + x(n)x(n-1)}, \quad n = 0, 1, ..., \tag{3.18}$$

où les conditions initiales $x(-1)$, $x(0)$, $y(-1)$, $y(0) \in \mathbb{R}_+$ et A, $B \in \mathbb{R}_+^* - \{2\}$.

Lemme 3.3.1 *On a*

1. *$(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ est un point d'équilibre du système (3.18).*

2. *Si $A < 2$ et $B < 2$, le système (3.18) a aussi le point d'équilibre* $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (\sqrt{2-B}, \sqrt{2-A})$.

Démonstration. Soit $(\overline{x}, \overline{y})$ un point d'équilibre du système (3.18), alors

$$\overline{x} = \frac{2\overline{x}}{A+\overline{y}^2} \quad et \quad \overline{y} = \frac{2\overline{y}}{B+\overline{x}^2}.$$

Donc

$$\overline{x}(\overline{y}^2 + A - 2) = 0 \quad et \quad \overline{y}(\overline{x}^2 + B - 2) = 0.$$

Alors

1. $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ est toujours solution de ces deux équations.
2. Si $A < 2$ et $B < 2$, on trouve la deuxième solution $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (\sqrt{2-B}, \sqrt{2-A})$.

■

Théorème 3.3.2 *Supposons $A > 2$ et $B > 2$. Alors le point d'équilibre $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ du système (3.18) est globalement stable.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ est asymptotiquement stable.
On a le système linéaire associé au système (3.18) autour du point d'équilibre $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ est

$$X(n+1) = C\ X(n), \tag{3.19}$$

où $X(n) = (x(n), x(n-1), y(n), y(n-1))^t$, C est la matrice jacobienne, en $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$, associée à la fonction vectorielle F, et

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \\ \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} & \longrightarrow & F\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(u_0, u_1, v_0, v_1) \\ u_0 \\ g(u_0, u_1, v_0, v_1) \\ v_0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f, g : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \\ \left((u_0, u_1, v_0, v_1)^t\right) & \longrightarrow & f, g\left((u_0, u_1, v_0, v_1)^t\right), \end{array}$$

où

$$f\left((u_0, u_1, v_0, v_1)^t\right) = \frac{u_0 + u_1}{A + v_0 v_1},$$

et

$$g\left((u_0, u_1, v_0, v_1)^t\right) = \frac{v_0 + v_1}{B + u_0 u_1}.$$

Donc par définition, on a

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_0}(\overline{X}) & \frac{\partial f}{\partial u_1}(\overline{X}) & \frac{\partial f}{\partial v_0}(\overline{X}) & \frac{\partial f}{\partial v_1}(\overline{X}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u_0}(\overline{X}) & \frac{\partial g}{\partial u_1}(\overline{X}) & \frac{\partial g}{\partial v_0}(\overline{X}) & \frac{\partial g}{\partial v_1}(\overline{X}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\overline{X} = (0, 0, 0, 0)$.
En utilisant les formules de f et g on trouve

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{A} & \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{B} & \frac{1}{B} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$det(C - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} \frac{1}{A} - \lambda & \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{B} - \lambda & \frac{1}{B} \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Alors l'équation caractéristique du système (3.19) autour du point $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ est

$$(\lambda^2 - \frac{1}{A}\lambda - \frac{1}{A})(\lambda^2 - \frac{1}{B}\lambda - \frac{1}{B}) = 0. \tag{3.20}$$

Soit

$$P(\lambda) = (\lambda^2 - \frac{1}{A}\lambda - \frac{1}{A})(\lambda^2 - \frac{1}{B}\lambda - \frac{1}{B}), \tag{3.21}$$

alors

$$P(\lambda) = P_1(\lambda)P_2(\lambda),$$

où

$$P_1(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{A}\lambda - \frac{1}{A}$$

et

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{B}\lambda - \frac{1}{B}.$$

Comme $A > 2$ donc $1 - \frac{2}{A} > 0$, d'où

$$P_1(0) = -\frac{1}{A} < 0, \;\; P_1(-1) = 1 > 0 \;\; et \;\; P_1(1) = 1 - \frac{2}{A} > 0.$$

Donc les deux solutions de l'équation $P_1(\lambda) = 0$ sont de valeurs absolues inférieur strictement à un.
De la même manière on trouve que les deux solutions de l'équation $P_2(\lambda) = 0$ sont de valeurs absolues inférieur strictement à 1.
Alors toutes les solutions de l'équation (3.20) sont de valeurs absolues inférieur strictement à un, donc d'après le Théorème 3.3.1 on déduit la stabilité asymptotique du point $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$.
Montrons maintenant que

$$\lim_{n \to +\infty} x(n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} y(n) = 0.$$

Du système (3.18) on a

$$x(n+1) \leq \frac{1}{A}x(n) + \frac{1}{A}x(n-1) \quad \text{et} \quad y(n+1) \leq \frac{1}{B}y(n) + \frac{1}{B}y(n-1).$$

Si on considère l'équation aux différences linéaire définie par

$$z(n+1) = \frac{1}{A}z(n) + \frac{1}{A}z(n-1), \;\; n \in \mathbb{N}$$

où $z(-1) = x(-1)$ *et* $z(0) = x(0)$, on trouve

$$0 < x(n) \leq z(n), \ \ \forall n \geq 1. \tag{3.22}$$

D'autre côté, on a

$$z(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n, \ \ \forall n \geq 1$$

où λ_1 *et* λ_2 sont les deux solutions distinctes de l'équation

$$P_1(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{A}\lambda - \frac{1}{A} = 0,$$

i.e.,

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{1+4A}}{2A}, \ \ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{1+4A}}{2A}.$$

Il est clair que $|\lambda_2| < 1$.

Montrons que $|\lambda_1| < 1$. On a

$$\begin{aligned} A > 2 \ &\Rightarrow \ 4A(A-2) > 0 \\ &\Rightarrow \ 4A^2 - 8A > 0 \\ &\Rightarrow \ 1 + 4A^2 - 4A > 1 + 4A \\ &\Rightarrow \ 2A > 1 + \sqrt{1+4A}, \end{aligned}$$

donc $|\lambda_1| < 1$, ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} z(n) = 0$. En utilisant (3.22) on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} x(n) = 0$.

De la même manière on peut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} y(n) = 0$. Ce qui achève la démonstration.

■

Théorème 3.3.3 *Supposons $A < 2$ et $B < 2$. Alors les points d'équilibre $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0,0)$ et $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (\sqrt{2-B}, \sqrt{2-A})$ du système (3.18) sont instables.*

Démonstration.

(i) Montrons que l'équation caractéristique (3.20) du système (3.19) autour du point $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ a une solution de valeur absolue supérieur strictement à 1.

On a

$$A < 2 \Rightarrow \frac{2}{A} > 1$$

donc

$$P_1(1) = 1 - \frac{2}{A} < 0.$$

D'autre part on a

$$\lim_{\lambda \to +\infty} P_1(\lambda) = +\infty,$$

alors P_1 a une racine dans l'intervalle $]1, +\infty[$.

De la même manière on peut montrer que P_2 a une racine dans l'intervalle $]1, +\infty[$. Donc le point d'équilibre $(\overline{x}_1, \overline{y}_1) = (0, 0)$ est instable.

(ii) Le système linéaire associé au système (3.18) autour du point $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (\sqrt{2-B}, \sqrt{2-A})$ est (3.19) où

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\alpha & -\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & -\alpha & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\alpha = \frac{1}{2}(2-A)^{\frac{1}{2}}(2-B)^{\frac{1}{2}}$.

Donc

$$det(C - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & -\alpha & -\alpha \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\alpha & -\alpha & \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix},$$

d'où l'équation caractéristique du système (3.19) dans ce cas est

$$\lambda^4 - \lambda^3 - (\frac{3}{4} + \alpha^2)\lambda^2 + (\frac{1}{2} - 2\alpha^2)\lambda + \frac{1}{4} - \alpha^2 = 0. \tag{3.23}$$

Soit

$$P_3(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - (\frac{3}{4} + \alpha^2)\lambda^2 + (\frac{1}{2} - 2\alpha^2)\lambda + \frac{1}{4} - \alpha^2.$$

Alors

$$P_3(1) = -4\alpha^2 < 0$$

et

$$\lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} P_3(\lambda) = +\infty,$$

d'où (3.23) a une solution λ_1 dans $]1, +\infty[$. Ce qui donne l'instabilité du point $(\overline{x}_2, \overline{y}_2) = (\sqrt{2-B}, \sqrt{2-A})$.

■

Théorème 3.3.4 *Supposons $A < 2$ et $B < 2$. Soit $\{(x(n), y(n))\}_{n=-1}^{+\infty}$ une solution du système (3.18) tels que*

(i) $x(-1),\ x(0) \geq \overline{x}_2$ *et* $y(-1),\ y(0) < \overline{y}_2$

ou

(ii) $x(-1),\ x(0) < \overline{x}_2$ *et* $y(-1),\ y(0) \geq \overline{y}_2$.

Alors $\{(x(n), y(n))\}_{n=-1}^{+\infty}$ est non oscillatoire autour du point $(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$.

Démonstration. Supposons que la condition (i) est satisfaite et montrons que la solution $\{(x(n), y(n))\}_{n=-1}^{+\infty}$ est non oscillatoire autour du point $(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$.

De (3.18), on a

$$\begin{aligned}
x(1) &= \frac{x(0)+x(-1)}{A+y(0)y(-1)} > \frac{2\overline{x}_2}{A+\overline{y}_2^2} = \overline{x}_2, \\
y(1) &= \frac{y(0)+y(-1)}{B+x(0)x(-1)} < \frac{2\overline{y}_2}{B+\overline{x}_2^2} = \overline{y}_2, \\
x(2) &= \frac{x(1)+x(0)}{A+y(1)y(0)} > \frac{2\overline{x}_2}{A+\overline{y}_2^2} = \overline{x}_2, \\
y(2) &= \frac{y(1)+y(0)}{B+x(1)x(0)} < \frac{2\overline{y}_2}{B+\overline{x}_2^2} = \overline{y}_2.
\end{aligned}$$

Par induction on trouve le résultat.

Si la condition (ii) est satisfaite la démonstration est similaire. ■

3.4 Exercices

Exercice 3.4.1 *Soient Φ une matrice fondamentale pour le système* (3.5) *et Ψ une matrice constante et régulière. Montrer que $\Phi(n)\Psi$ est une matrice fondamentale pour le système* (3.5).

Exercice 3.4.2 *Soit Φ une matrice fondamentale pour le système* (3.5).
Montrer la formule d'Abel suivante

$$\det \Phi(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} (\det A(i)) \right) \det \Phi(n_0),\ n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{3.24}$$

Déduire que la matrice $\Phi(n)$ est régulière sur $\mathbb{N}_{n_0}$ si et seulement si la matrice $\Phi(n_0)$ est régulière.

Exercice 3.4.3 *Déterminer la solution générale du système*

$$Y(n+1) = AY(n),\ n \in \mathbb{N} \tag{3.25}$$

où

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.4.4 *Résoudre le système $Y(n+1) = AY(n) + B(n),\ n \in \mathbb{N}$ dans chacun des cas suivants*

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B(n) = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B(n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B(n) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $Y(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.4.5 *Écrire sous forme d'un système d'équations aux différences linéaires chacune des équations suivantes*

1) $y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0,\ n \in \mathbb{N}.$

2) $y(n+5) - 2y(n+3) + y(n+2) + 4y(n+1) - y(n) = 16,\ n \in \mathbb{N}.$

3) $y(n+2) - ny(n+1) - \frac{n^2}{n+1}y(n) = n2^n,\ n \in \mathbb{N}.$

Bibliographie

[1] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Enseignement des sciences, Hermann, Paris, 1961.

[2] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, 3rd ed, Springer, New York, 1999.

[3] A. E. Hamza, A. Morsy, *On the recursive sequence* $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n^k}$, Applied Math. Letters, **22**(2009), 91-95.

[4] E. A. Grove, G. Ladas, *Periodicities in Nonlinear Difference Equations*, Advances in Discrete Mathematics and Applications , Volume 4, Chapman and Hall, CRS Press, 2005.

[5] V. L. Kocic, G. Ladas, *Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher order with Applications*, Kluwer Academic Publishers Dordrecht, Boston, London, Volume 256, 1993.

[6] V. Lakshmikantham, D. Trigiante, *Theory of difference equations, numerical methods and applications*, 2nd ed., Marcel Dekker, Inc., New York, 2002.

[7] Q. Zhang, W. Zhang, *On the system of nonlinear rational difference equations*, International Journal of Mathematical, Comp. Phy. Qua. Eng., **8**(2014), 688-691.