SERIE I / ELASTICITE

Exercice 1 :

$$\begin{cases} \sigma_x = -2x^2 + 3y^2 - 5z & ; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = z + 4xy - 7 \\ \sigma_y = -2y^2 & ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -3x + y + 1 \\ \sigma_z = 3x + y + 3z - 5 & ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0 \end{cases}$$

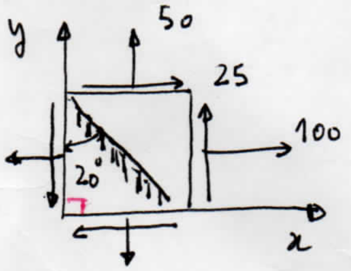
forces de volumes ?

l'equilibre est donné par l'eq différentielle d'equilibre suivante ,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x \overset{?}{=} 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y \overset{?}{=} 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z \overset{?}{=} 0 \end{cases}$$

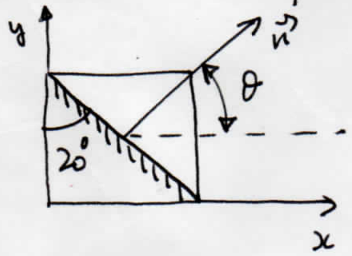
$$\rightarrow \begin{cases} -4x + 4x + 0 + F_x = 0 & \rightarrow & F_x = 0 \\ 4y - 4y + 0 + F_y = 0 & \rightarrow & F_y = 0 \\ -3 + 0 + 3 + F_z = 0 & \rightarrow & F_z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2



$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 100 \text{ MPa} \\ \sigma_y = 50 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 25 \text{ MPa} \end{cases}$$

1°/ contraintes sur un plan orienté ~~sur~~ ~~un~~ /x de 20° (voir figure)

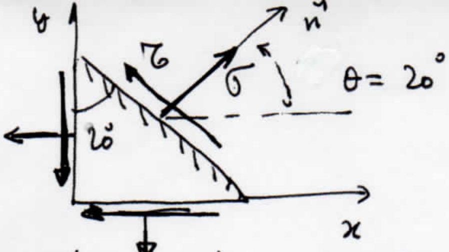


la normale $\vec{n}$ du plan en question est orienté de θ /x ,

$\Rightarrow$ on voit que $\theta = 20°$

c'est cet angle θ qui est utilisé dans les formules .

ainsi



$$\begin{cases} \sigma_\theta = \dfrac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_\theta = - \dfrac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

avec $\underline{\theta = 20°}$ → $\underline{A.N}$: $\begin{cases} \sigma_{20°} = 110{,}22 \text{ MPa} \\ \tau_{20°} = 3{,}08 \text{ MPa} \end{cases}$

2°/ Etat de contrainte principale :

l'état de contrainte principale est donné par

Contraintes pple → $\sigma_{1,2} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

leur orientation → $tg\, 2\theta_p = \dfrac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$

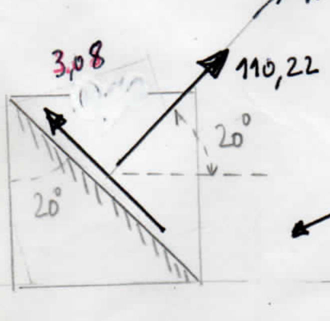
$\underline{A.N}$: $\sigma_{1,2} \begin{cases} \sigma_1 = 110{,}36 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 39{,}64 \end{cases}$, $\theta_p = 22{,}50°$

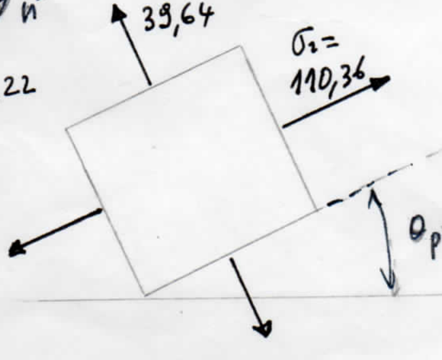
3°/ Etat de cisaillement maximum et minimum

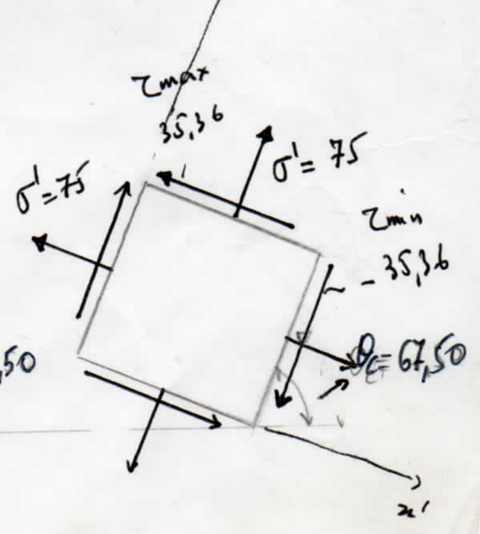
contrainte tangentielle max → $\tau_{\substack{max \\ min}} = \pm \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$

contrainte associée → $\sigma' = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$

$\underline{A.N}$/ $\begin{cases} \tau_{\substack{max \\ min}} = \pm 35{,}36 \text{ MPa} \\ \sigma' = 75 \text{ MPa} \end{cases}$, $\theta_c = \theta_p + 45° = 67{,}50°$

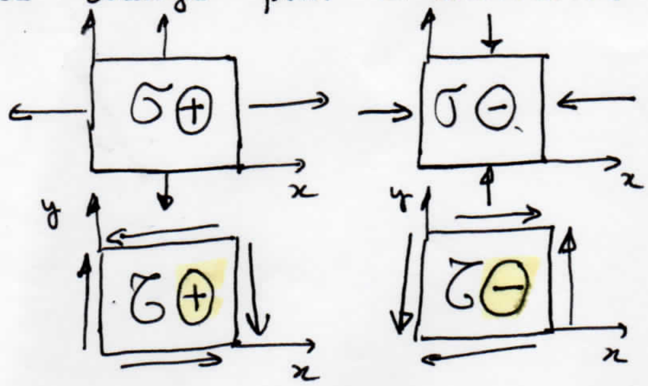






Méthode graphique du cercle de MOHR

quand on utilise la methode du cercle de MOHR, la convention de signe change pour la contrainte tangentielle. ainsi



contrainte normale (m̃ convention que pour les methodes analytiques)

contrainte tangentielle (signe inversé)

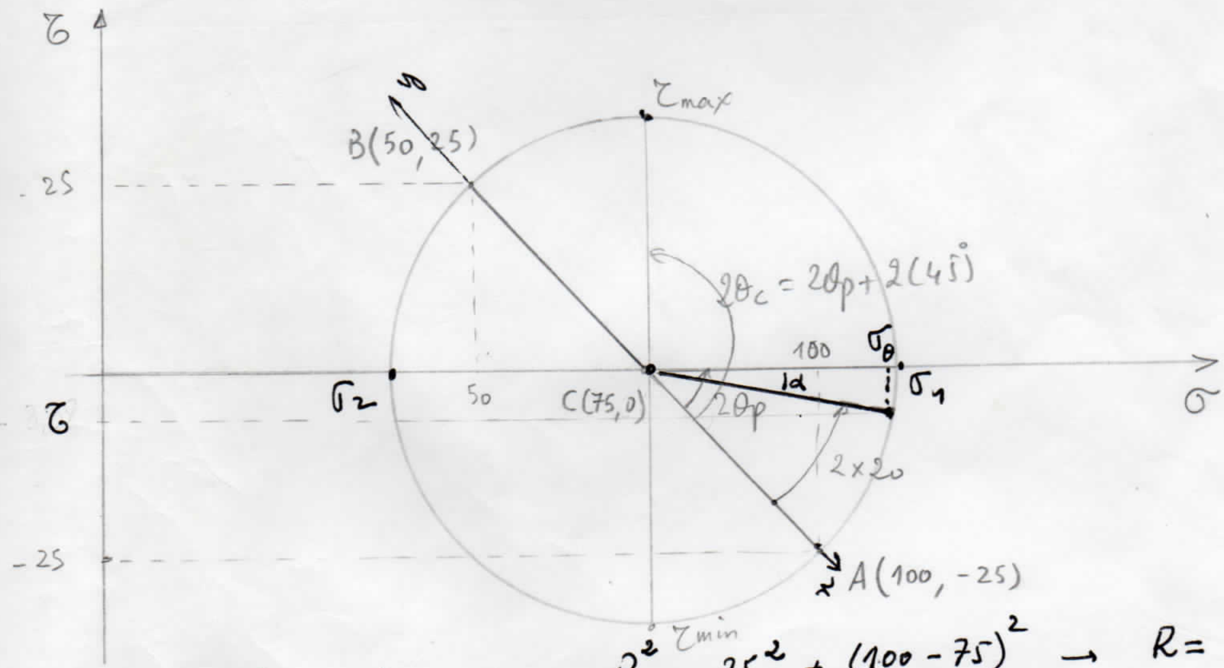
ainsi dans notre cas : pour la methode du cercle de MOHR

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 100 \text{ MPa} \\ \sigma_y = 50 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = -25 \text{ MPa} \end{cases}$$

- le centre du cercle est $C(C_x, 0) = C\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0\right) = (75, 0)$
- le point $A(\sigma_x, \tau_{xy}) \Rightarrow A(100, -25)$

$B(\sigma_y, -\tau_{xy}) \Rightarrow B(50, +25)$

on trace le cercle de centre C et de diamètre AB



Rayon du cercle $\rightarrow R^2 = 25^2 + (100-75)^2 \rightarrow R = 35,36$

graphiquement $\rightarrow \operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{25}{100-75} = 1 \rightarrow 2\theta_p = 45°$

$\theta_p = 22,50$

1°/ Contrainte sur un plan à 20°

ce plan se trouve à (2 × 20°) sur le cercle.

ainsi σ_θ et τ_θ se trouve par projection, il suffit de trouver l'angle α . .

$$\alpha = 2\theta_p - 2 \times 20° = 5° \Rightarrow$$

graphiquement → $\sigma_\theta = R\cos\alpha + 75 = 110{,}22\ MPa$

$\tau_\theta = R\sin\alpha = -3{,}08\ MPa$

mais τ doit avoir le signe contraire par convention

donc $\sigma_\theta = 110{,}22\ MPa$ (identique que les formules) OK

$\tau_\theta = 3{,}08\ MPa$

2°/ Contraintes principales

graphiquement → $\begin{cases} \sigma_1 = R + 75 = 110{,}36\ MPa \\ \sigma_2 = -R + 75 = 39{,}64\ MPa \end{cases}$

$\theta_p = 22{,}50°$ (déjà mesuré) | OK par rapport aux formules

3°/ Contrainte de cisaillement max

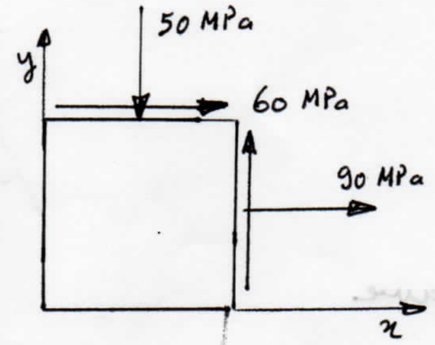
graphiquement → $\tau_{\substack{max \\ min}} = \pm R =$, $\sigma' = c_x = 75$ (centre)

$$2\theta_c = 2\theta_p + 2 \times 45° \rightarrow \theta_c = 67{,}50°$$

Remarque : c'est la face de τ_{min} qui se trouve à $\theta_c = 67{,}50°$ car il faut inverser son signe pour trouver le resultats. (voir élément orienté)

Exercice 3 :

1^er cas



• Contraintes Principales ?

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

avec $\sigma_x = 90$ MPa
$\sigma_y = -50$ MPa
$\tau_{xy} = 60$ MPa

A.N : $\sigma_1 = 112,20$ MPa
$\sigma_2 = -72,20$ MPa et $\theta_p = 20,30°$ $\left(tg\,2\theta_p = \dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$

• Contraintes de cisaillement max

$$\tau_{\substack{max\\min}} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm 92,20 \text{ MPa}$$

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 20 \text{ MPa}$$

$$\theta_c = \theta_p + 45° = 65,30°$$

Methode du cercle de MOHR

contrainte avec leurs signes selon la convention du cercle de MOHR
$\left.\right\}$ $\sigma_x = +90$ MPa
$\sigma_y = -50$ MPa
$\tau_{xy} = -60$ MPa

centre $C(C_x, C_y) = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right) = (20, 0)$

$A(\sigma_x, \tau_{xy}) = (90, -60)$, $B(\sigma_y, -\tau_{xy}) = (-50, +60)$

graphiquement :

$R^2 = 60^2 + (90-20)^2$

$R = 92,20$

$\rightarrow \sigma_1 = 20 + R = 112,20$ MPa

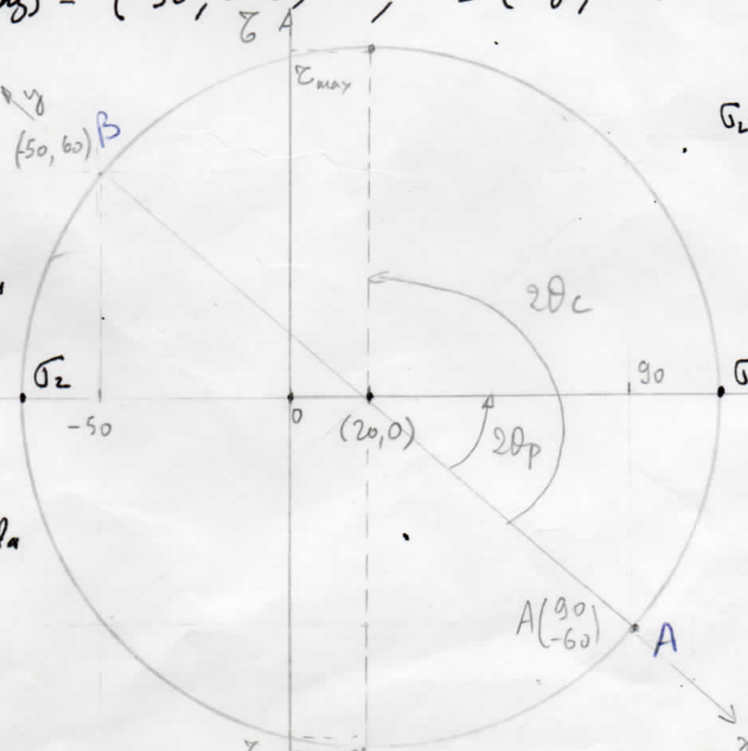
$\rightarrow \sigma_2 = 20 - R = -72,20$ MPa

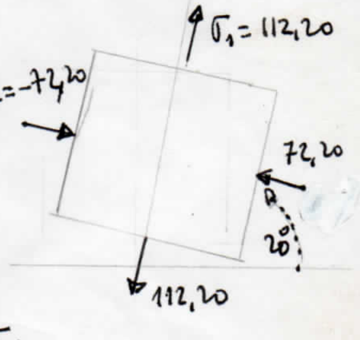
$tg\,2\theta_p = \dfrac{60}{90-20} \Rightarrow \theta_p = 20,30°$

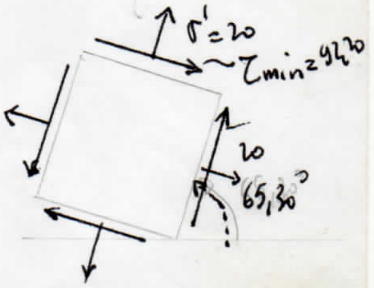
$\tau_{\substack{max\\min}} = \pm R = \pm 92,20$ MPa

$\theta_c = \theta_p + 45° = 65,30$

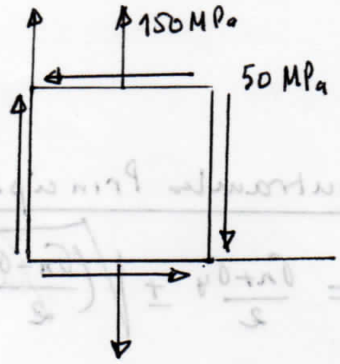
$\sigma' = C_x = 20$ MPa







2ème cas



même procedure que precedement. avec

$$\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = 150 \\ \tau_{xy} = -50 \end{cases}$$

- $\sigma_{1,2} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \dfrac{\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\dfrac{\sigma_y^2}{4} + \tau_{xy}^2}$

$tg\,2\theta_p = \dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} = \dfrac{2\tau_{xy}}{-\sigma_y}$

$\sigma_1 = 165,13$

$\sigma_2 = -15,14$

$\theta_p = 16,71°$

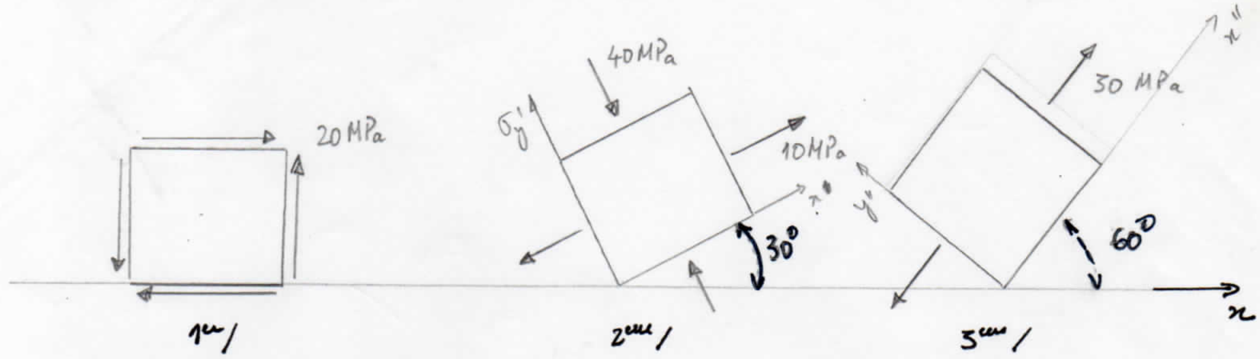
- $\tau_{\max/\min} = \dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = 90,13$

$\sigma_n = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \dfrac{\sigma_y}{2} = 75$

$\theta_c = 61,71°$

Exercice 4 :

au même point pour $\neq$ sollicitations $\rightarrow$



1°/ Calcul des contraintes principales (max et min) et leurs orientations qd les 3 sollicitations agissent en m̂ temps

1re méthode – transformation analytique

pour trouver les contraintes principales, il faut d'abord trouver l'état de contraintes des 3 sollicitations (par rapport à n'importe quel axe) et ensuite, trouver σ_1, σ_2, (

$\rightarrow$ cas linéaire élastique $\Rightarrow$ la superposition des contraintes est possible

prenons par exemple les axes (x,y) comme référence.

1re sollicitation $\rightarrow$ $/_{xy}$ $\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = +20 \text{ MPa} \end{cases}$

2ème sollicitation $\rightarrow$ à $\theta = 30°$ $/xy$ $\Rightarrow$ il faut transformer ces contraintes sur (x, y) $\Rightarrow$ $\theta = -30°$

soit $\begin{cases} \sigma_x' = +10 \text{ MPa} \\ \sigma_y' = -40 \text{ MPa} \\ \tau_{x'y'} = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{\sigma_x'+\sigma_y'}{2} + \dfrac{\sigma_x'-\sigma_y'}{2}\cos(2\times(-30)) + \tau_{x'y'}\sin(2\times(-30)) \\ \sigma_y = \dfrac{\sigma_x'+\sigma_y'}{2} - \dfrac{\sigma_x'-\sigma_y'}{2}\cos(2\times(-30)) - \tau_{x'y'}\sin(2\times(-30)) \\ \tau_{x'y'} = -\dfrac{(\sigma_x'-\sigma_y')}{2}\sin(2\times(-30)) + \tau_{x'y'}\cos(2\times-30) \end{cases}$

contraintes $/_{xy}$ de la 2ème sollicitation $\Rightarrow$ $\begin{cases} \sigma_x = -2{,}50 \text{ MPa} \\ \sigma_y = -27{,}50 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 21{,}65 \text{ MPa} \end{cases}$

3ème sollicitation idem que précédemment avec $\theta = -60°$

ainsi $\begin{cases} \sigma_x'' = +30 \text{ MPa} \\ \sigma_y'' = 0 \\ \tau_{x''y''} = 0 \end{cases}$ $\xrightarrow[\theta=-60]{}$ $\begin{cases} \sigma_x = 7{,}50 \text{ MPa} \\ \sigma_y = 22{,}50 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 12{,}99 \text{ MPa} \end{cases}$ contraintes sur (x,y) de la 3ème sollicitation

Bilan des contraintes et superposition sur (x, y)

	σ_x	σ_y	τ_{xy}
1ère solli	0	0	20
2ème solli	−2,50	−27,50	21,65
3ème sollic	7,50	22,50	12,99
les 3 solli en même temps	5	−5	54,64

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = 5 \text{ MPa} \\ \sigma_y = -5 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 54,64 \text{ MPa} \end{cases}$$

Contraintes principales σ_1, σ_2, et θ_p ?

$\sigma_x = 5$

$\sigma_y = -5$

$\tau_{xy} = 54,64$

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_{1,2} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \operatorname{tg} 2\theta_p = \dfrac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \end{cases}$$

A.N/. $\sigma_{1,2} = \begin{cases} \rightarrow 54,87 \\ \rightarrow -54,87 \end{cases}$ $\theta_p = 42,39°$

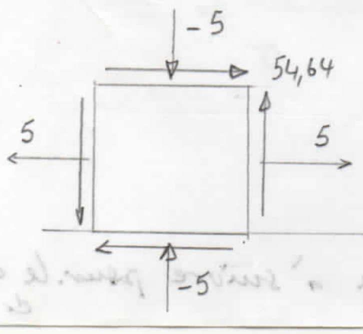
Contraintes tangentielles max et min, σ', θ_c ?

contraintes associée

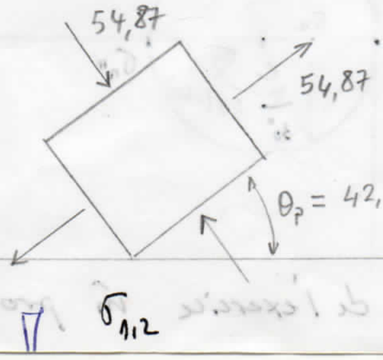
$$\begin{cases} \tau_{\substack{max \\ min}} = \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ \sigma' = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \\ \theta_c = \theta_p + 45° \end{cases}$$

A.N/ $\begin{cases} \tau_{\substack{max \\ min}} = \pm 54,87 \\ \sigma' = 0 \end{cases}$ $\theta_c = 87,39°$

état/xy

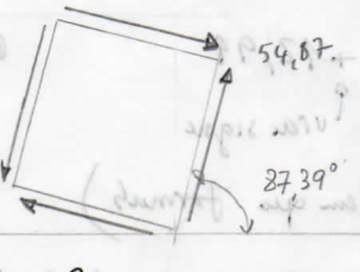


état principale



$\sigma_{1,2}$

état cisaillement max



$\tau_{\substack{max \\ min}}$, $\sigma = 0$

T.S.V.P

Méthode du cercle de MOHR

1ère sollicitation :

transformation de $\begin{cases}\sigma_x' \\ \sigma_y' \\ \tau_{xy}'\end{cases} \xrightarrow{\theta = -30} \begin{cases}\sigma_x = ? \\ \sigma_y = ? \\ \tau_{xy} = ?\end{cases}$

$\sigma_x' = 10$
$\sigma_y' = -40$
$\tau_{xy}' = 0$

$C\left(\frac{\sigma_x' + \sigma_y'}{2}, 0\right)$

$C(-15, 0)$

$A(\sigma_x', 0) = (10, 0)$

$B(\sigma_y', 0) = (-40, 0)$

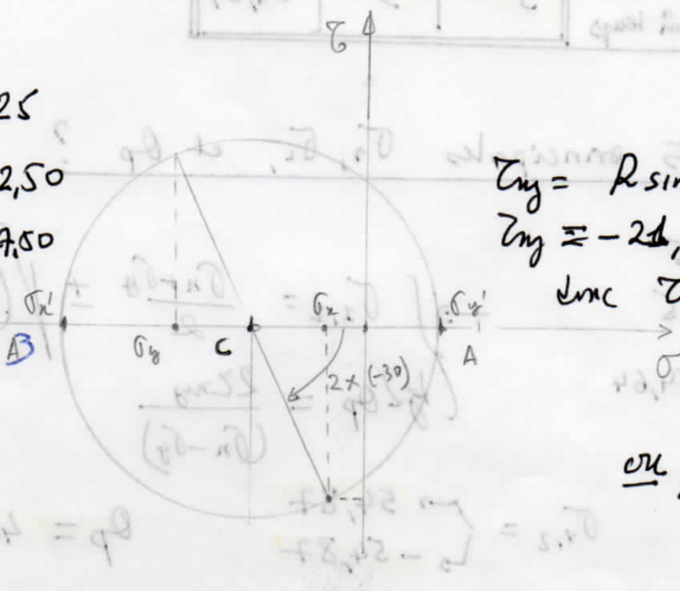
graphiquement :

$R = C + \sigma_y' = \sigma_x' - C = 25$

$\sigma_x = C - R\cos(2(-30)) = -2{,}50$

$\sigma_y = C + R\cos(2(-30)) = -27{,}50$

ok (idem que les formules)



$\tau_{xy} = R\sin 2(-30)$

$\tau_{xy} = -21{,}65$

donc $\tau_{xy} = +21{,}65$

vrai signe

ok / aux formules

2ème sollicitation

$\sigma_x'' = 30$
$\sigma_y'' = 0$
$\tau_{xy}'' = 0$

$\xrightarrow{\theta = -60} \begin{cases}\sigma_x = ? \\ \sigma_y = ? \\ \tau_{xy} = ?\end{cases}$

$C\left(\frac{\sigma_x'' + \sigma_y''}{2}, 0\right)$

$C(15, 0)$

$\begin{cases}A(\sigma_x, \tau_{xy}) \\ A(30, 0)\end{cases}$

$\begin{cases}B(\sigma_y, \tau_{xy}) \\ B(0, 0)\end{cases}$

graphiquement

$R = C + \sigma_y'' = \sigma_x'' - C$

$R = 15$

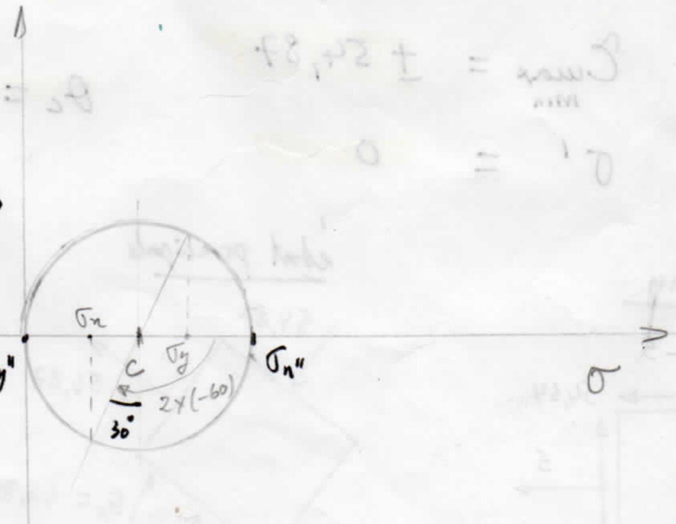
$\begin{cases}\sigma_x = C - R\sin 30° = 7{,}5 \\ \sigma_y = C + R\sin 30° = 22{,}50\end{cases}$

$\tau_{xy} = -R\cos 30° = -12{,}99$

$\Rightarrow \tau_{xy} = +12{,}99$

vrai signe

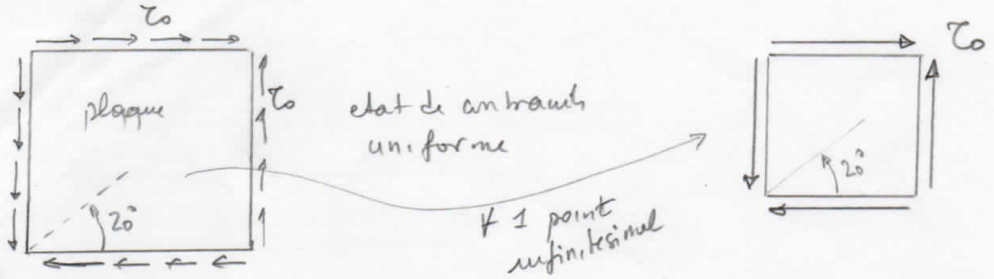
(ok idem que formules)



Remarque : pour le reste de l'exercice ïn procédure à suivre pour le cercle de MOHR

Exercice 5

1er cas :



contraintes sur un plan orienté à 20° ? $\begin{cases} \sigma_{20°} \\ \tau_{20°} \end{cases}$

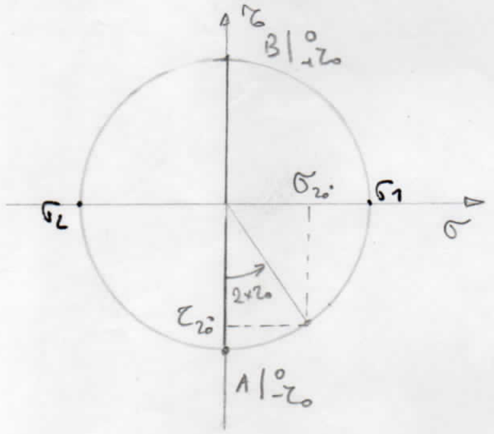
→ Méthode graphique du cercle de MOHR

état de contrainte → $\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = +\tau_0 \end{cases}$ à transformé sur un plan à $\theta = 20°$

signe des contraintes pour le dessin du cercle : $\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\tau_0 \end{cases}$

⇒ $C\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0\right) = (0, 0)$

$A(0, -\tau_0)$ et $B(0, +\tau_0)$



graphiquement :

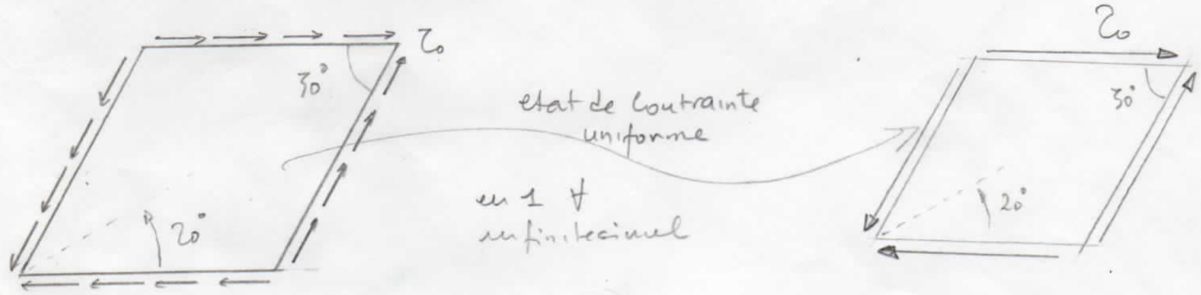
$R = \tau_0$

$$\begin{cases} \sigma_{20°} = R \sin(2\times 20) = 0{,}643\,\tau_0 \\ \tau_{20°} = R \cos(2\times 20) = 0{,}766\,\tau_0 \end{cases}$$

$\tau_{20} = -\ 0{,}766\,\tau_0$
↑ vrai signe

$\sigma_{1,2} = \pm\,\tau_0 \qquad \theta_p = 45°$

2ème cas : (même question que précédemment)

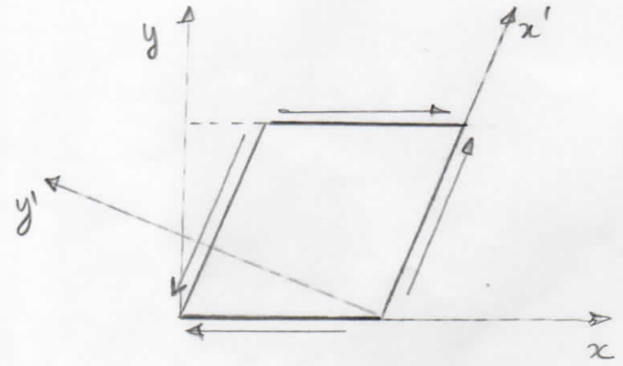


dans ce cas nous n'avons pas un état de contrainte (c.a.d deux facettes mutuellement ⊥) nous ne pouvons pas appliquer les formules de transformation ni la méthode du cercle de MOHR directement !!

Application de la méthode de cercle de MOHR (indirectement !!)

La méthode du cercle de MOHR s'applique quand on dispose d'état de contraintes (2 facettes mutuellement ⊥) → dans notre cas nous avons 2 facettes orientées l'une /à l'autre de 30° !!

notons par (x) le plan où se trouve la 1ère facette et par (x') le plan où se trouve la 2ème facette ainsi :



cas du système (x, y)

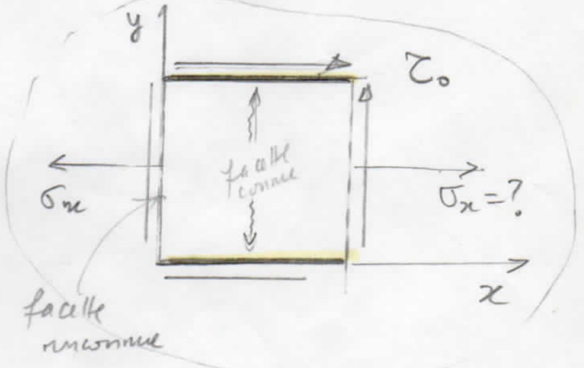
l'état de contrainte sur (x, y) est composé donc par

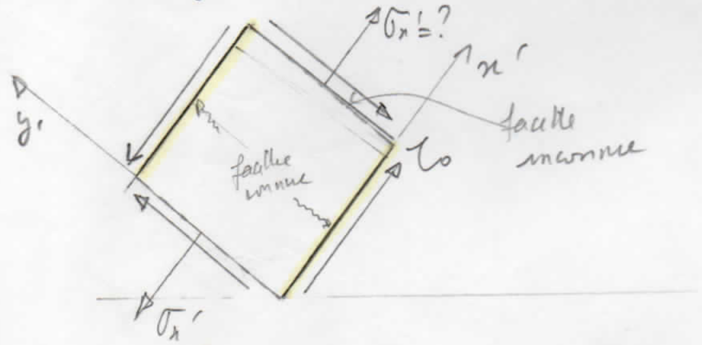
$$\begin{cases} \sigma_x = \ ? & \text{(facette inconnue} \\ \sigma_y = 0 & \text{(donné du Pb)} \\ \tau_{xy} = \tau_0 & \text{(donné du Pb)} \end{cases}$$

cas du système (x', y')

l'état de contrainte sur (x', y') est composé donc par

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \ ? & \text{(facette inconnue} \\ \sigma_{y'} = 0 & \text{(donné du Pb)} \\ \tau_{x'y'} = -\tau_0 & \text{(donné du Pb)} \end{cases}$$





<u>Remarque</u> : les deux facettes connues et les deux inconnues dont l'ensemble forme 2 états de contraintes sont définis au même point infinitésimal. ⇒ elles appartiennent au <u>m</u> cercle de <u>MOHR</u>

<u>dessin du cercle de MOHR</u>

cercle /xy →

$$\begin{cases} \sigma_x = \ ? \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = -\tau_0 \end{cases}$$

$\uparrow$ signe pour le cercle

$$\begin{cases} C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right) = \left(\frac{\sigma_x}{2}, 0\right) \\ \\ A(\sigma_x, -\tau_0), \quad B(\sigma_y, \tau_0) \\ A(\sigma_x, -\tau_0), \quad B(0, \tau_0) \end{cases}$$

cercle $/ x'y'$

$\sigma_{x'} = ?$
$\sigma_{y'} = 0$
$\tau_{x'y'} = +\tau_0$

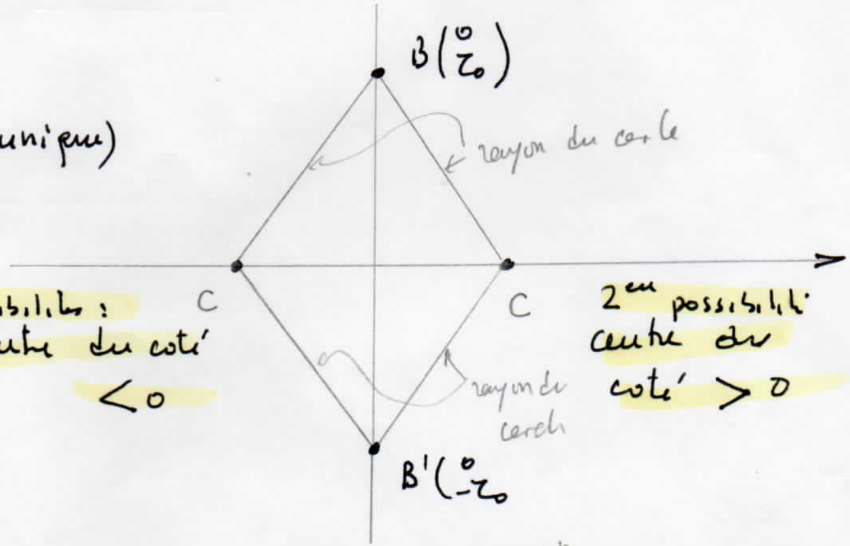
signe pour le cercle

$$\begin{cases} C\left(\frac{\sigma_{x'}+\sigma_{y'}}{2}, 0\right) = \left(\frac{\sigma_{x'}}{2}, 0\right) \\ A'(\sigma_{x'}, +\tau_0) = (\sigma_{x'}, +\tau_0) \\ B'(\sigma_{y'}, -\tau_0) = (0, -\tau_0) \end{cases}$$

* tracé du cercle : Les points A, B et A', B' appartiennent au même cercle, mais seuls les points B et B' sont définis

B et B' ∈ au même cercle mais pas au même diamètre

$B(0, \tau_0)$
$B'(0, -\tau_0)$
$C(?, 0)$ (unique)
2 possibilités ⟹



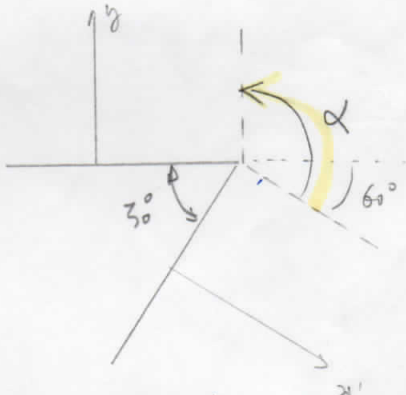
1ère possibilité : centre du côté < 0

2ème possibilité : centre du côté > 0

quel cas prendre ?

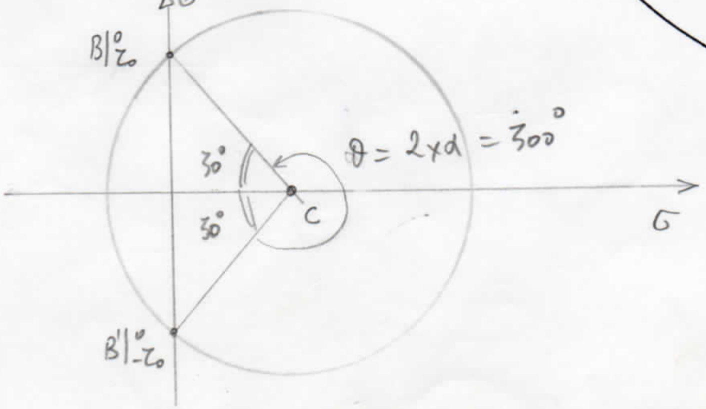
on a dans notre cas les deux facettes (y' et y) orientées l'une / l'autre de α

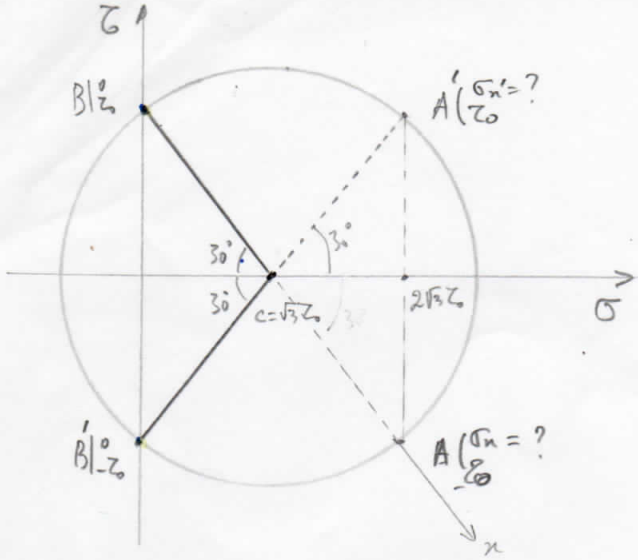
on voit que $\alpha = 60° + 90 = 150°$



⟹ sur le cercle de MOHR on choisit donc le centre qui donne le cercle avec les deux facettes (y', y) ou (x', x) orientées l'une par rapport à l'autre de $\alpha = 150°$ (positif) ⟹ on voit que seul le cas où le centre est du côté positif est possible ⟹

c.a.d $2 \times 150°$ sur le cercle





graphiquement :

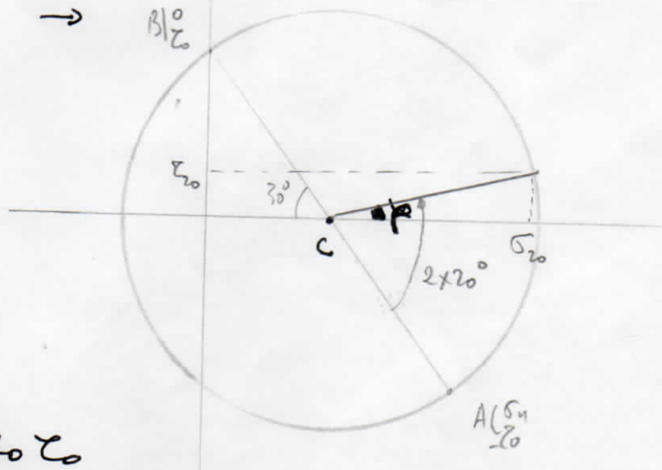
$$\sin 30° = \frac{\tau_0}{R} \rightarrow R = \frac{\tau_0}{\sin 30°} = 2\tau_0$$

$$\text{Centre} \rightarrow C_x = R\cos 30° = \sqrt{3}\,\tau_0$$

$$\begin{cases} \sigma_x' = C + R\cos 30° = 2\sqrt{3}\,\tau_0 \\ \sigma_{y} = \sigma_x' \end{cases}$$

Contrainte sur un plan à 20° / x →

graphiquement :



* $\sigma_{20} = R\cos\varphi + C$

$\varphi = (2 \times 20°) - 30° = 10°$

$\sigma_{20} = 2\tau_0 \cos 10° + \sqrt{3}\,\tau_0$

$\sigma_{20} = \tau_0(2 \times \cos 10° + \sqrt{3}) = 3{,}70\,\tau_0$

* $\tau_{20} = R\sin 10° = +\,0{,}347\,\tau_0$

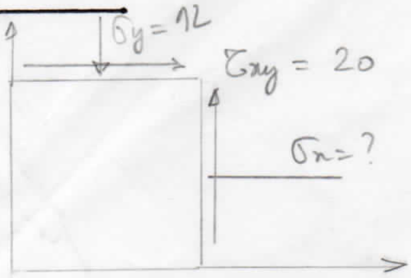
donc les contraintes sur la facette à 20° → $\begin{cases} \sigma_{20} = 3{,}70\,\tau_0 \\ \tau_{20} = -0{,}347\,\tau_0 \end{cases}$

vrai signe

2°/* Contraintes principales : (graphiquement)

$$\begin{cases} \sigma_{1,2} = C \pm R = \sqrt{3}\,\tau_0 \pm 2\tau_0 \\ \theta_{p/xy} = 15° \end{cases}$$

Exercice n° 6



état de contrainte

$$\begin{cases} \sigma_x = ? \\ \sigma_y = +12 \\ \tau_{xy} = 20 \end{cases}$$

on connait une des contraintes principales $\sigma_p = -14$

* calcul de $\sigma_x = ?$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

on élève les deux membre au carré :

$$\left[\sigma_{1,2} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right]^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$\sigma_p = \sigma_1$ ou σ_2 (les deux valeurs verifient l'équation)

$$(\sigma_{1,2})^2 + \frac{(\sigma_x + \sigma_y)^2}{4} - 2.\sigma_{1,2}.\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$(\sigma_{1,2})^2 + \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_x\sigma_y}{4} - \sigma_{1,2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y}{4} + \tau_{xy}^2$$

$$(\sigma_{1,2})^2 + \frac{\sigma_x\sigma_y}{2} - \sigma_{1,2}\sigma_x - \sigma_{1,2}\sigma_y = -\frac{\sigma_x\sigma_y}{2} + \tau_{xy}^2$$

$$\sigma_x\left(\frac{\sigma_y}{2} - \sigma_{1,2} + \frac{\sigma_y}{2}\right) = \tau_{xy}^2 + \sigma_{1,2}\sigma_y - (\sigma_{1,2})^2$$

$$\sigma_x = \frac{\tau_{xy}^2 + \sigma_{1,2}\sigma_y - (\sigma_{1,2})^2}{\sigma_y - \sigma_{1,2}}$$

$\tau_{max} = \pm 101$ MPa

$\theta_c = 50{,}71^\circ$.

AN : $\begin{cases} \sigma_y = 12 \\ \sigma_{1,2} = -14 \\ \tau_{xy} = 20 \end{cases}$

$$\sigma_x = \frac{\overset{400}{20^2} + \overset{-168}{(-14)(12)} - \overset{196}{(-14)^2}}{\underbrace{12 - (-14)}_{26}} = 1{,}384$$

* Contraintes principales

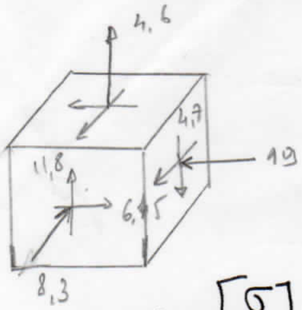
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$\sigma_1 = 27{,}38$

$\sigma_2 = -14$ (déjà connue)

$$tg\,2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \longrightarrow \theta_p = -37{,}57^\circ\ (5{,}71)$$

Exercice 7



$\xrightarrow{\text{selon le signe des contraints}}$

ou $[\sigma]$ $\begin{bmatrix} -19 & -4,7 & 6,45 \\ & 4,6 & 11,8 \\ SYM & & -8,3 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \sigma_x = -19 \\ \sigma_y = 4,6 \\ \sigma_z = -8,3 \\ \tau_{xy} = -4,7 \\ \tau_{xz} = 6,45 \\ \tau_{yz} = 11,8 \end{cases}$$

calcu des contraints principales

en 3D → les contraintes principales sont les racines de l'equation cubique suivante :

$$\sigma_p^3 - I_1 \sigma_p^2 + I_2 \sigma_p - I_3 = 0$$

avec I_1, I_2 I_3 les invariants du tenseur $[\sigma]$

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \\ I_3 = |\sigma_{ij}| = \det[\sigma_{ij}] \end{cases}$$

(voir methode pratique de resolution de l'eq 3ème degré)

calcul des Invariants

$I_1 = -22,700$

$I_2 = -170,8125$

$I_3 = 2647,5215$

calcul des elements de l'equation cubique

$R = \frac{1}{3} I_1^2 - I_2 = 342,5758 \longrightarrow S = \sqrt{\frac{1}{3} R} = 10,6860$

$T = \sqrt{\frac{1}{27} R^3} = 1220,2623$

$Q = \frac{1}{3} I_1 I_2 - I_3 - \frac{2}{27} I_1^3 = -488,5896$

$\alpha = \arccos\left(-\frac{Q}{2T}\right) = 1,369 \text{ rd} = 78,45°$

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_{p_1} = 2S\left(\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right) + \frac{1}{3} I_1 = 11,6178 \\ \sigma_{p_2} = 2S\left(\cos\left(\frac{\alpha}{3} + 120°\right)\right) + \frac{1}{3} I_1 = -25,3162 \\ \sigma_{p_3} = 2S\left(\cos\left(\frac{\alpha}{3} + 240°\right)\right) + \frac{1}{3} I_1 = -9,0017 \end{cases}$$

determination de l'orientation (calcul des cosinus directeurs)

origine de l'equation cubique

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_p).l + \tau_{xy}.m + \tau_{xz}.n = 0 \\ \tau_{xy}.l + (\sigma_y - \sigma_p).m + \tau_{yz}.n = 0 \\ \tau_{xz}.l + \tau_{yz}.m + (\sigma_z - \sigma_p)n = 0 \end{cases}$$

l, m, n sont les cosinus directeurs de la facette principale où agit la contrainte principale σ_p

ainsi

$$\begin{cases} (-19 - \sigma_{p_i}) l_i - 4{,}7\, m_i + 6{,}45\, n_i = 0 \\ -4{,}7\, l_i + (4{,}6 - \sigma_{p_i})\, m_i + 11{,}8\, n_i = 0 \\ 6{,}45\, l_i + 11{,}8\, m_i + (-8{,}3 - \sigma_{p_i})\, n_i = 0 \end{cases}$$

avec l_i, m_i, n_i cosinus directeurs avec la propriété

$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \Rightarrow$ non independants

A.N/

$$\sigma_{p_{i=1}} = \sigma_{p_1} = 11{,}6178 \longrightarrow \begin{cases} l_1 = 0{,}0266 \\ m_1 = -0{,}8638 \\ n_1 = -0{,}5031 \end{cases}$$

$$\sigma_{p_{i=2}} = \sigma_{p_2} = -9{,}0017 \longrightarrow \begin{cases} l_2 = -0{,}6209 \\ m_2 = 0{,}3802 \\ n_2 = -0{,}6855 \end{cases}$$

$$\sigma_{p_{i=3}} = \sigma_{p_3} = -25{,}3167 \longrightarrow \begin{cases} l_3 = 0{,}7834 \\ m_3 = 0{,}3306 \\ n_3 = -0{,}5262 \end{cases}$$

Exercice 8

soit le champs de contrainte suivant :

$$\sigma_x = x^2 + y \qquad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$
$$\sigma_y = y^2 - 5$$
$$\sigma_z = -x + 6y + z$$

au point $(x,y,z) = (3,1,5) \rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$

remarque : c'est un état principale $/(x,y,z)$

- determination de $[\sigma]/_{x'y'z'}$:

$(x'y'z')$ ont pour cosinus directeurs $/_{x,y,z}$ $\rightarrow \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} l_1 = 1 \\ m_1 = 0 \\ n_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_2 = 0 \\ m_2 = 1/2 \\ n_2 = \sqrt{3}/2 \end{cases} \quad \begin{cases} l_3 = 0 \\ m_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ n_3 = 1/2 \end{cases}$

il faut juste appliquer les formules de transformation :

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2(\tau_{xy} l_1 m_1 + \tau_{xz} l_1 n_1 + \tau_{yz} m_1 n_1) \\ \sigma_{y'} = \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2(\tau_{xy} l_2 m_2 + \tau_{xz} l_2 n_2 + \tau_{yz} m_2 n_2) \\ \sigma_{z'} = \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2(\tau_{xy} l_3 m_3 + \tau_{xz} l_3 m_3 + \tau_{yz} m_3 n_3) \\ \tau_{x'y'} = \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy}(l_1 m_2 + m_1 l_2) + \tau_{xz}(l_1 n_2 + n_1 l_2) + \tau_{yz}(m_1 n_2 + n_1 m_2) \\ \tau_{x'z'} = \sigma_x l_1 l_3 + \sigma_y m_1 m_3 + \sigma_z n_1 n_3 + \tau_{xy}(l_1 m_3 + m_1 l_3) + \tau_{xz}(l_1 n_3 + n_1 l_3) + \tau_{yz}(m_1 n_3 + n_1 m_3) \\ \tau_{y'z'} = \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy}(l_2 m_3 + m_2 l_3) + \tau_{xz}(l_2 n_3 + n_2 l_3) + \tau_{yz}(m_2 n_3 + n_2 m_3) \end{cases}$$

A.N :
$$\sigma_{x'} = \sigma_x = 10$$
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_y}{4} + \frac{3}{4}\sigma_z = \frac{-4}{4} + \frac{3}{4}8 = -1 + 6 = +5$$
$$\sigma_{z'} = \frac{3}{4}\sigma_y + \sigma_z \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(-4) + 8\frac{1}{4} = -3 + 2 = -1$$
$$\tau_{x'y'} = 0$$
$$\tau_{x'z'} = 0$$

$$\tau_{y'z'} = \sigma_y \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sigma_z \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = -\sigma_y \frac{\sqrt{3}}{4} + \sigma_z \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\tau_{y'z'} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + 8 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{12\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$$

$$\rightarrow \quad [\sigma]_{x'y'z'} = \begin{array}{ccc} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ \tau_{y'x'} & 5\ \sigma_{y'} & 3\sqrt{3}\ \tau_{y'z'} \\ \text{Sym} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'}\ 3\sqrt{3} & -1\ \sigma_{z'} \end{bmatrix}$$

$10 \times [-5] = -50$

calcul des I_1, I_2, I_3

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \\ I_3 = |\sigma| = \det[\sigma] \end{cases}$$

/ xyz

$I_1 = 10 ~~+3~~ - 4 + 8 = 14$

$I_2 = -40 - 32 + 80 = +8$

$I_3 = \det[\sigma]_{/xyz} = -320$

/ $x'y'z'$

$I_1 = 10 + 5 - 1 = 14$ ok

$I_2 = 50 - 10 - 5 - (3\sqrt{3})^2 = 8$ ok

$I_3 = \det[\sigma]_{x'y'z'} = -320$ ok

on remarque que $\forall$ le système d'axe I_1, I_2, I_3 ne change pas

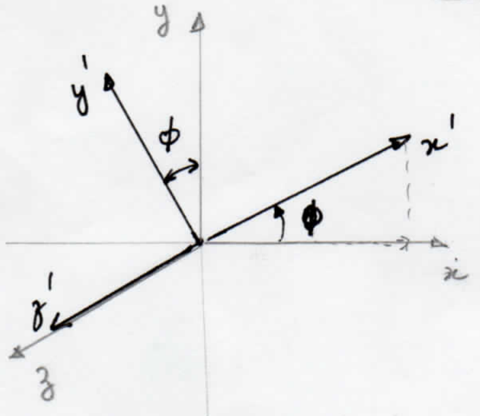
I_1, I_2, I_3 sont les invariant du tenseur de contrainte.

(17)

Exercice 9 — (on considère initialement que $(x\,y\,z)$ est confondu avec $(x'y'z')$)

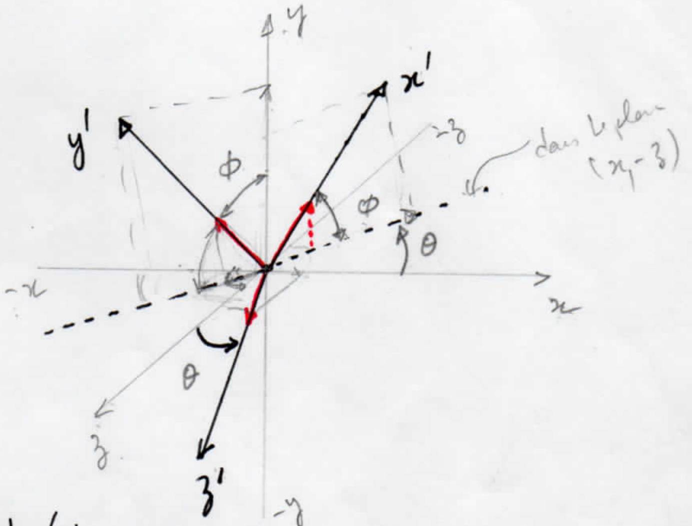
1re rotation

rotation du plan $x'y'$ autour de z' ou z dans le plan (xy) d'un angle (ϕ)



2ème rotation

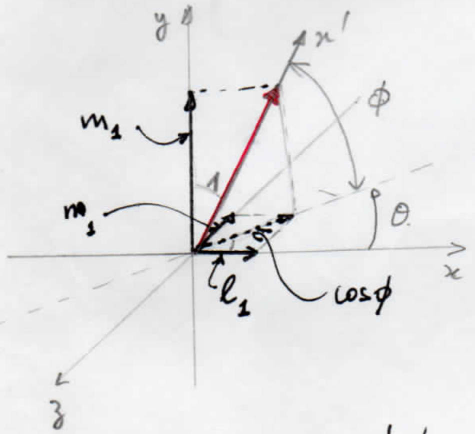
l'ensemble $(x'y'z')$ dans sa nouvelle position (de la 1ère rotation) tourne autour de (y) avec (z') restant dans le plan (xz) d'un angle θ



but calculer les cosinus directeurs de $(x'y'z')$ / à $(x\,y\,z)$

① cosinus directeurs de x'/x → $\cos(x', x) = ?$

nous prenons un vecteur unitaire sur (x') et trouvons par projection sa valeur sur (x) : cette valeur c'est $\cos(\vec{x'}, \vec{x}) = ? = l_1$
sa valeur sur (y) c'est $\cos(x', y) = m_1$, et sur (z) c'est $\cos(x', z) = n_1$.



$$\begin{cases} l_1 = (\cos\phi)\cos\theta \\ m_1 = \cos(x', y) = \sin\phi \\ \text{de m} \quad n_1 = \cos(x', z) = -(\cos\phi)(\sin\theta) \end{cases}$$

② de m cosinus directeurs de $y'/x, y, z$ → notés l_2, m_2, n_2

$l_2 = \cos(y', x) = -(\sin\phi)(\cos\theta)$

$m_2 = \cos(y', y) = \cos\phi$

$n_2 = \cos(y', z) = (\sin\phi)(\sin\theta)$

③ de m, cosinus directeurs de z' / x, y, z notés l_3, m_3, n_3

$$\begin{cases} l_3 = \sin\theta \\ m_3 = 0 \\ n_3 = \cos\theta \end{cases}$$

Remarque : on vérifie bien que
$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$
$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$$
$$l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1$$

Exercice 10 (le graphique doit être à l'échelle !!

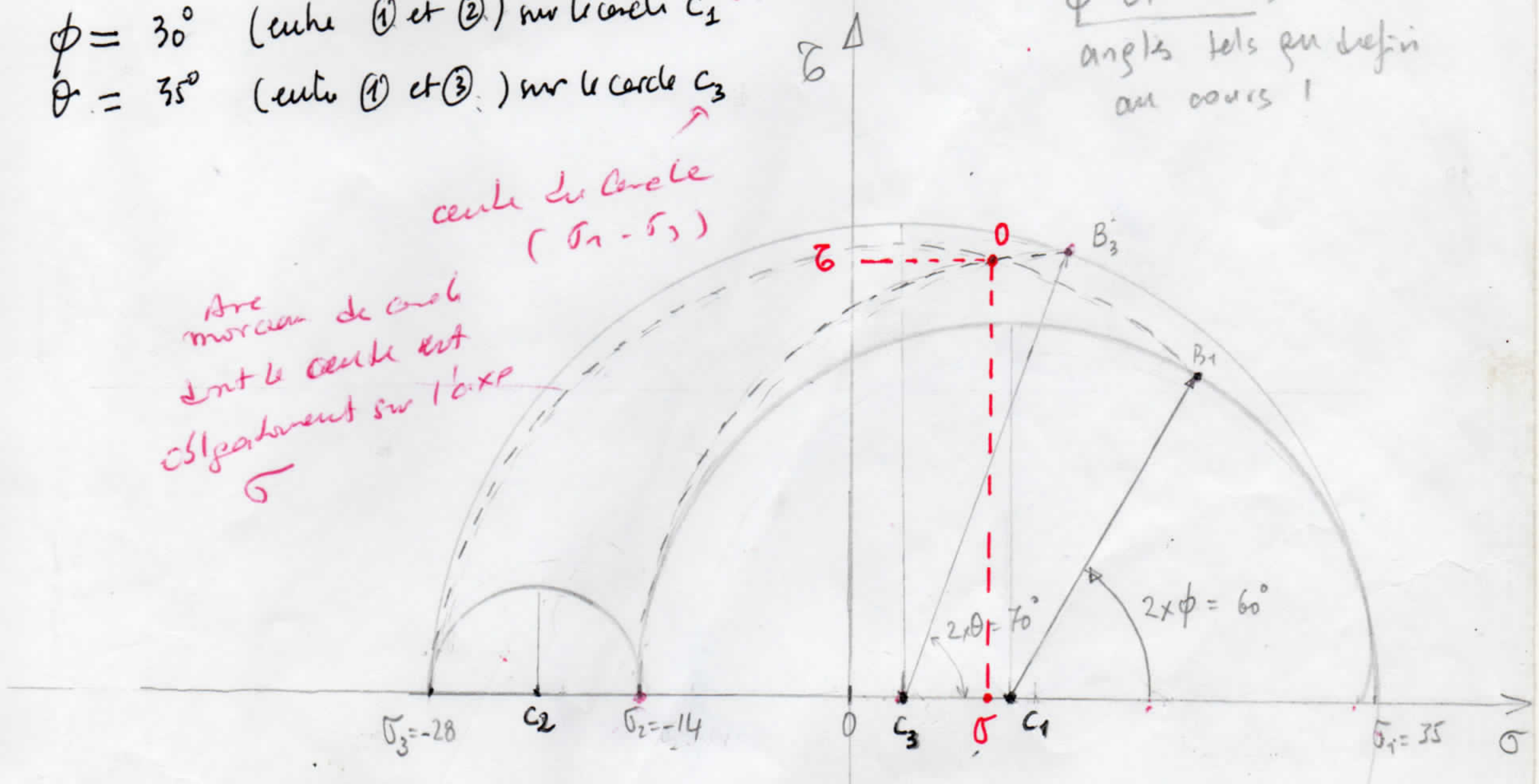
$\sigma_1 = 35$ MPa $\sigma_2 = -14$ MPa $\sigma_3 = -28$ MPa

(échelle — 5 MPa = 1 cm)

$\phi = 30°$ (entre ① et ②) sur le cercle C_1 → centre du cercle $(\sigma_1 - \sigma_2)$

$\theta = 35°$ (entre ① et ③) sur le cercle C_3 → centre du cercle $(\sigma_1 - \sigma_3)$

ϕ et θ sont les angles tels que défini au cours !



mesurés directement
$$\begin{cases} \sigma = (1{,}9\ \text{cm}) = 9{,}5\ \text{MPa} \\ \tau = (5{,}8\ \text{cm}) = 29\ \text{MPa} \end{cases}$$

Methode Analytique (contrôle) (voir cours)

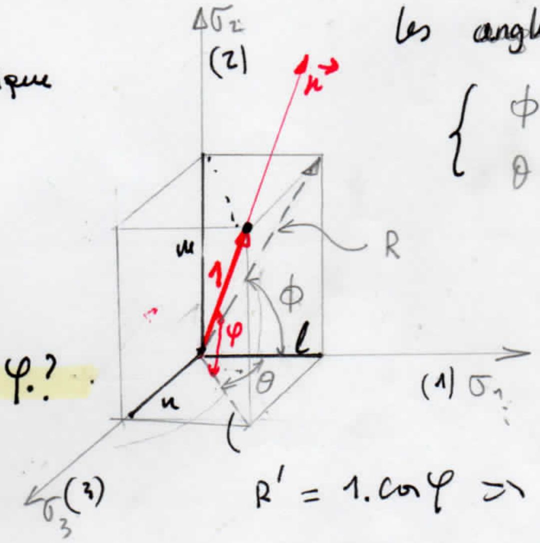
$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \\ \tau = \left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2 l^2 n^2\right]^{1/2} \end{cases}$$

→ il faut donc calculer l, m, n ?

$\vec{n}$: normale au plan oblique

$$\vec{n} \begin{cases} l = \cos(\vec{n}, x) \\ m = \cos(\vec{n}, y) \\ n = \cos(\vec{n}, z) \end{cases} \; ?$$

? pour trouver l, m, n il est necessaire de trouver φ ?



les angles connus sont tel que:

$$\begin{cases} \phi \text{ angle entre } ① \text{ et } ② \\ \theta \text{ — " — } ① \text{ et } ③ \end{cases}$$

$R' = 1.\cos\varphi \Rightarrow l = R'\cos\theta$

→ prenons un vecteur unitaire selon la normale $\vec{n}$

$$\begin{cases} l = R\cos\phi = (\cos\varphi)\cos\theta \\ m = R\sin\phi = \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{\cos\varphi . \cos\theta}{\cos\phi} = \frac{\sin\varphi}{\sin\phi}$$

$$\boxed{tg\,\varphi = tg\,\phi \cos\theta}$$

AN aussi

$$\begin{cases} l = \cos\varphi . \cos\theta \\ m = \sin\varphi \\ n = \cos\varphi \sin\theta \end{cases}$$

avec $\theta = 35°$

$\phi = 30°$

$tg\,\varphi = tg\,\phi \cos\theta = tg\,30° \cos 35$

→ $\boxed{\varphi = 25{,}31}$

$$\begin{cases} l = \cos(25{,}31) \cos 35° = 0.7405 \\ m = \sin(25{,}31) = 0.4275 \\ n = \cos(25{,}31) \sin 35° = 0.51851 \end{cases}$$

$$\sigma = 35\,(0{,}7405)^2 + (-14)\,(0{,}4275)^2 + (-35)\,(0{,}51851)^2 = 9{,}10 \text{ MPa}$$

$$\tau = \left[(35+14)^2\, 0{,}7405^2\, 0{,}4275^2 + (-14+28)^2\, 0{,}4275^2 . 0{,}5185^2 + (-28-35)^2 . 0{,}7405^2 . 0{,}5185^2\right.$$

$= 28{,}90$ MPa

⟹ resultat du Graphique acceptable