

КОЛМОГОРОВ АНАТОЛИЙ ГАВРИЛОВИЧ
Доцент Томского государственного архитектурно-строительного университета

KOLMOGOROV ANATOLI
Maître de Conférence de l'Université de Conakry

*De l'Université d'Etat d'Architecture et de Génie Civil
de Tomsk (Russie).
A l'occasion de cinquantenaire de l'Université Gamal Abdel Nasser
de Conakry (Guinée).*

Le Recteur de TGASU, professeur V.A.VLASOV

Décembre 2012

Ce livre est destiné aux étudiants de Génie Civil, aux ingénieurs et architectes praticiens travaillant dans le domaine de la construction des bâtiments et des ouvrages en béton armé, à ceux évaluant dans la conception des ouvrages, ainsi qu'aux enseignants des écoles supérieures et professionnelles de Génie Civil.

Autres ouvrages du même éditeur, utilisés comme manuels de cours à l'Université de Conakry :

Constructions en béton armé. Volume I (règles SNIP, Russie).

Constructions en béton armé. Volume II (règles SNIP, Russie).

Annexe 1. Exemple de calcul de bâtiment à étages à murs extérieurs porteurs.

Annexe 2. Exemple de calcul de bâtiment à étages à carcasse pleine.

TOMSK, 643003. Pl. Solyanay, 2, TGASU.
Tel. 011-7-(3822) 65-39-30
E-mail: rector@tsuab.ru

KOLMOGOROV ANATOLI

**CALCUL DES CONSTRUCTIONS
EN BETON ARME**

Règles B. A. E. L. 91/99

Deuxième édition, corrigée et complétée

Conakry - Tomsk 2012

Федеральное государственное образовательное
учреждение высшего профессионального образования

«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

А.Г. Колмогоров

**РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
(по нормам BAEL - 91/99, Франция)**

Издание второе, исправленное и дополненное

Учебное пособие

Томск
Издательство ТГАСУ
2012

УДК 624.012.25.001.24:389.1(44)(075)
К 60

Колмогоров, А.Г. Расчет железобетонных конструкций (по нормам BAEL-91/99, Франция), издание второе, исправленное и дополненное [Текст, фр.] / А.Г. Колмогоров. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. – 420 с. – ISBN 978-5-93057-485-2.

В учебном пособии изложены основные положения расчета и конструирования железобетонных конструкций по нормам BAEL-91, используемым во Франции. Рассматриваются прочностные и деформативные свойства исходных материалов, диаграммы напряженно-деформированного состояния и гипотезы, используемые при расчетах железобетонных конструкций. Даются методы их расчета по предельным состояниям (по несущей способности и по эксплуатационной пригодности). Каждый раздел сопровождается соответствующими примерами расчета и конструирования. Учебное пособие завершает пример расчета несущих элементов двухэтажного здания, выполненного с соблюдением требований норм BAEL-91 (и дополнения к ним 1999) .

Предназначено в качестве учебного пособия для студентов строительных специальностей, а также инженеров-строителей, инженеров-проектировщиков и преподавателей строительных университетов.

*От Томского государственного архитектурно-строительного
университета. (Россия)*

*По случаю пятидесятилетия Конакрийского университета имени
Гамаль Абдель Насера (Гвинея)*

Ректор ТГАСУ, профессор В.А. ВЛАСОВ.

Декабрь 2012

TABLE DES MATIERES

PREFACE	9
CHAPITRE 1. PROPRIETES PHYSIQUES ET MECANIQUES DU BETON DES ARMATURES ET DU BETON ARME	11
1.1 Caractéristiques physiques et mécaniques du béton	11
1.1.1. Généralités	11
1.1.2. Résistances caractéristiques du béton	13
1.1.3. Diagramme déformations-contraintes de calcul du béton	15
1.2. Caractéristiques physiques et mécaniques des armatures	20
1.2.1. Types d'aciers utilisés dans le béton armé	20
1.2.2. Diagramme déformations-contraintes des aciers	22
1.2.3. Résistances des aciers	24
1.3. Propriétés essentielles du béton armé	27
1.3.1. Adhérence entre béton et acier	27
1.3.2. Ancrage de l'armature dans le béton	29
1.3.3. Jonction des armatures par simple recouvrement	35
1.3.4. Effets de la température et du retrait. Epaisseur de la couche d'enrobage	39
CHAPITRE 2. INDICATIONS GENERALES SUR LES REGLES <i>B.A.E.L</i>	43
2.1. Définitions des états-limites	43
2.1.1. Etats-limites ultimes	43
2.1.2. Etats-limites de service	44
2.2. Actions caractéristiques. Combinaisons d'actions	49
2.2.1. Actions caractéristiques	49
2.2.2. Combinaisons d'actions	50
2.3. Hypothèses de calcul, diagramme des déformations pour état-limite ultime de résistance	56
2.3.1. Hypothèses de calcul	56
2.3.2. Diagramme des déformations de la section pour l'état-limite ultime de résistance	57
CHAPITRE 3. JUSTIFICATION DES SECTIONS SOUMISES A LA FLEXION SIMPLE	61
3.1. Mode de calcul des sections rectangulaires	61
3.1.1. Etablissement des formules de calcul	61
3.1.2. Sections rectangulaires sans armatures comprimées	65
3.1.3. Sections rectangulaires comportant des armatures tendues et des armatures comprimées	71
3.1.4. Valeur minimale des armatures $A_s + A_s'$	80
3.1.5. Raccourcissement des armatures comprimées	82
3.1.6. Calcul d'une section pour laquelle l'armature A_s' est connue	84
3.1.7. Calcul des sections avec des armatures symétriques	89

3.2. Mode de calcul des sections rectangulaires	91
3.2.1. Composition des sections en T	91
3.2.2. La section ne comporte que des armatures tendues	92
3.2.3. La section comporte des armatures tendues et des armatures comprimées	99
3.2.4. Etude d'une section pour laquelle l'armature comprimée A_s' est connue	105
CHAPITRE 4. JUSTIFICATION DES SECTIONS SOUMISES A LA FLEXION COMPOSEE (ETAT – LIMITE ULTIMT)	107
4.1. Calcul des sections entièrement tendues	108
4.2. Calcul des sections partiellement comprimées	109
4.3. Calcul des sections entièrement comprimées	118
CHAPITRE 5. CALCUL DES SECTIONS SOUMISES A DES EFFORTS TRANCHANTS	127
5.1. Valeur de la contrainte tangente	127
5.2. Calcul des armatures transversales	130
5.2.1. Vérification du béton de l'âme	131
5.2.2. Calcul des armatures transversales	133
5.2.3. Dispositions pratiques des armatures transversales	138
5.2.4. Cas particuliers des dalles et des poutres secondaires. Cas du poinçonnement	139
5.3. Influence particulières des efforts tranchants	146
5.3.1. Règle des coutures	146
5.3.2. Influence de l'effort tranchant au voisinages des appuis	152
5.3.3. Arrêt des armatures principales	155
CHAPITRE 6. JUSTIFICATION DES SECTIONS AUX ETATS – LIMITES DE SERVICE	166
6.1. Calcul des contraintes à l'état – limite de service	169
6.1.1. Principe de calcul des contraintes dans le cas général	169
6.1.2. Détermination des contraintes en cas de flexion simple	170
6.1.3. Détermination des contraintes en cas flexion composée	173
6.2. Dimensionnement des sections à l'état – limite de service	180
6.2.1. Dimensionnement des sections rectangulaires soumises à la flexion simple	180
6.2.2. Dimensionnement des sections en T soumises à la flexion simple ...	187
6.2.3. Dimensionnement des sections soumises à la flexion composée	189
6.3. Etat – limite d'ouverture des fissures	198
6.4. Etat – limite de service des déformations	205
6.4.1. Théorie de calcul des flèches	206
6.4.2. Calcul des flèches dans le cas général	210
6.4.3. Calcul des flèches par la méthode forfaitaire	211
6.4.4. Valeurs limites des flèches	214

CHAPITRE 7. PLANCHERS DES BATIMENTS	220
7.1. Description et disposition constructives	220
7.1.1. Planchers constitués d'une dalle, des poutres secondaires et principales	220
7.1.2. Planchers à corps creux	223
7.1.3. Planchers avec pré-dalles	226
7.1.4. Planchers – champignons. Planchers – dalles	228
7.2. Calcul des dalles de planchers	229
7.2.1. Détermination des charges. Combinaisons des charges	229
7.2.2. La dalle portant dans une seule direction	233
7.2.3. La dalle portant suivant deux directions	234
7.2.4. Dispositions constructives diverses	237
7.3. Calcul des poutres	240
7.3.1. Application de la méthode forfaitaire	240
7.3.2. Application de la méthode de Caquot pour les poutres à moments d'inertie égaux dans les différentes travées et non solidaires des poteaux	246
7.3.3. Application de la méthode de Caquot aux poutres à moments d'inertie variables d'une travée à l'autre et non solidaires des poteaux	251
7.3.4. Application de la méthode de Caquot aux poutres solidaires des poteaux qui les supportent	252
7.3.5. Etat-limite de déformation des éléments de planchers	263
CHAPITRE 8. DISPOSITIONS CONSTRUCTIVES ET CALCUL DES POTEAUX DES BATIMENT	265
8.1. Evaluation des charges. Flambement des poteaux	265
8.1.1. Calcul des sollicitations des poteaux	265
8.1.2. Flambement des poteaux	268
8.2. Construction des pièces comprimées	271
8.3. Calcul des armatures longitudinales des poteaux soumis à une compression simple	274
8.4. Calcul des armatures longitudinales des poteaux soumis à une compression excentrée	278
CHAPITRE 9. DISPOSITIONS CONSTRUCTIVES ET CALCUL DES FONDACTIONS	283
9.1. Généralités	283
9.2. Semelles continues sous murs	285
9.2.1. Dispositions constructives	285
9.2.2. Calcul des semelles flexibles sous murs	288
9.2.3. Calcul des semelles rigides sous murs	290
9.3. Semelles continues sous poteaux	295
9.4. Semelles sous poteaux soumis à un effort normal centré	298

9.4.1. Semelles rectangulaires sous poteaux rectangulaires	298
9.4.2. Semelles circulaires sous poteaux circulaires	305
9.5. Semelles soumises à un effort normal et à un moment de flexion	313
9.5.1. Etude du diagramme des contraintes	313
9.5.2. Calcul des armatures pour les semelles sous poteaux	315
9.5.3. Calcul des armatures pour les sections sous murs	319
9.5.4. Précision de calcul des fondations	319
CHAPITRE 10. EXEMPLE DE CALCUL D'UN BATIMENT	330
10.1. Calcul des planchers du bâtiment	330
10.1.1. Plancher intermédiaire dans les locaux d'habitation	330
10.1.2. Plancher dans les balcons	342
10.1.3. Plancher de couverture du bâtiment	346
10.2. Calcul statique du portique du bâtiment	348
10.2.1. Calcul des moments de la poutre de couverture	350
10.2.2. Calcul des moments de la poutre intermédiaire	356
10.3. Calcul du ferrailage de la poutre principale du plancher intermédiaire	369
10.3.1. Calcul des sections normales de la poutre	369
10.3.2. Calcul des efforts tranchants de la poutre	373
10.3.3. Calcul des armatures transversales de la poutre	377
10.3.4. Calcul des arrêts des armatures principales de la poutre	380
10.4. Calcul du ferrailage des poteaux du bâtiment	391
10.4.1. Calcul du poteau de rive gauche	391
10.5. Calcul des fondations sous les poteaux	404
10.5.1. Calcul de la fondation sous le poteau de rive gauche	404
ANNEXE A. (Tableaux)	410
BIBLIOGRAPHIE	419

PREFACE

Ce livre peut être considéré comme complément de celui intitulé "Constructions en béton armé" qui est basé sur l'application des Normes *SNIP* (Russie). Avec ce dernier, ils constituent ensemble le cours général du béton armé.

La nécessité de considérer simultanément ces deux Règlements s'explique par le fait qu'à l'heure actuelle en Guinée on peut rencontrer des différentes Règles de calcul : *ACI* (Etats-Unis), *DIN* (Allemagne), *SNIP* (Russie), *B.A.E.L* (France) ; mais ces deux dernières sont les plus répandues et les plus utilisables.

Ces deux Règles sont basées sur des états-limites et elles utilisent les hypothèses communes, telles que :

- résistance à la traction du béton négligée à cause de la fissuration;
- pas de glissement relatif entre armature et béton;
- utilisation du diagramme rectangulaire simplifié pour les sections partiellement comprimées.

D'autre côté, il existe quelques hypothèses qui sont différentes, notamment :

Règles B.A.E.L utilisent l'hypothèse Novier-Bernouilli qui stipule qu'à l'état-limite ultime la section droite plane avant déformation reste plane après déformation, alors le diagramme des déformations est représenté par une droite. Cette hypothèse oblige d'étudier le diagramme des déformations pour permettre l'établissement des contraintes de calcul des armatures et du béton.

Règles SNIP remplacent l'hypothèse des sections planes par le principe de rupture plastique, ce qui permet d'obtenir les équations de calcul en partant des conditions d'équilibre statique seulement, donc sans étudier le diagramme des déformations. Dans ce cas on prend directement les contraintes de calcul des armatures et du béton comme valeurs connues.

Malgré que ces hypothèses principales sont différentes, le calcul à l'état-limite ultime des éléments les plus répandus (soumis à la flexion simple ou à la flexion composée, surtout quand la section est partiellement comprimée), au bout du compte, est fait avec l'utilisation des formules identiques.

D'autre côté, l'analyse des calculs (voir les exemples identiques donnés dans le livre [6]) montre que pour les mêmes données de départ (mêmes valeurs caractéristiques des charges et des résistances

des matériaux), les résultats obtenues ne sont pas les mêmes. Ces différences sont expliquées par l'influence des valeurs des coefficients de sécurité qui ne sont pas les mêmes pour les deux Règles.

Ainsi, les coefficients de majoration (coefficients de sécurité partielle) des valeurs caractéristiques des charges pour obtenir les valeurs de calcul sont :

- B.A.E.L* 1,35 pour les charges permanentes ;
1,50 pour les charges provisoires ;
- SNIP* 1,10 à 1,30 pour les charges permanentes ;
1,20 à 1,40 pour les charges provisoires

(les valeurs des coefficients pour *SNIP* sont prise en fonction du type des charges et des surcharges en prenant en compte l'analyse statistique de variation de ces valeurs).

Les coefficients de minoration des résistances caractéristiques des armatures et du béton (coefficients de sécurité partielle, pour passer de la résistance caractéristique à la résistance de calcul) sont :

- B.A.E.L* 1,5 pour le béton tendu et comprimé ;
1,15 pour des aciers ;
- SNIP* 1,5 pour le béton tendu ;
1,3 pour le béton comprimé ;
1,07 à 1,15 pour les aciers (en fonction du type).

Donc, les valeurs de ces coefficients pour les Règles *B.A.E.L* sont toujours plus grandes que pour les Règles *SNIP*. Les produits des coefficients de sécurité partiels donnent les coefficients de sécurité globaux, qui sont:

- B.A.E.L* 2,02 à 2,25 pour le béton ;
1,55 à 1,72 pour l'acier ;
- SNIP* 1,56 à 1,69 pour le béton comprimé ;
1,32 à 1,43 pour l'acier.

Bien entendu, les Règles *B.A.E.L* demandent plus de consommation des matériaux, mais elles permettent de projeter et exécuter des constructions avec plus de sécurité. Les Règles *SNIP* sont plus économiques, mais elles exigent un bon contrôle de qualité du béton (composition, compactage, surveillance au moment de durcissement) et d'exécution des constructions.

CHAPITRE 1. PROPRIETES PHYSIQUES ET MECANIQUES DU BETON, DE L'ARMATURE ET DU BETON ARME

1. 1. Caractéristiques physiques et mécaniques du béton

1.1.1. Généralités

Les règlements du béton armé *B.A.E.L.* basés sur des états-limites ont parus en 1980 (*B.A.E.L.* 80), ensuite ils ont été modifiés en 1983 (*B.A.E.L.* 83) et en 1991 (*B.A.E.L.* 91). Jusqu'à 1980, en France, les constructions en béton armé ont été calculées par la méthode des contraintes admissibles (*C.C.B.A.* 68).

Les règles *B.A.E.L.* 91 apportent quelques modifications mineures par rapport aux règles *B.A.E.L.* 83 et elles sont basées sur les Recommandations Internationales *C.E.B. - F.I.P.* 1978 et dans la plupart des cas elles coïncident avec ces dernières.

On indique que le béton s'obtenait en mélangeant du ciment, des granulats (sables, pierrailles), et de l'eau. Le béton destiné au béton armé se différencie du béton ordinaire par son dosage et par la grosseur des granulats utilisés. Le dosage qui est le poids (exprimé en kilogrammes) du ciment utilisé par mètre cube de béton mis en œuvre est, pour le béton armé, généralement compris entre 300 et 400 *kg*.

Dans la détermination du dosage, il doit être tenu compte, non seulement de la résistance à obtenir, mais également des risques de détérioration du béton ou des armatures sous l'effet des agents extérieurs. Aussi les règles *B.A.E.L.* précisent que, si l'on appelle C_g la dimension maximale des granulats utilisés (dimension exprimée en millimètres) on doit avoir les dosages minimaux suivants (*kg / m³*) :

- pour des ouvrages exposés aux intempéries : $550 / \sqrt[5]{C_g}$;
- pour des ouvrages exposés à des conditions agressives sévères (eau de mer, ouvrages en bordure de mer ou exposés aux eaux séléniteuses) :

$$700 / \sqrt[5]{C_g} .$$

Les sables sont constitués par des grains provenant de la désagrégation des roches; la grosseur de ces grains est généralement

inférieure à 5 mm. Le poids d'un mètre cube de sable est d'environ 1600 kg.

Les pierrailles sont constituées par des grains rocheux dont la grosseur est généralement comprise entre 5 et 30 mm. Les pierrailles peuvent être extraites du lit des rivières (matériaux roulés) ou obtenues par concassage de roches dures (matériaux concassés). Le poids d'un mètre cube de pierrailles est d'environ 1400 kg

La granulométrie, c'est-à-dire la proportion des divers éléments (sable fin, sable moyen, sable grossier et pierrailles) entrant dans la composition du béton a une grande influence sur la résistance de ce dernier. Pour un ouvrage important, il est nécessaire d'étudier cette granulométrie en fonction des matériaux dont on dispose, d'abord d'une manière théorique, puis par des essais de résistance.

Les ciments sont répartis en quatre classes suivant la valeur de leur résistance à la compression à 28 jours :

- 35, 45 (ou 45 R), 55 (ou 55 R), H.P. (ou HPR),
- où R - pour le ciment de prise rapide ;
- H.P. - pour le ciment de haute performance.

En béton armé les ciments généralement utilisés appartiennent aux classes 45 (cas le plus fréquent), 45 R, 55 et 55 R.

Le tableau suivant indique les dosages en ciment permettant d'obtenir, dans la très grande majorité des cas, les résistances caractéristiques du béton (il est loisible également d'envisager l'utilisation de bétons présentant des résistances supérieures à celles indiquées ci-dessus).

Classes du ciment		45 et 45 R		55 et 55 R	
Conditions de fabrication		CC	AS	CC	AS
f_{c28}	16 MPa	300			
	20 MPa	350	325	325	300
	25 MPa	(1)	400	375	350
	30 MPa	non admis	(1)	(1)	(1)

(1) - cas à justifier par une étude appropriée ;

CC - conditions courantes de fabrication ;

AS - conditions courantes de fabrication avec auto contrôle surveillé

Masse volumique. Pour les bétons courants elle est comprise entre 2200 et 2400 kg / m^3 . Cette masse volumique peut augmenter avec la vibration.

Coefficient de dilatation. Sa valeur moyenne est prise égale à 1×10^{-5} (soit celle de l'acier).

Retrait hygrométrique. Au cours de sa vie, le béton subit une variation de volume. Conservé dans une atmosphère sèche, il diminue de volume, c'est le retrait. Tandis que conservé dans l'eau le retrait est beaucoup plus faible.

Retrait sous charge ou fluage. On a constaté que le retrait est plus important lorsque le béton est conservé en étant soumis à une compression. Il existe donc un retrait sous charge ou fluage, qui vient s'ajouter au retrait hydrométrique.

1.1.2. Résistances caractéristiques du béton

Dans les cas courants, un béton est défini par sa résistance à la compression à 28 jours. Cette valeur, dite *résistance caractéristique*, et représentée par le symbole f_{c28} , est soit fixée à priori, soit déterminée par des essais.

Dans ce dernier cas, on écrase au moyen d'une presse, des éprouvettes cylindriques droites de béton ayant une section de 200 cm^2 (soit un diamètre de 16 cm) et une hauteur double du diamètre (32 cm). La valeur de la contrainte de rupture exprimée en MPa , est égale à la valeur de l'effort maximal supporté par l'éprouvette divisée par l'aire de la section droite. On fait un nombre suffisant d'essais et on calcule la résistance caractéristique à partir de la résistance moyenne obtenue et de l'écart type résultant des essais :

$$f_{c28} = f_{cm} - 1,64 S, \quad (1.1)$$

où S , écart type (écart quadratique) ;

f_{cm} , résistance moyenne des éprouvettes.

La résistance d'un béton à la rupture par compression varie avec le dosage en ciment (elle augmente avec ce dosage), avec l'âge du béton (elle augmente avec l'âge), avec la granulométrie et la quantité d'eau de gâchage. Lorsque les sollicitations s'exercent sur un béton dont l'âge j (jours) est inférieur à 28, on se réfère à la résistance f_{cj}

obtenue au jour considéré. Dans ce cas, on peut admettre que la résistance des bétons non traités thermiquement suit les lois suivantes

$$\text{- pour } f_{cj} \leq 40 \text{ MPa : } f_{cj} = \frac{j}{4,76 + 0,83j} f_{c28}; \quad (1.2)$$

$$\text{- pour } f_{cj} > 40 \text{ MPa : } f_{cj} = \frac{j}{1,40 + 0,95j} f_{c28}. \quad (1.3)$$

Ainsi, pour les bétons à l'âge de 7 jours, 14 jours et 21 jours, on a :

$$f_{c7} = 0,66 f_{c28}; \quad f_{c14} = 0,855 f_{c28}; \quad f_{c21} = 0,946 f_{c28}.$$

La résistance caractéristique à la traction du béton à j jours notée f_{tj} , est conventionnellement définie par la relation (unité, en MPa) :

$$f_{tj} = 0,6 + 0,06 f_{cj}. \quad (1.4)$$

Le module de déformation longitudinale du béton est pris égal à :

- pour les charges d'une durée d'application inférieure à 24 heures (le module de déformation instantanée à j jours, E_{ij}) :

$$E_{ij} = 11000 (f_{cj})^{1/3} \quad (\text{MPa}). \quad (1.5)$$

Cette formule n'est valable que pour les bétons habituels durcissant naturellement sur le chantier. Elle n'est pas valable pour les vérifications à l'état-limite ultime de stabilité de forme pour lesquelles des règles particulières sont données.

- pour les charges de longue durée d'application, le module de déformation différée du béton (ces déformations comprennent le retrait et le fluage du béton) à j jours, E_{vj} est pris égal à :

-

$$E_{vj} = 3700 (f_{cj})^{1/3} \quad (\text{MPa}). \quad (1.6)$$

Lorsqu'on soumet une éprouvette de béton, de longueur l , à des efforts de compression, il se produit non seulement un raccourcissement longitudinal Δl , mais également un gonflement transversal. Si " a " est la dimension initiale du côté de l'éprouvette, cette dimension devient $a + \Delta a$ et la variation unitaire est $\Delta a / a$. On appelle coefficient de Poisson ν le rapport :

$$\nu = \frac{\Delta a / a}{\Delta l / l}.$$

Les règles *B.A.E.L* donnent, pour le coefficient de Poisson ν , les valeurs suivantes :

- si le béton est supposé non fissuré $\nu = 0,20$,
- si le béton est supposé fissuré $\nu = 0,0$.

1.1.3. Diagramme déformations - contraintes de calcul du béton

Dans le calcul relatif à l'état-limite ultime de résistance on utilise, pour le béton, un diagramme conventionnel dit "parabole - rectangle" et, dans certains cas, par mesure de simplification, un diagramme rectangulaire.

Le diagramme parabole - rectangle, qui représente la contrainte du béton en fonction de son raccourcissement, est constitué (fig.1.1) :

- entre les abscisses 0 et 2 ‰, par un arc de parabole du second degré passant par l'origine et le sommet "S" :

$$\sigma_{bc} = 0,25 f_{bc} 10^3 \varepsilon_{bc} (4 - 10^3 \varepsilon_{bc}) ; \quad (1.7)$$

- au point "S", ayant pour coordonnées $\varepsilon_{bc} = 2 \text{ ‰}$:

$$f_{bc} = \frac{0,85 f_{cj}}{\theta \gamma_b} ;$$

- entre les abscisses 2 ‰ et 3,5 ‰, par une horizontale d'ordonnée :

$$f_{bc} = \frac{0,85 f_{cj}}{\theta \gamma_b} .$$

Dans ces formules γ_b est le coefficient de sécurité :

$\gamma_b = 1,15$ pour les situations accidentelles ;

$\gamma_b = 1,50$ pour les autres cas (c'est-à-dire presque toujours).

Les coefficients θ et 0,85 ont pour objet de tenir compte du fait que la résistance du béton est fonction décroissante de la durée d'application de la charge.

Le coefficient θ a pour valeur :

$\theta = 1,0$ lorsque la durée probable d'application des charges est supérieure à 24 heures ;

$\theta = 0,9$, lorsque cette durée est comprise entre 1 et 24 heures ;

$\theta = 0,85$, lorsqu'elle est inférieure à 1 heure.

Le raccourcissement maximal de béton est limité à 3,5 ‰.

Pour tracer le diagramme des contraintes du béton dans la partie comprimée, on porte perpendiculairement à la section, et avec une échelle choisie, les valeurs des contraintes en fonction des raccourcissements. Tant que le raccourcissement d'une fibre est supérieur à 2 ‰, il résulte du diagramme représenté sur la figure 1.2 que la contrainte dans cette fibre est égale à $(0,85 f_{cj}) / (\theta \gamma_b)$, le diagramme des contraintes est donc constitué, dans ce cas, par la droite $a_1 b_1$ parallèle à AB . Lorsque le raccourcissement des fibres décroît de 2 ‰ à une valeur nulle, le diagramme des contraintes est représenté par l'arc de parabole de sommet b_1 , d'axe $b_1 b$, et passant par G .

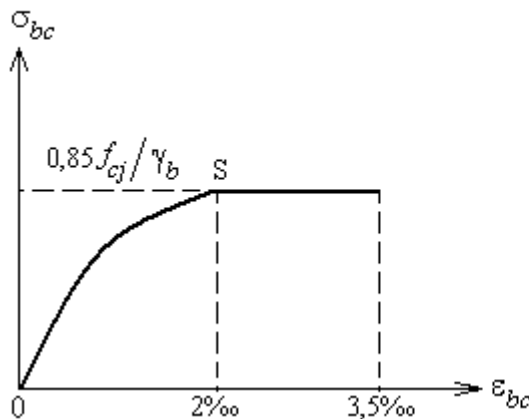


Fig. 1.1. Diagramme déformation-contrainte du béton

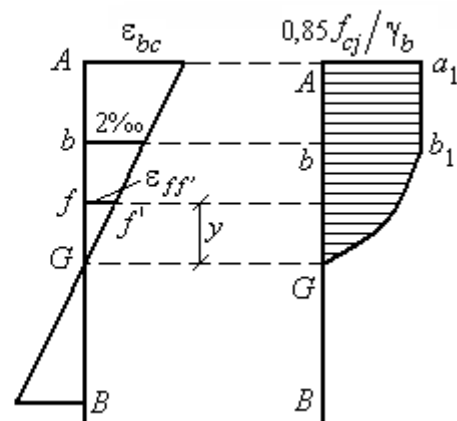


Fig. 1.2. Diagramme parabole-rectangle des contraintes du béton dans la partie comprimée d'une section fléchie

Les diagrammes des contraintes du béton en fonction de la valeur du raccourcissement maximal du béton et selon que l'axe neutre se trouve ou non, à l'intérieur de la section, sont représentés sur la figure 1.3. D'après ces diagrammes on peut constater que si $\varepsilon_{bc} \geq 2 \text{ ‰}$, la contrainte du béton est égale à sa valeur limite $f_{bc} = (0,85 f_{cj}) / \gamma_b$, et si les déformations $\varepsilon_{bc} < 2 \text{ ‰}$, la contrainte du béton n'atteint pas sa valeur limite (formule 1.7).

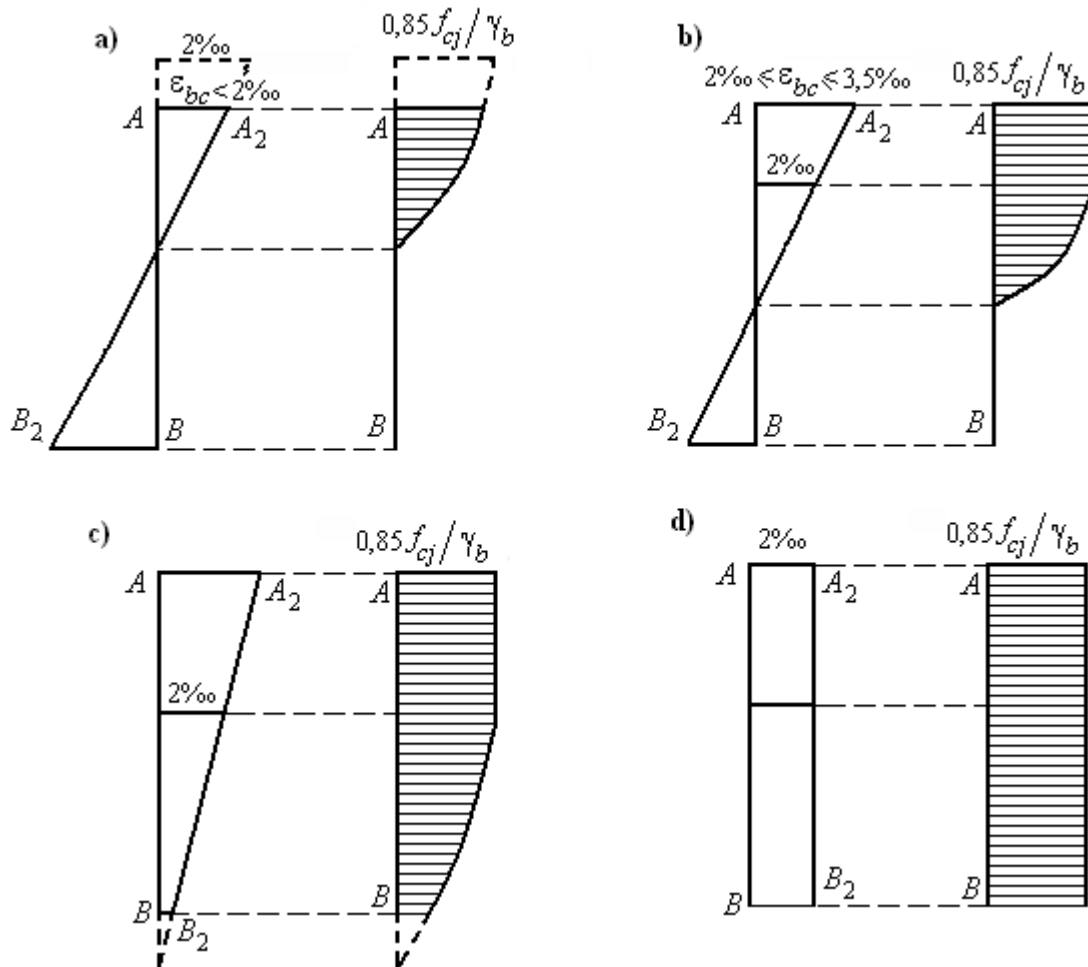


Fig. 1.3. Les diagrammes des contraintes du béton en fonction de la position de l'axe neutre et de la valeur du raccourcissement maximal du béton

a - raccourcissement relatif du béton sur la fibre la plus comprimée est inférieure à 2 ‰ ; b - raccourcissement relatif du béton sur la fibre la plus comprimée est de $2 \text{ ‰} \leq \varepsilon_{bc} \leq 3,5 \text{ ‰}$; c - section entièrement comprimée, l'axe neutre se trouvant hors de la section; d - compression simple, raccourcissement du béton égal à 2 ‰ sur toute la hauteur de la section

La figure 1.4 représente les caractéristiques géométriques des paraboles. On désigne par S , S_1 et S_2 les aires hachurées sur les figures ; G - le centre de gravité de chacune des aires S , S_1 et S_2 ; a_g - la distance du centre de gravité d'une partie hachurée à l'axe AC

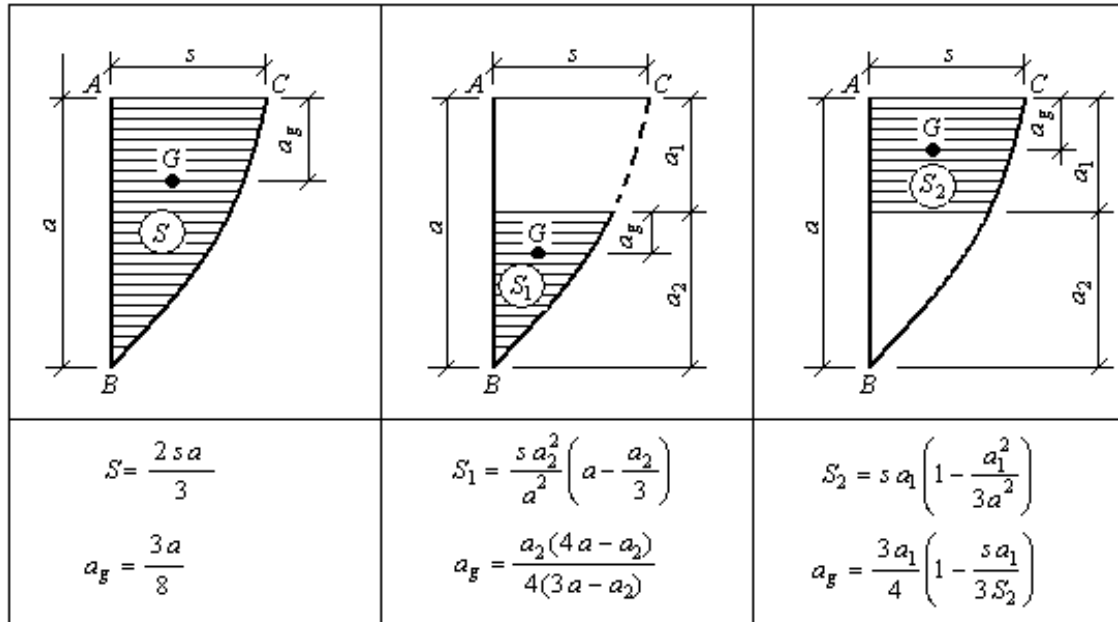
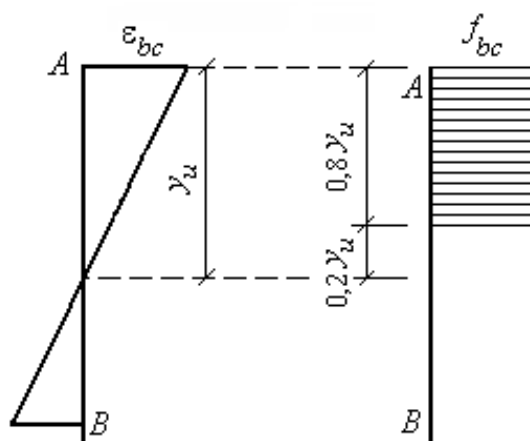


Fig. 1.4. Pour calculer caractéristiques géométriques des paraboles



Dans la zone comprimée le diagramme des contraintes est pris rectangulaire avec la valeur des contraintes

$$f_{bc} = 0,85 f_{cj} / \gamma_b$$

ou

$$f_{bc} = 0,80 f_{cj} / \gamma_b$$

Fig. 1.5. Diagramme rectangulaire pour une section partiellement comprimée

Pour une section étudiée qui n'est pas entièrement comprimée, on peut, à la place du diagramme parabole - rectangle, utiliser le diagramme rectangulaire représenté sur la figure 1.5. Sur cette figure y_u représente la distance de l'axe neutre à la fibre la plus comprimée. Sur une distance $0,2 y_u$, à partir de l'axe neutre la contrainte nulle, sur la distance $0,8 y_u$, la contrainte a pour valeur :

$$f_{bc} = \frac{0,85 f_{cj}}{\theta \gamma_b} - \text{pour les zones comprimées dont la largeur est}$$

constante ou croissante vers la fibre la plus comprimée (section rectangulaire, section en "T", section trapézoïdale avec la grande base du côté le plus comprimé) ;

$$f_{bc} = \frac{0,80 f_{cj}}{\theta \gamma_b} - \text{pour les zones comprimées dont la largeur est}$$

décroissante vers la fibre la plus comprimée (section circulaire, section triangulaire dont le sommet se trouve du côté le plus comprimé, section trapézoïdale avec la petite base du côté le plus comprimé).

Le diagramme rectangulaire conduit pratiquement aux mêmes résultats que le diagramme parabole - rectangle, comme il donne lieu à des calculs plus simples que ce dernier diagramme, il est généralement utilisé chaque fois que cela est possible, c'est-à-dire chaque fois que la section étudiée n'est pas entièrement comprimée.

Au commencement de l'étude d'un projet on n'a généralement pas encore effectué d'essais sur le béton qui sera utilisé, aussi on a été amené à se fixer a priori des valeurs pour la résistance caractéristique à la compression f_{c28} , valeurs qui résultent de l'expérience et qui sont uniquement fonction du dosage, de la classe du ciment et du soin apporté à la fabrication. Les valeurs généralement admises pour f_{c28} sont données par le tableau 1.1 qui indique également les valeurs de la résistance caractéristique à la traction f_{t28} et les valeurs des résistances de calcul pour le béton :

$$f_{bc} = \frac{0,85 f_{cj}}{\theta \gamma_b} ;$$

Toutes ces valeurs se déduisent de f_{c28} à l'aide des formules indiquées ci-dessus.

Tableau 1. 1

Résistance caractéristique a 28 jours (en MPa)		Résistance de calcul f_{bc} (en MPa) (avec $\theta = 1$)	
a la compression f_{c28}	a la traction f_{t28}^*	situations durables ou transitoires, $\gamma = 1,5$	situation acciden- telles, $\gamma = 1,15$
16	1,56	9,1	11,8
18	1,68	10,2	13,3
20	1,80	11,3	14,8
25	2,10	14,2	18,5
30	2,40	17,0	22,2
40	3,00	22,7	29,6
50	3,60	28,3	37,0
60	4,20	34,0	44,3

*) $f_{t28} = 0,6 (1 + 0,1 f_{c28})$

1. 2. Caractéristiques physiques et mécaniques des armatures

1.2.1. Types d'aciers utilisés en béton armé

Pour les constructions en béton armé, on utilise les types d'aciers suivants :

- les ronds lisses ;
- les armatures à haute adhérence (barres à haute adhérence et fils machine à haute adhérence) ;
- les fils à haute adhérence ;
- les treillis soudés.

Pour les armatures à haute adhérence (barres crénelées) on utilise le diamètre nominal, la section nominale et le périmètre nominal.

Le diamètre nominal d'une barre est le diamètre d'un cylindre de révolution en acier, ayant même masse que la barre par mètre linéaire (on considère que l'acier a une masse volumique de $7850 \text{ kg} / \text{m}^3$).

La section nominale d'une barre est égale à l'aire du cercle ayant pour diamètre le diamètre nominal.

Le périmètre nominal d'une barre est égal au périmètre du cercle ayant pour diamètre le diamètre nominal.

Les ronds lisses sont obtenus par laminage d'un acier doux. Comme leur nom l'indique, leur surface ne présente aucune aspérité en dehors des irrégularités de laminage qui sont négligeables. Pour les ronds lisses, il existe deux nuances : *Fe E 215* et *Fe E 235*, correspondant à des limites d'élasticité garantie de 215 et 235 MPa, et les diamètres nominaux normalisés (en millimètres) :

6, 8, 10, 12, 14, 16, 20, 25, 32, 40 et 50.

Dans le but d'augmenter l'adhérence béton-acier, on utilise des armatures à *haute adhérence* présentant une forme spéciale et qui, la plupart du temps, ont subi un traitement mécanique. La haute adhérence est généralement obtenue par des nervures en saillie sur le corps de l'armature ou par torsion d'un profil non circulaire ou par les deux procédés à la fois. Pour les armatures à haute adhérence, il existe deux nuances: *Fe E 400* et *Fe E 500* correspondant à des limites d'élasticité garantie de 400 et 500 MPa. Ces armatures se distinguent par la valeur de la limite d'élasticité et par les valeurs des diamètres des mandrins qu'il y a lieu de considérer lors des essais de pliage simple à 180° et des essais de pliage - dépliage. Chaque nuance des armatures *Fe E 400* et *Fe E 500* peut être livrée à l'état brut de laminage ou à l'état écroui, par conséquent on aura, pour chaque nuance, deux types d'armatures.

Type 1. Il correspond aux armatures à haute adhérence obtenues par laminage à chaud d'un acier naturellement dur (ces armatures sont les plus répandues pour le béton armé).

Type 2. Il correspond aux armatures à haute adhérence obtenues par laminage à chaud suivi d'un écrouissage *sans réduction de section* (par exemple par torsion ou traction). Ces armatures peuvent également s'employer dans les constructions précontraintes.

Les diamètres nominaux normalisés pour les armatures à haute adhérence sont les mêmes que pour les armatures lisses.

Les fils à haute adhérence sont obtenus par écrouissage, avec *forte réduction de section*, d'un fil machine préalablement obtenu par laminage à chaud. L'écrouissage s'effectue soit par tréfilage, soit par laminage à froid, soit par combinaison des deux procédés. Ces fils constituent les armatures de **type 3**. Il existe deux classes de fils à haute adhérence : *Fe TE 400* et *Fe TE 500*. Les diamètres nominaux normalisés sont les suivants (en millimètres) :

4, 5, 6, (7), 8, (9), 10, 12, 14 et 16.

Les diamètres 7 et 9 mm ne sont utilisés que pour les treillis soudés en usine.

Les treillis soudés sont constitués par des fils se croisant perpendiculairement et soudés électriquement à leurs points de croisement. Les éléments constitutifs des treillis soudés peuvent être :

- des ronds lisses bruts de laminage;
- des fils tréfilés lisses *;
- des barres à haute adhérence;
- des fils à haute adhérence.

*) Les fils tréfilés lisses utilisés pour la fabrication de treillis soudés sont obtenus par tréfilage d'un fil machine avec forte réduction de section. Ils se rattachent donc au type 3. Il existe deux classes de fils tréfilés lisses TLE 520 ($\varnothing \leq 6 \text{ mm}$) et TLE 500 ($\varnothing > 6 \text{ mm}$).

Les dimensions des mailles de treillis soudés, mesurées par les espacements entre axes des éléments constitutifs, sont en général, prises égales aux valeurs suivantes (exprimées en millimètres) :

75, 100, 125, 250, 300.

Les treillis soudés constituent les armatures de **type 4**.

1.2.2. Diagrammes déformations - contraintes des aciers

Lorsqu'on soumet une éprouvette d'acier naturel, de section S et de longueur l , à un effort de traction F , l'éprouvette, qui est soumise à une contrainte $\sigma_s = F/S$, s'allonge et sa longueur devient $l + \Delta l$. Alors l'allongement unitaire sera : $\varepsilon_s = \Delta l / l$.

Le diagramme $\sigma_s - \varepsilon_s$ est représenté sur la figure 1.6,a.

Entre les points O et A , le diagramme est constitué par une droite, la contrainte σ_s est proportionnelle à ε_s et on peut donc écrire :

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s .$$

Donc toute la région correspondant à OA , lorsqu'on supprime la force F , l'éprouvette reprend sa longueur initiale. On dit que l'on se trouve dans la période élastique. E_s s'appelle *le module d'élasticité* de l'acier. Les expériences ont montré que la valeur de E_s est pratiquement constante quelle que soit la nuance de l'acier utilisé et que l'on avait :

$$E_s = 200\,000 \text{ MPa}.$$

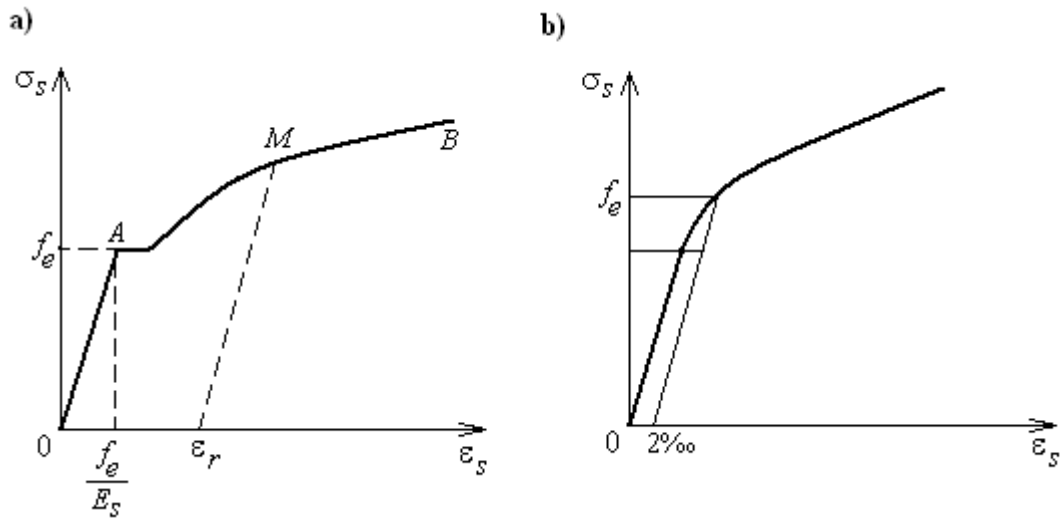


Fig. 1.6. Diagrammes déformations - contraintes
 a - pour des aciers naturels; b - pour des aciers écrouis

La valeur f_e correspondant au point A (ce point limite la région dans laquelle l'acier se trouve dans un état élastique) s'appelle la *limite élastique*. La valeur de f_e varie avec les différents types d'acier.

Si l'on continue à faire croître la force F au-delà de la valeur correspondant au point A, on constate qu'après le palier, la courbe représentative s'incurve. Si, en un point M, on supprime l'effort F , l'éprouvette ne reprend plus sa longueur initiale, le point M décrit la droite $M \varepsilon_r$, pratiquement parallèle à OA. La déformation ε_r s'appelle l'allongement rémanent.

En poursuivant l'expérience au-delà du point M, on arrive à un point B qui représente la contrainte maximale à laquelle le métal est susceptible de résister. Au-delà de B l'éprouvette continue à s'allonger, même sous des charges décroissantes, et l'on parvient rapidement à la rupture. L'application d'un effort de compression à la place de l'effort de traction donne un diagramme symétrique par rapport à l'origine de celui examiné ci-dessus. Le module d'élasticité et la limite élastique ont les mêmes valeurs en traction et en compression. Lorsqu'on réalise une expérience analogue à la précédente avec un acier écroui, le palier A n'est plus aussi net et la courbe représentative est pratiquement continue (fig. 1.6,b). La limite d'élasticité est donc plus difficile à saisir, aussi dans ce cas on considère, par convention, que la limite élastique correspond à la contrainte pour laquelle l'allongement rémanent est égal à 2 ‰.

1.2.3. Résistances des aciers

Dans les calculs de béton armé relatifs aux états-limites ultimes, on remplace les diagrammes réels (fig.1.6) par les diagrammes conventionnels (fig.1.7). On passe du diagramme déformations - contraintes réel au diagramme déformations - contraintes de calcul en effectuant sur le premier une affinité parallèlement à la droite OA et de rapport $1/\gamma_s$.

Donc, si M est un point du diagramme déformations - contraintes, on obtiendra le point correspondant M_1 du diagramme déformations - contraintes de calcul en traçant mM parallèlement à OA et en portant sur cette droite

$$mM_1 = mM / \gamma_s .$$

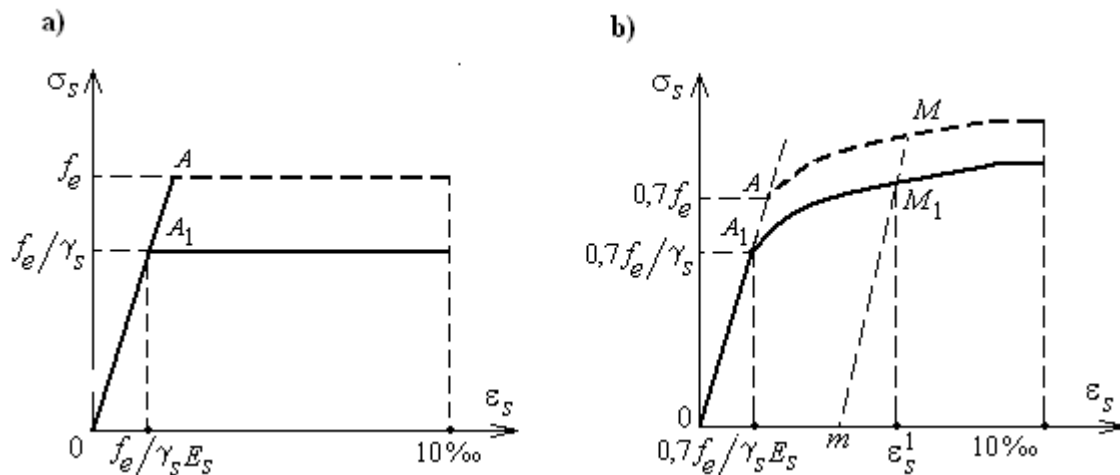


Fig. 1.7. Diagramme déformations - contraintes de calcul

- a - pour les armatures: ronds lisses, barres à haute adhérence type 1, fil à haute adhérence type 3, treillis soudés en fils lisses ;
- b - pour les armatures : barres à haute adhérence type 2, treillis soudés en fils à haute adhérence

Par conséquent on aura, pour les diagrammes déformations - contraintes de calcul, les diagrammes définis comme suit :

Pour les ronds lisses et les aciers de types 1 et 3. Le diagramme conventionnel pour ces armatures est présenté sur la figure 1.7,a. Jusqu'au point A, correspondant à la limite élastique f_e , la résistance des aciers est prise égale à $\sigma_s = E_s \varepsilon_s$. A partir du point A on considère que le diagramme est constitué par une horizontale et la résistance de calcul des aciers est prise constante et égale à f_e / γ_s . L'allongement unitaire de l'acier est limité à 10 ‰.

Pour les aciers de type 2. Le diagramme pour ces armatures est représenté sur la figure 1.7,b. Jusqu'au point A, correspondant à l'ordonnée $0,7f_e$, du diagramme conventionnel déformations - contraintes est constitué par la droite OA. Tandis que le diagramme contraintes - déformations de calcul comporte jusqu'au point A_1 , d'ordonnée $0,7 f_e / \gamma_s$, la droite OA_1 . Donc entre le point O et A_1 , la résistance de l'acier sera égale à : $\sigma_s = E_s \varepsilon_s$; à partir du point A_1 et jusqu'à $\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$, le diagramme se prolonge par une courbe dont on détermine l'équation :

$$\varepsilon_s = (\sigma_s / E_s) + 0,823 [(\gamma_s \sigma_s / f_s) - 0,7]^5. \quad (1.8)$$

Dans cette équation σ_s représente alors la contrainte de calcul pour l'acier. L'abscisse du point A_1 a pour valeur

$$\varepsilon_s = 0,7 f_e / \gamma_s E_s.$$

Les tableaux A-1 et A-2 donne, pour les aciers couramment utilisés, la valeur de la limite élastique f_e . Ces tableaux comportent également les valeurs de l'allongement ε_l correspondant au début du palier. Cet allongement peut être déterminé comme suit :

1) Pour les aciers dont le diagramme déformations - contraintes de calcul est représenté par la figure 1.7,a (ronds lisses, barres à haute adhérence type 1, fils à haute adhérence type 3, treillis soudés en fils lisses) :

$$\varepsilon_l = f_e / \gamma_s E_s, \quad \text{comme } E_s = 200\,000 \text{ MPa,}$$

alors : $1000 \varepsilon_l = f_e / 200 \gamma_s \text{ (MPa)}.$

Les valeurs des contraintes de calcul σ_s sont :

- tant que l'allongement de l'acier ε_s est supérieur à ε_l , le diagramme $\sigma_s - \varepsilon_s$ est représenté par une horizontale d'ordonnée

$$\sigma_s = f_e / \gamma_s ;$$

- tant que l'allongement de l'acier ε_s est inférieur à ε_l , le diagramme déformations - contraintes de calcul est représenté par une droite et par suite on a pour la contrainte de calcul

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s = 200\,000 \varepsilon_s, \quad \text{ou} \quad \sigma_s = 200 (1000 \varepsilon_s).$$

2) Pour les armatures de type 2 le diagramme $\sigma_s - \varepsilon_s$ est représenté par la fig. 1.7,b. Si on a à se référer à la figure 1.7,b en considérant que le point M correspond à la limite élastique f_e , le point M_1 correspondra alors à la contrainte de calcul f_e / γ_s . On a :

$$m \varepsilon_s^1 = f_e / \gamma_s E_s, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon_l = (2 / 1000) + (f_e / \gamma_s E_s),$$

$$\text{c'est-à-dire que : } 1000 \varepsilon_l = 2 + (f_e / 200 \gamma_s) . \quad (1.9)$$

Il y a lieu de noter que, pour les aciers de type 2, la valeur de μ_l correspond à la contrainte f_e / γ_s et la valeur de μ (figurant dans la colonne σ_s des tableaux A-1 et A-2) correspond à la contrainte $0,7 f_e / \gamma_s$. C'est la raison pour laquelle, dans les tableaux, pour le type d'acier considéré elles sont différentes, alors que pour les autres types d'acier ces valeurs étaient égales puisqu'elles correspondaient toutes deux à la contrainte f_e / γ_s . Les valeurs des coefficients : α_l, μ_l, β_l seront définies dans le chapitre 3.

1. 3. Propriétés essentielles du béton armé

1.3.1. Adhérence entre béton et acier

On note que pour un même béton la masse du mètre cube de béton armé dépend, évidemment, de la qualité des aciers employés comme armatures. On prend, en général, pour masse volumique du béton armé la valeur moyenne de $2500 \text{ kg} / \text{m}^3$.

Le béton et l'acier présentent la propriété d'adhérer fortement entre eux lorsque les armatures sont convenablement enrobées de béton. C'est là une propriété importante puisque c'est grâce à elle que les efforts peuvent se transmettre entre acier et béton.

La contrainte d'adhérence τ_s , est déterminée en arrachant des barres d'acier noyées dans le béton (fig.1.8).

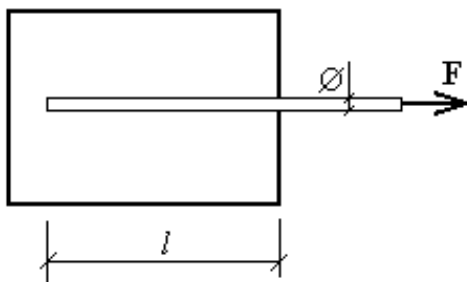


Fig.1.8

La valeur des contraintes d'adhérence est déterminée d'après la formule :

$$\tau_s = F / u_i l,$$

où u_i étant le périmètre utile d'une barre noyée dans le béton ;
 l , la longueur de scellement.

Les périmètres utiles qui interviennent dans le calcul des contraintes d'adhérence sont définis de la manière suivante :

a) Pour des barres isolées (fig.1.9,a) le périmètre utile est égal à leur périmètre nominal : $u_i = \pi \varnothing$.

b) Pour des paquets de deux barres (fig.1.9,b) le périmètre utile d'une des barres du paquet est égal à son périmètre nominal : $\pi \varnothing$.

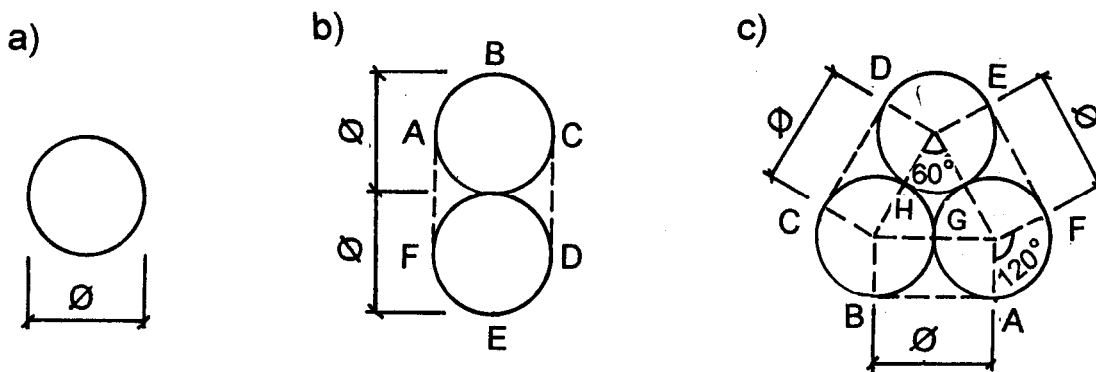
Le périmètre utile du paquet est égal à :

$$u_i = ABCDEF = \pi \varnothing / 2 + \varnothing + \pi \varnothing / 2 + \varnothing = \varnothing (\pi + 2) = 5,14 \varnothing.$$

c) Pour des paquets de trois barres (fig.12.9,c) le périmètre utile d'une des barres du paquet est égal à son périmètre nominal, diminué de deux fois l'arc du périmètre intérieur du paquet appartenant à cette barre :

$$u_i = \pi \varnothing - 2 GH = \pi \varnothing - (2 \pi / 3) (\varnothing / 2) = 2 \pi \varnothing / 3.$$

Le périmètre du paquet de trois barres est pris égal à :



$$u_i = \pi \varnothing = 3,14 \varnothing; \quad u_i = \varnothing (\pi + 2) = 5,14 \varnothing; \quad u_i = \varnothing (\pi + 3) = 6,14$$

Fig. 1.9. Périmètres utiles pour les ancrages

a - barre isolée; b - paquet de deux barres; c - paquet de trois barres

$$\begin{aligned} u_i &= AB + BC + CD + DE + EF + FA = \\ &= 3 \varnothing + 3 (\pi \varnothing / 3) = \varnothing (\pi + 3) = 6,14 \varnothing . \end{aligned}$$

La valeur limite de la contrainte d'adhérence pour l'ancrage des armatures en barres est prise égale à :

$$\tau_{su} = 0,6 \psi_s^2 f_{t28} \quad (1.10)$$

où ψ_s est le coefficient de scellement pris égal à :

$\psi_s = 1,0$ pour les ronds lisses ;

$\psi_s = 1,5$ pour des barres à haute adhérence ;

f_{t28} est la résistance caractéristique à la traction du béton à 28 jours.

Pour les bétons courants on obtient, par application de la formule précédente, les valeurs données par le tableau 1.2.

Tableau 1.2

Valeurs de $\tau_{su} = 0,6 \psi_s^2 f_{tj}$ (en MPa)

BETON	f_{c28} (MPa)	16	18	20	25	30	40	50	60
	f_{t28} (MPa)	1,56	1,68	1,80	2,10	2,40	3,00	3,60	4,20
ACIER	$\psi_s = 1,0$	0,94	1,01	1,08	1,26	1,44	1,80	2,16	2,52
	$\psi_s = 1,5$	2,11	2,27	2,43	2,83	3,24	4,05	4,86	5,67

1.3.2. Ancrage de l'armature dans le béton

Pour une barre isolée, la longueur de scellement droit l_s , est égale à la longueur nécessaire pour qu'une barre rectiligne de diamètre \varnothing , soumise à une contrainte égale à sa limite élastique, f_e , soit convenablement ancrée. Comme, pour le cas considéré, $u_i = \pi \varnothing$, on a :

$$F = A_s f_e = u l_s \tau_s, \quad \text{ou encore} \quad F = (\pi \varnothing^2 / 4) f_e = \tau_s \pi \varnothing l_s,$$

$$\text{d'où} \quad l_s = (\varnothing f_e) / 4 \tau_s. \quad (1.11)$$

La valeur de l_s est la même lorsque la barre est soumise à un effort de traction ou à un effort de compression.

Compte tenu des résultats indiqués au tableau 1.2 pour τ_s , on obtient pour l_s les valeurs données par le tableau 1.3.

Tableau 1.3
Longueur de scellement droit l_s

f_{c28} (MPa)		20	25	30	35
Ronds lisses	Fe E 215	49 \varnothing	41 \varnothing	38 \varnothing	34 \varnothing
	Fe E 235	53 \varnothing	45 \varnothing	42 \varnothing	37 \varnothing
Barres à haute adhérence	Fe E 400	42 \varnothing	36 \varnothing	31 \varnothing	28 \varnothing
	Fe E 215	52 \varnothing	45 \varnothing	39 \varnothing	35 \varnothing

Les règles *B.A.E.L* admettent, qu'à défaut de calcul plus précis, on adopte les valeurs forfaitaires suivantes :

$l_s = 50 \varnothing$ pour les ronds lisses Fe E 215 et Fe E 235 ($\psi_s = 1,0$);

$l_s = 40 \varnothing$ pour les aciers à haute adhérence Fe E 400 ($\psi_s = 1,5$);

$l_s = 50 \varnothing$ pour les aciers à haute adhérence Fe E 500 ($\psi_s = 1,5$).

Pour une barre faisant partie d'un paquet de deux barres, la valeur de l_s demeure celle donnée ci-dessus car on a encore $u_i = \pi \varnothing$.

Pour une barre faisant partie d'un paquet de trois barres on a vu que $u_i = 2 \pi \varnothing / 3$, on a alors :

$$F = \pi \varnothing^2 f_e / 4 = \tau_s 2 \pi \varnothing l_{s1}, \quad \text{d'où} \quad l_{s1} = 3 \varnothing f_e / 8 \tau_s = 1,5 l_s.$$

Les valeurs données ci-dessus pour l_s sont donc à multiplier par le coefficient 1,5.

Il y a lieu de bien noter que l_{s1} ne représente pas la longueur de scellement droit d'un paquet de trois barres car, les barres d'un paquet doivent toujours être ancrées individuellement ; l_{s1} représente la longueur d'ancrage de la première barre du paquet (fig. 1.14).

La longueur l_s nécessaire pour ancrer une barre droite (longueur définie ci-dessus) est souvent trop importante par rapport à la place dont on dispose, aussi est-on amené à utiliser des ancrages courbes.

Les ancrages courbes les plus fréquemment utilisés sont représentés sur la figure 1.10.

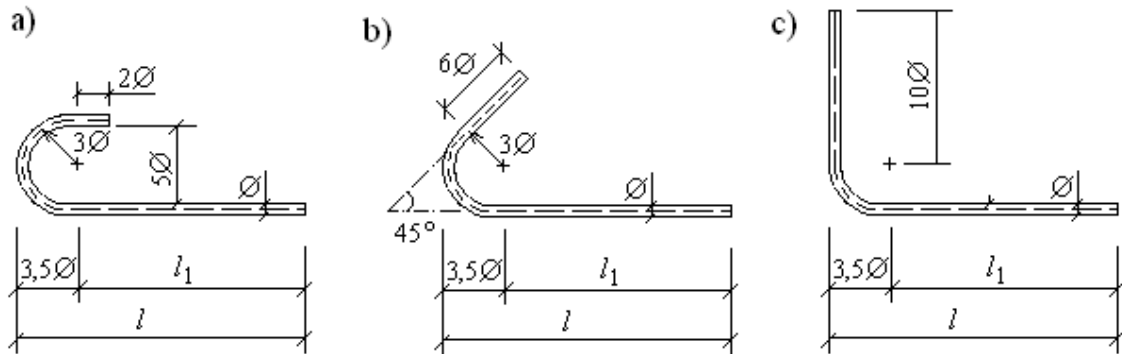


Fig. 1.10. Types des ancrages courbes

a - crochet normal; b - crochet à 45°; c - retour d'équerre

La valeur de $3\varnothing$, indiquée sur la figure 1.10, pour le rayon de courbure mesuré sur l'axe de la barre, ne peut être admise que pour les ronds lisses des classes $Fe E 215$ et $Fe E 235$. Dans le cas des cadres, étriers et épingles ce rayon de courbure peut être réduit à $2\varnothing$ pour les nuances considérées.

Pour les barres à haute adhérence de classe $Fe E 400$ et $Fe E 500$ le rayon de courbure doit être au moins égal à $5,5 \varnothing$ (fig. 1.11,b). Cette valeur est établie d'après la condition que dans toute partie d'une barre de diamètre \varnothing , le rayon de courbure "r" doit satisfaire à l'inégalité suivante dite *condition de non-écrasement du béton* :

$$r / \varnothing \geq 0,2 [1 + (\varnothing / e_r) (v \sigma_s / f_{cj})], \quad (1.12)$$

où e_r est la distance du centre de courbure de la barre à la paroi, dont la proximité augmente le risque d'écrasement du béton ;

- σ_s , la contrainte de calcul évaluée à l'origine de la courbure, sous la sollicitation ultime ;
- v , le coefficient numérique prenant les valeurs suivantes :
 - $v = 1,0$ lorsque la barre est isolée ou fait partie d'un ensemble des barres courbées réparties en un seul lit ;
 - $v = 5/3; 7/3; 3$ respectivement lorsque la barre fait partie d'un ensemble disposé en 2, 3 ou 4 lits, sous réserve que les distances libres entre lits successifs sont au moins égales au diamètre des plus grosses barres.

Par mesure de simplification, les règles *B.A.E.L* indiquent, qu'à défaut de calcul plus précis, on peut admettre que l'ancrage d'une barre rectiligne, terminée par un crochet normal, est assuré lorsque la longueur de la partie ancrée mesurée hors crochet (fig. 1.11) est au moins égale à :

- $0,6 l_s$ pour les aciers lisses de classe *Fe E 215* et *Fe E 235*;
- $0,4 l_s$ pour les barres à haute adhérence de classe *Fe E 400* et *Fe E 500*.

Si on tient compte des valeurs de l_s (tableau 1.3), on obtient pour longueur de la partie ancrée, mesurée hors crochets :

- $30 \varnothing$ pour les ronds lisses *Fe E 215* et *Fe E 235*;
- $16 \varnothing$ pour les aciers à haute adhérence *Fe E 400*;
- $20 \varnothing$ pour les aciers à haute adhérence *Fe E 500*.

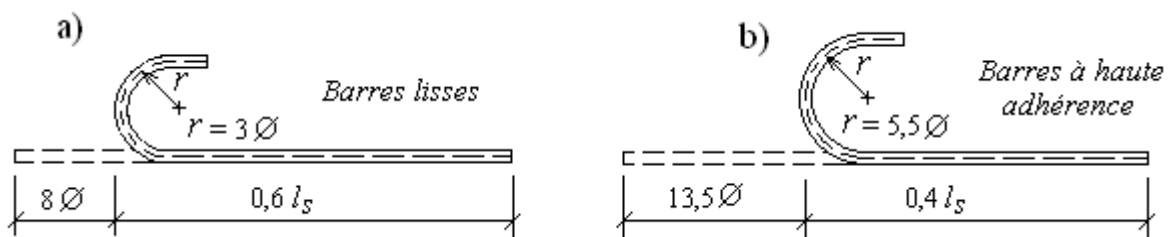


Fig. 1.11

Pour les treillis soudés constitués de fils ou de barres à haute adhérence, on applique les règles données ci-dessus pour les aciers en barres.

Pour les treillis soudés constitués de fils lisses, on considère que l'ancrage d'un fil est assuré, non par l'adhérence entre ce fil et le béton, mais par l'appui sur le béton des fils transversaux qui lui sont soudés. On admet, à la suite de résultats expérimentaux, que chaque soudure

de fil transversal peut équilibrer un effort au plus égal au tiers de l'effort maximal de calcul s'exerçant sur un fil porteur et au plus égale à la moitié de l'effort maximal de calcul s'exerçant sur un fil de répartition. Dans ces conditions, l'ancrage total d'un fil porteur doit comprendre au moins trois soudure (fig.1.12,a) et l'ancrage total d'un fil de répartition doit comprendre au moins deux soudures (fig.1.12,b).

Donc si l'ancrage d'un fil porteur ne comporte que deux soudures (ou une soudure), l'effort équilibré par l'ancrage est égal aux $2/3$ (ou à $1/3$) de l'effort admissible sur le fil.

Pour les cadres, étriers et épingles utilisés comme armatures transversales, on considère que l'ancrage des extrémités de ces armatures est assuré lorsque les parties courbes sont prolongées de parties rectilignes d'une longueur au moins égale à :

- 5 \varnothing à la suite d'un arc de cercle de 180° (fig.1.13,a);
- 10 \varnothing à la suite d'un arc de cercle de 135° (fig.1.13,b);
- 15 \varnothing à la suite d'un arc de cercle de 90° (fig.1.13,c).

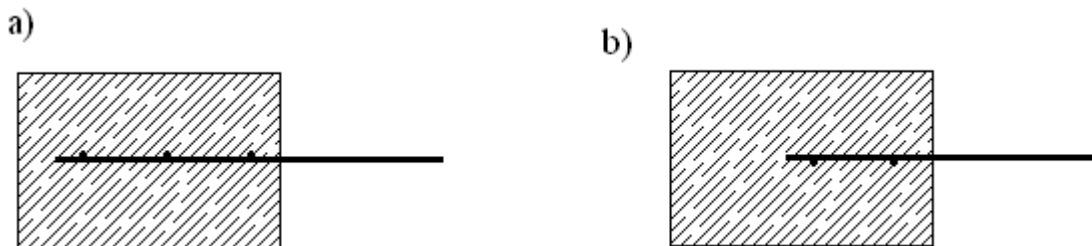


Fig. 1.12. Ancrage des treillis soudés

a - ancrage des fils porteurs; b - ancrage des fils de répartitions

L'ancrage de l'ensemble d'un paquet de barres est interdit. Une barre doit être ancrée individuellement et les longueurs d'ancrage des barres d'un paquet ne doivent pas se chevaucher.

Dans le cas d'utilisation d'ancrages droits, pour les paquets de deux et trois barres, les dispositions schématisées sur la figure 1.14 où l_s représente la longueur de scellement droit d'une barre du paquet.

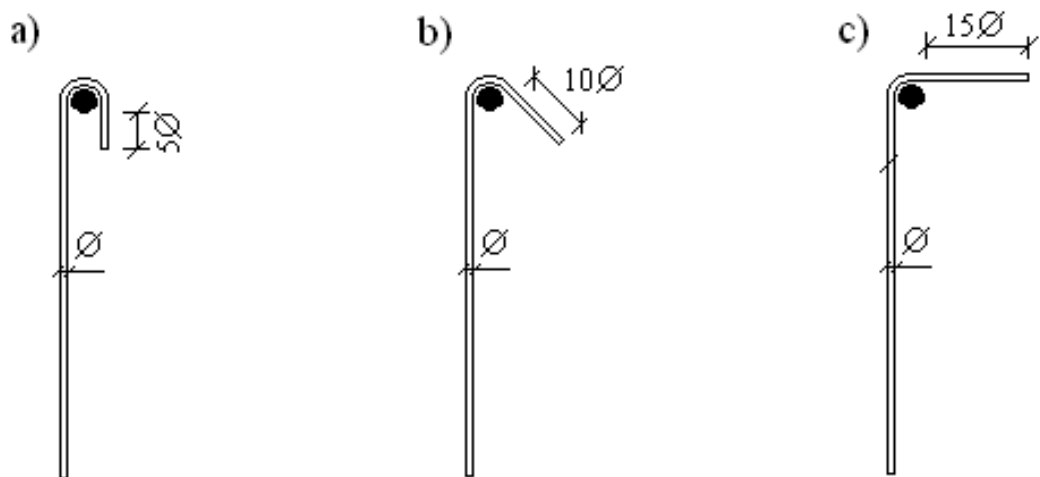


Fig. 1.13. Ancrage des extrémités des cadres, étriers et épingles

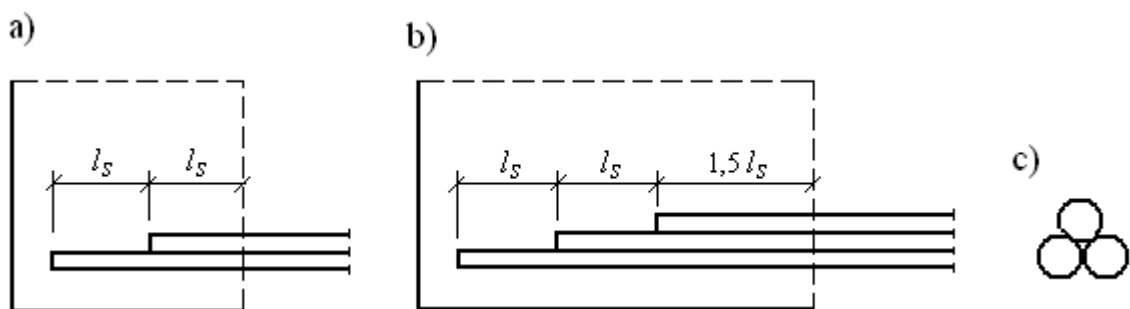


Fig. 1.14. Ancrage des paquets de barres
 a - paquet de deux barres; b - paquet de trois barres

On note que la longueur d'ancrage de la première barre du paquet de 3 barres est $1,5 l_s$ pour la raison indiquée ci-dessus. Sur la fig.1.14,*b*, pour la clarté du dessin, les deux barres inférieures ont été représentées décalées, mais on ne doit pas oublier que, dans un paquet de trois barres, les barres doivent être au contact deux à deux (fig.1.14,*c*).

Dans le cas d'un ancrage à retour d'équerre (fig.1.15), lorsqu'une des branches est parallèle à une paroi et à sa proximité immédiate, l'effort de traction F s'exerçant sur la barre a tendance à déplier celle-ci. Il en résulte une poussée sur la mince pellicule de béton qui risque d'éclater. Il est donc nécessaire, dans ce cas, de relier le retour de l'ancrage à la masse du béton au moyen d'une ligature ayant un

diamètre de l'ordre du quart de celui de la barre à ancrer et une longueur au moins égale à sa longueur de scellement (fig.1.15,a).

Quelque fois, pour assurer la condition de non-écrasement du béton, on a intérêt à augmenter le plus que possible la distance d_1 du centre de courbure de l'armature à la paroi, par exemple en inclinant le crochet vers l'intérieur de la pièce (fig.1.15,b).

Au droit d'un ancrage il faut prévoir des armatures transversales (fig.1.15,c). Pour coudre l'ancrage rectiligne d'une armature de section A_s et de limite élastique f_e , il faut une section totale d'armature de couture ΣA_t , de limite élastique f_{et} , telle que l'on ait :

$$\Sigma A_t f_{et} \geq A_s f_e . \quad (1.13)$$

Notons que les armatures transversales, calculées pour reprendre des efforts tranchants et prolongées sur les appuis, sont généralement suffisantes pour satisfaire cette condition.

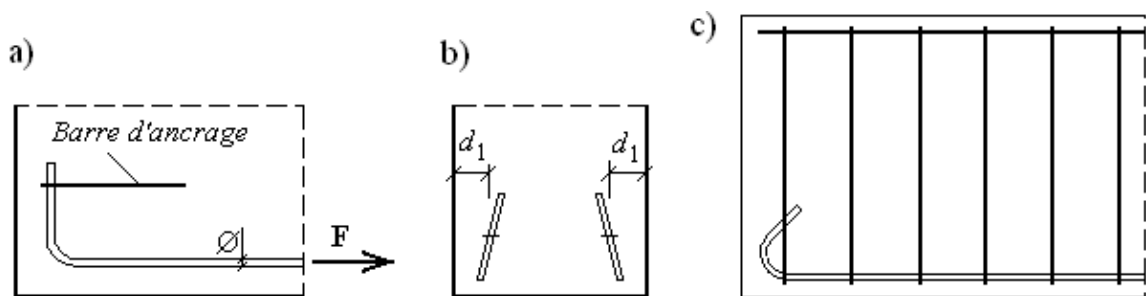


Fig. 1.15. Dispositions à prévoir pour les ancrages

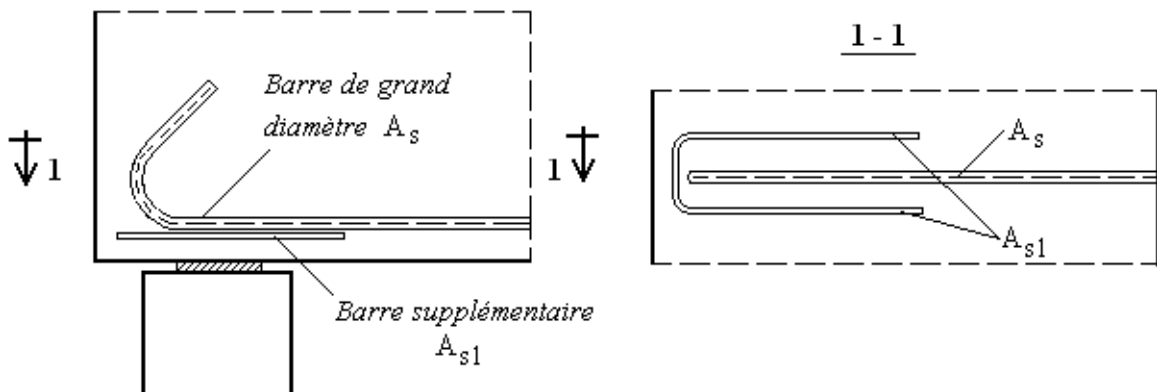


Fig. 1.16

Lorsque sur l'extrémité d'une poutre, des armatures de gros diamètre sont ancrées avec un grand rayon de courbure, il existe un risque de fendage au voisinage de l'arête inférieure de la poutre. Pour remédier à ce risque, il y a lieu de prévoir des armatures supplémentaires A_{s1} , destinées à armer le coin susceptible d'être fissuré et disposées comme indiqué sur la figure 1.16. En pratique, une telle disposition n'est toutefois à envisager que pour des poutres importantes, telles les poutres principales d'un pont.

1.3.3. Jonction des armatures par simple recouvrement

Les aciers livrés dans le commerce étant de longueur limitée, il peut être nécessaire, dans une pièce de grande longueur, de constituer chaque armature longitudinale au moyen de plusieurs barres consécutives. Pour rétablir la continuité entre les armatures, on utilise soit la jonction mécanique par des manchons ou par soudure (bout à bout ou par recouvrement), soit le recouvrement simple, c'est-à-dire qu'on fait un chevauchement des barres sur une longueur l_r , dite longueur de recouvrement.

1) *Armatures tendues.* La jonction de deux barres rectilignes parallèles et identiques, de diamètre nominal \emptyset , est assurée lorsque leurs extrémités se chevauchent sur une longueur au moins égale à :

- la longueur de scellement l_s , si la distance "c" entre axes des barres est inférieure ou égale à $5 \emptyset$;
- la longueur $l_s + c$, si la distance "c" est supérieure à $5 \emptyset$.

Lorsque les barres tendues sont munies à leurs extrémités de crochets normaux, leur jonction par recouvrement est assurée si les barres se chevauchent sur une longueur au moins égale à :

0,6 l_s pour les aciers *Fe E 215* et *Fe E 235* ;

0,4 l_s pour les barres à haute adhérence, à la condition que l'écartement transversal des centres de leurs crochets "c" soit inférieur ou égal à $5 \emptyset$.

Si la distance "c" est supérieur à $5 \emptyset$ on prend :

0,6 $l_s + c$ pour les aciers *Fe E 215* et *Fe E 235* ;

0,4 $l_s + c$ pour les barres à haute adhérence.

Donc, avec les valeurs forfaitaires indiquées ci-dessus, les longueurs de recouvrement des armatures tendues ont pour valeurs :

- pour les barres rectilignes :

50 \varnothing pour les aciers *Fe E 215* et *Fe E 235* ;

40 \varnothing pour les barres à haute adhérence *Fe E 400* ;

50 \varnothing pour les barres à haute adhérence *Fe E 500*

(notons que ces quantités étant à majorer de "c", si la distance entre axe des barres $c \geq 5 \varnothing$) ;

- pour les barres munies de crochets normaux :

30 \varnothing pour les aciers *Fe E 215* et *Fe E 235* ;

16 \varnothing pour les barres à haute adhérence *Fe E 400* ;

20 \varnothing pour les barres à haute adhérence *Fe E 500*

(ces quantités étant à majorer de "c", écartement transversal des centres de courbure, si $c \geq 5 \varnothing$).

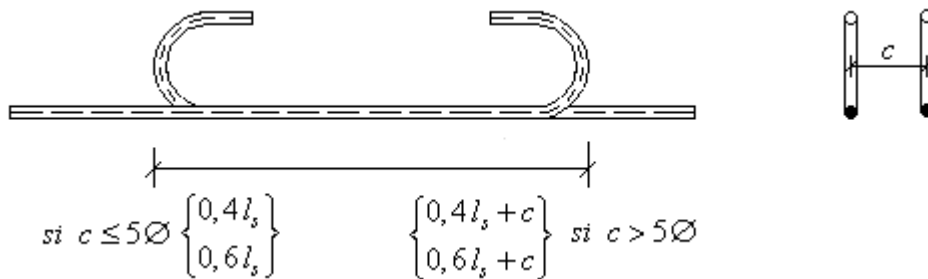


Fig. 1.17

2) *Armatures comprimées.* Les recouvrements des armatures comprimées se font sans crochets car ces derniers risqueraient de faire éclater le béton qui les entoure. Donc, les jonctions des barres susceptibles d'être comprimées sont obligatoirement rectilignes. La longueur de recouvrement est prise égale à $0,6 l_s$, à condition que :

- les barres qui se recouvrent soient toujours comprimées;

- chacune des barres ne fasse pas partie d'un paquet de trois, c'est-à-dire qu'il s'agisse d'un recouvrement de barres isolées ou de barres faisant partie d'un paquet de deux barres;

- la distance entre axes des barres soit inférieure à $5 \varnothing$.

Avec les valeurs forfaitaires indiquées au paragraphe précédent, les longueurs de recouvrement des armatures comprimées deviennent :

30 \varnothing pour les aciers *Fe E 215* et *Fe E 235* ;

24 \varnothing pour les aciers à haute adhérence *Fe E 400* ($\psi_s \geq 1,5$);

30 \varnothing pour les aciers à haute adhérence *Fe E 500* ($\psi_s \geq 1,5$);

Si les barres qui se recouvrent sont susceptibles d'être tendues ou peuvent être soumises à des chocs, la longueur de recouvrement est prise égale à celle indiquée pour les armatures tendues non munies de crochets.

3) *Treillis soudés.* Pour les treillis soudés constitués par des *fils lisses*, la jonction par recouvrement doit comporter trois soudures sur chaque fil, s'il s'agit de fils porteurs, et deux soudures sur chaque fil, s'il s'agit de fil de répartitions (fig. 1.18). Les soudures intéressées sur l'un et l'autre fil sont, dans chaque paire, écartées d'au moins quatre centimètres dans le sens opposé à celui de l'effort qui tend à les rapprocher.

Pour les treillis soudés constitués par des *fils à haute adhérence*, on utilise les règles données ci-dessus (armatures tendues) pour les aciers en barres droites.

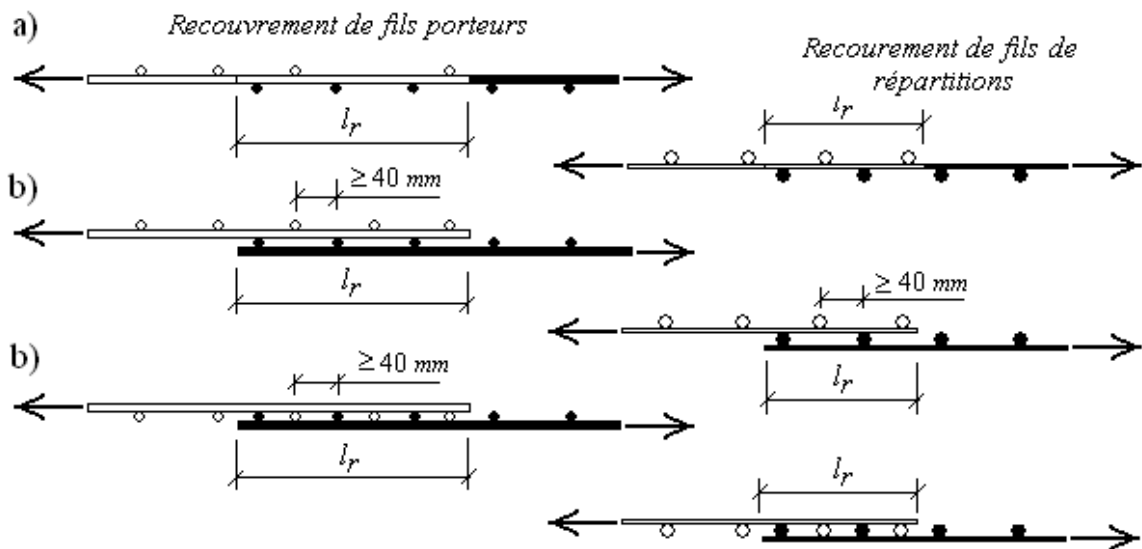


Fig. 1.18

- a - nappes se recouvrant dans la même plan ;
- b - nappes se recouvrant dans des plans distincts

Armatures de couture. Dans le cas d'une jonction par recouvrement de deux barres parallèles, la résistance de l'ensemble des armatures de couture doit être au moins égale à celle de chacune des barres. Si deux barres rectilignes soumises à un effort de traction F , se recouvrent sur une longueur l_r (fig. 1.19), on admet que, dans un recouvrement ou dans un ancrage, l'effort existant dans une barre se

transmet par des bielles de béton comprimées, inclinées à 45° sur l'axe de la barre. L'équilibre de ces bielles entraîne l'existence d'une force de traction F , perpendiculaire aux armatures longitudinales (fig.1.19,c), force qui doit être équilibrée par des armatures de couture (fig.1.19,b).

Donc, si A_s est la section de chacune des armatures se recouvrant et f_e la limite élastique de l'acier constituant ces armatures, la section totale ΣA_t des armatures de couture, de limite élastique f_{et} , devra être telle que l'on ait : $\Sigma A_t f_{et} \geq A_s f_e$.

Dans le cas du recouvrement d'une barre avec deux barres disposées symétriquement (fig.1.19,d), l'équilibre des bielles à 45° donne alors une force de traction égale à $F / 2$. C'est cet effort que devront équilibrer les armatures de couture.

Dans le cas où les barres en recouvrement seraient munies de crochets normaux, les armatures de couture doivent présenter une section au moins égale à la moitié de celle qui serait nécessaire pour un scellement droit.

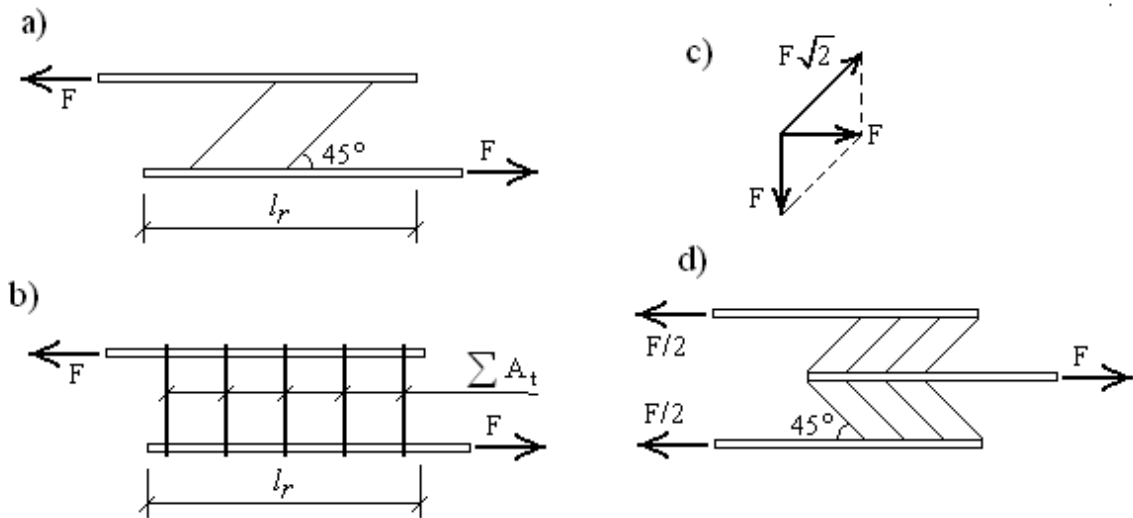


Fig. 1.19

Les armatures de couture sont constituées de barres de petit diamètre et uniformément réparties sur la longueur l_r .

Dans les circonstances courantes, pour les poutres, on peut se dispenser de la vérification des armatures de couture à condition que la longueur d'ancrage des barres arrêtées soit égale à leur longueur de scellement droit et que la proportion de barres ancrées ne dépasse pas 25 % sur l'étendue d'une longueur d'ancrage; pour les poutres les

plus usuelles, les armatures d'âme ou de talon sont en général suffisantes pour assurer le rôle de couture vis-à-vis des efforts développés aux ancrages.

Pour les plaques et coques (dalles et voiles courbes), il n'y a généralement pas lieu de fournir des justifications relatives aux coutures, à condition d'appliquer la disposition suivante: la proportion de barres assemblées par un recouvrement rectiligne dans une nappe donnée ne doit pas dépasser le tiers si cette nappe est la plus proche d'une paroi et la moitié si elle est séparée de la paroi par une nappe d'orientation différente.

1.3.4. Effets de la température et du retrait. Epaisseur de la couche d'enrobage

Lorsqu'un ouvrage n'est pas librement dilatable il doit être tenu compte des efforts produits par les variations de température et de retrait du béton.

1) *Variation de température.* Sous l'influence d'une variation de température Δt° , la longueur l d'une pièce tend à se modifier de $\Delta l = l \alpha \Delta t$. Si des liaisons s'opposent à ces changements de longueur, il en résulte des efforts qui doivent être déterminés, le plus souvent, à l'aide des méthodes de calcul propre aux constructions hyperstatiques.

En général on prend pour valeur du coefficient de dilatation du béton armé $\alpha = 10^{-5}$.

2) *Retrait du béton.* A défaut de mesures, on estime que le raccourcissement unitaire dû au retrait atteint les valeurs suivantes pour des pièces non massives et situées à l'aire libre de 2×10^{-4} à 3×10^{-4} .

Dans les calculs relatifs aux constructions courantes telles que les bâtiments d'habitation, les constructions industrielles, on peut ne pas tenir compte des effets dus aux variations de température et au retrait pour les éléments de la construction compris entre des joints distants au maximum de :

25 m dans les régions sèches et à forte opposition de température;
50 m dans les régions humides et tempérées.

3) *Epaisseur de la couche d'enrobage, distances entres les barres*

Les distances entre les armatures et les parois, et entre les armatures elles-mêmes, doivent être suffisantes pour assurer une

bonne adhérence ainsi qu'une protection efficace contre l'oxydation des armatures et pour permettre une mise en place correcte du béton.

On appelle enrobage d'une barre, la distance de la génératrice de la barre au parement de béton le plus voisin (la distance c sur la figure 1.20), et distance libre entre deux barres, la distance comprise entre deux génératrices voisines (distance d_l sur la même figure).

Pour assurer *la protection des armatures*, l'enrobage de toutes les armatures (armatures longitudinales et armatures transversales) doit être au moins égal à :

50 mm pour les ouvrages à la mer ou exposés aux embruns ou aux brouillards salins, ainsi que pour les ouvrages exposés à des atmosphères très agressives. Cet enrobage de 50 mm peut être réduit à 30 mm si, soit le béton, soit les armatures sont protégées par un procédé dont l'efficacité a été démontrée ;

30 mm pour les parois, coffrées ou non, susceptibles d'être soumises à des actions agressives, aux intempéries ou à des condensations ou, eu égard à la destination des ouvrages, au contact d'un liquide (réservoirs, tuyaux, canalisations, faces supérieures des hourdis des ponts, etc.). Cet enrobage de 30 mm peut être ramené à 20 mm lorsque le béton présente une résistance caractéristique supérieure à 40 MPa ;

10 mm pour les parois qui seraient situées dans des locaux couverts et clos et qui ne seraient pas exposés aux condensations.

Les enrobages des armatures doivent être strictement assurés à l'exécution, c'est-à-dire qu'ils ne comportent aucune tolérance en moins par rapport à la valeur normale. D'autre part il y a lieu de s'assurer par des dessins de détail comportant toutes les armatures secondaires non calculées que ces conditions d'enrobage peuvent être satisfaites. Le respect de l'enrobage exige une densité convenable de cales ou écarteurs entre les armatures et le coffrage, ainsi que des carcasses rendues suffisamment rigides par l'adjonction d'armatures secondaires qui ne résultent pas forcément des calculs réglementaires. On note que la protection efficace des armatures ne peut être offerte que par le seul respect de l'enrobage prescrit ; il est non moins essentiel que le béton soit suffisamment dosé.

Dans tout les cas, pour assurer *l'adhérence* et la possibilité de bétonnage correct, l'enrobage de chaque armature doit être au moins égal à :

- son diamètre si elle est isolée;
- la largeur du paquet dont elle fait partie si elle n'est pas isolée.

On a vu donc, que l'enrobage devait satisfaire à deux conditions : protection des armatures, et adhérence et possibilités de bétonnage correct. C'est naturellement, la plus défavorable qu'il y a lieu de retenir.

La *distance libre* entre deux armatures voisines doit être au moins égale, dans toutes les directions à :

- leur diamètre si elles sont isolées;
- la largeur du paquet dont elle fait partie si elles sont groupées en paquets.

En outre, si l'on appelle c_g la grosseur du plus gros granulat utilisé, il faut que :

- la distance libre horizontale entre deux armatures voisines soit au moins égale à $1,5 c_g$;
- la distance libre verticale entre deux armatures voisines soit au moins égale à c_g .

La figure 1.21 résume les principales dispositions concernant l'enrobage et les distances entre armatures voisines dans le cas le plus général de paquets de largeur a et de hauteur $b \leq 2 a$.

Notons qu'il y a toujours intérêt à adopter des distances entre des armatures voisines supérieures aux valeurs minimales indiquées, particulièrement, dans le cas où les armatures ne seraient pas aisément accessibles au bétonnage.

Ainsi, les mailles des grilles formées par les armatures longitudinales et les armatures transversales doivent être assez larges pour ne pas gêner la mise en place du béton. Dans le cas des poutres, l'espacement des cours successifs d'armatures transversales est au moins égal à deux fois la distance libre entre armatures longitudinales.

Comme exemple on considère une poutre dont les armatures longitudinales sont constituées de $\varnothing 16 \text{ mm}$ et les armatures transversales (cadres) de $\varnothing 8 \text{ mm}$ (fig. 1.22,a), cette poutre est située dans un local couvert et n'est pas exposée aux condensations.

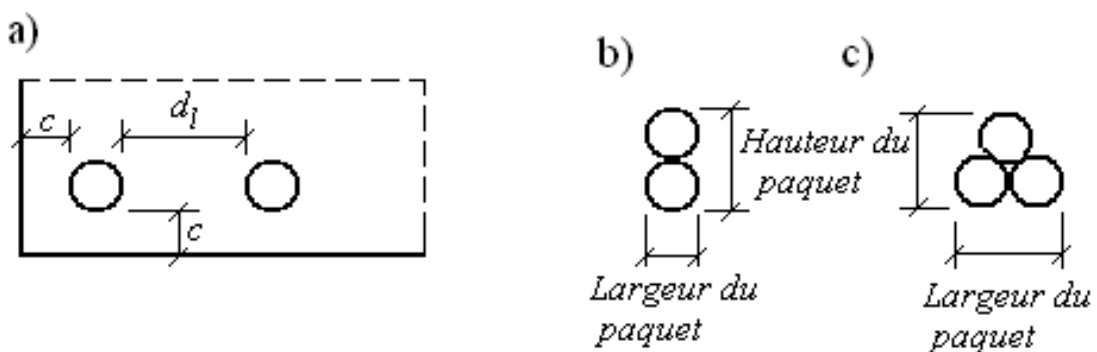


Fig. 1.20

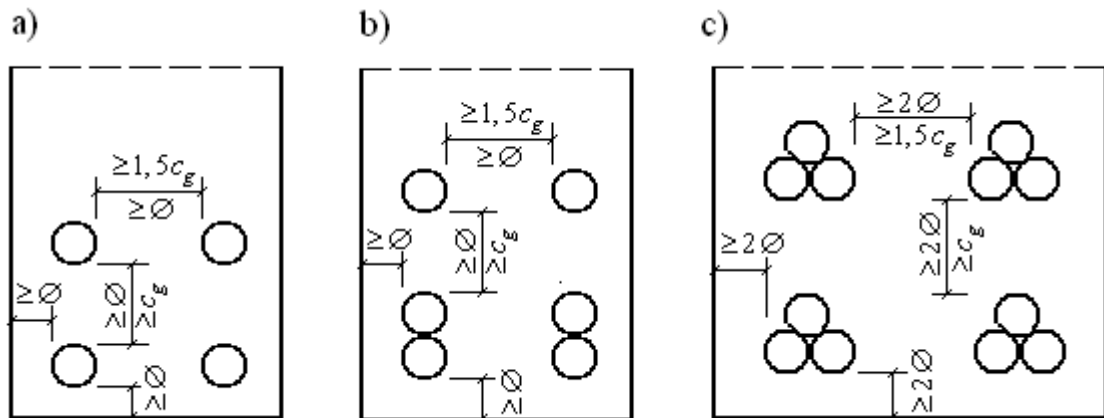


Fig. 1.21. Position et écartement des armatures

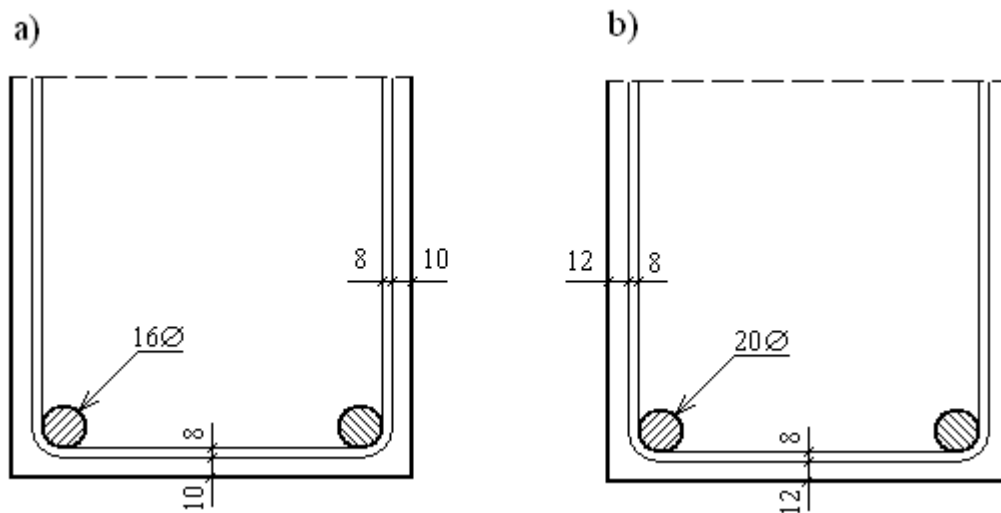


Fig. 1.22

La première condition (protection des armatures) donne, pour la distance de la génératrice intérieure du cadre à la paroi

$$10 + 8 = 18 \text{ mm} ;$$

la seconde condition (adhérence) ne donne que $\varnothing = 16 \text{ mm}$. Donc, la génératrice extérieure du cadre sera placée à 10 mm de la paroi.

Si la même poutre est armée par les armatures longitudinales de 20 mm de diamètre (fig.1.22,b) et les cadres sont toujours en $\varnothing 8 \text{ mm}$ (autres conditions étant les mêmes), alors dans ce cas on a :

- pour la première condition la distance de la génératrice intérieure du cadre à la paroi, $10 + 8 = 18 \text{ mm}$;
- pour la deuxième condition cette distance est 20 mm .

C'est donc la deuxième condition qui est ici déterminante et la génératrice extérieure du cadre sera placée au moins à 12 mm de la paroi.

CHAPITRE 2. INDICATIONS GÉNÉRALES SUR LES RÈGLES B.A.E.L. 91

2.1. Définition des états-limites

Les ouvrages et éléments d'ouvrages doivent être conçus et calculés de manière à pouvoir résister avec une sécurité appropriée à toutes les sollicitations prévues et à présenter une durabilité satisfaisante durant toute la période d'exploitation envisagée.

Les règles B.A.E.L. prévoient que les calculs de béton armé seront conduits en application de la théorie des états-limites.

On appelle *état-limite*, un état particulier au-delà duquel une structure cesse de remplir les fonctions pour lesquelles elle a été conçue. Un état-limite est donc atteint lorsqu'une condition requise d'une construction (stabilité, absence de rupture, etc.) est strictement satisfaite et cesserait de l'être en cas de modification dans le sens défavorable, d'une des actions agissant sur elle.

Les états-limites se classent en deux catégories.

1. *Les états-limites ultimes*, qui correspondent à la valeur maximale de la capacité portante de la construction et dont le dépassement entraînerait la ruine de l'ouvrage. Ces états-limites sont relatifs à la limite :

- de l'équilibre statique de l'ouvrage ;
- de la résistance de l'un des matériaux utilisés ;
- de la stabilité de forme des éléments de la construction.

2. *Les états-limites de service*, qui constituent les limites au-delà desquelles les conditions normales d'exploitation de la construction ne sont plus satisfaites. On est ainsi amené à considérer :

- une limite pour la valeur de la compression du béton ;
- une limite pour l'ouverture des fissures ;
- une limite pour les déformations des éléments d'une construction.

2.1.1. Etats-limites ultimes

Equilibre statique. Une construction ne doit pas se renverser sous l'effet des charges qui lui sont appliquées. Par conséquent, l'équilibre

statique devra être justifié toutes les fois que les causes extérieures agissant sur un ouvrage seront susceptibles de provoquer un déplacement anormal de cet ouvrage ou d'une de ses parties. Le mode de vérification de l'équilibre statique dépend de la construction étudiée. Pour un plancher, par exemple, dans la plupart des cas l'équilibre statique est évident et n'a pas besoin d'être vérifié. Par contre, il n'en est pas de même pour un mur de soutènement où on doit vérifier la stabilité.

Résistance de chacun des matériaux. Le béton est défini par sa résistance caractéristique à la compression et l'acier par sa limite d'élasticité. Chacune de ces valeurs est affectée de coefficients de sécurité γ_b et γ_s , qui permettent de déterminer les contraintes de calcul, compte tenu de la loi déformations-contraintes du matériau.

On verra que les contraintes des matériaux sont prises en fonction de l'allongement (ou du raccourcissement) limite fixé pour chacun des matériaux.

La distribution des contraintes dans une section étant connue, il est alors possible de calculer la valeur de la sollicitation résistante de cette section S_u . On doit alors vérifier que S_u demeure supérieure ou au moins égale, à la sollicitation S produite par les charges appliquées en considérant les différentes combinaisons des charges. En pratique, on se donne généralement les sections de béton et on détermine la section des armatures de manière que la condition $S \leq S_u$ soit vérifiée.

Stabilité de forme. Les structures élancées soumises à des efforts de compression subissent des déformations amplifiées dues à l'effort normal (effet dit du "second ordre"), c'est le flambement. Il est nécessaire, dans ce cas, de procéder à des vérifications spéciales car, très souvent, une pièce soumise au flambement devient instable sans qu'aucune de ses sections n'ait atteint l'état-limite de résistance.

2.1.2. Etats-limites de service

Les états-limites de service au-delà desquels ne sont plus les conditions normales d'exploitation et de durabilité, qui comprennent les états-limites de fissuration et de déformation. En effet, il n'est pas suffisant qu'une construction ne se renverse pas ou ne se rompe pas, il faut encore que, durant toute sa vie, elle ne présente pas des fissures qui seraient désagréables à l'œil et qui, si elles devenaient trop importantes, risqueraient d'entraîner la corrosion des armatures. En

outre, on ne peut admettre qu'un plancher, par exemple, présente des flèches trop élevées car ces flèches, même si elles ne mettaient pas en cause la sécurité de la construction, pourraient entraîner des désordres dans les cloisons supportées et dans les revêtements de ces cloisons.

La limitation de la compression du béton correspond à un état-limite de formation de fissures parallèles à la direction des contraintes de compression. Cette règle est susceptible d'être prépondérante pour les sections rectangulaires fléchies, surtout si elles comportent des pourcentages d'armatures élevés. Pour les poutres à section rectangulaire soumises à la flexion simple dont les armatures sont en acier de classe *Fe E 400*, il peut être admis de ne pas procéder à la vérification de la contrainte de compression du béton lorsque la hauteur relative de l'axe neutre (y_u/d) à l'état-limite ultime est au plus égale à $0,5 (\gamma - 1) + 0,01 f_{cj}$, où γ désigne le rapport du moment agissant ultime au moment agissant de service ($\gamma = M_u / M_{ser}$).

La contrainte de compression du béton doit être au plus égale à :

$$\sigma_{bc} = 0,6 f_{cj}$$

La limite d'ouverture des fissures. Cette vérification consiste à s'assurer que les armatures sont convenablement disposées dans la section et que, pour l'état-limite considéré la contrainte dans ces armatures ne dépasse pas la résistance pour l'état-limite ultime.

Les formes des divers éléments et les dispositions des armatures sont conçues de manière à limiter la probabilité d'apparition de fissures d'une largeur supérieure à celle qui est tolérable en raison du rôle et de la situation de l'ouvrage. Dans tous les cas, il convient de bien répartir les armatures. Il faut avoir recours à des pourcentages suffisants d'armatures tendues et proportionner leur diamètre aux dimensions transversales des pièces. En général, il faut utiliser le plus petit diamètre, c'est-à-dire le plus grand nombre de barres, compatible avec une mise en place correcte du béton, sans nécessiter d'accroissement injustifié des dimensions transversales des pièces.

Il est nécessaire de limiter l'ouverture des fissures qui peuvent se produire dans les pièces en béton armé car, si cette ouverture devenait trop importante, elle risque d'entraîner la corrosion des armatures et, en outre, on obtiendrait un effet désagréable à l'œil.

Les règles *B.A.E.L* précisent qu'il n'est pas possible de fixer à priori une largeur de fissure à respecter, vu la très grande variabilité du phénomène. Il est donc impossible de fixer des règles générales

concernant le degré de nocivité, d'autant plus que l'appréciation dépend de nombreux facteurs.

D'une manière générale, on parvient à limiter l'ouverture des fissures en utilisant un pourcentage suffisant d'armatures tendues, en évitant d'employer des aciers de trop gros diamètre, et en répartissant convenablement les armatures.

En ce qui concerne la fissuration on distinguera trois cas.

1) Cas où la fissuration est *peu préjudiciable*. La fissuration est considérée comme peu préjudiciable lorsque :

- les éléments sont situés dans des locaux couverts et clos et ne sont pas soumis à des condensations (sauf exceptionnellement et pour de courtes durées) ;

- les parements de cet élément susceptibles d'être fissurés ne sont pas visibles ou sont peu visibles et ils ne font pas l'objet de conditions spécifiques concernant l'ouverture des fissures.

Dans ce cas il n'y a aucune vérification particulière à effectuer, il suffit de respecter les règles générales de bonne construction. Certains éléments font l'objet de règles forfaitaires consacrées par l'expérience. Il s'agit notamment des dalles sur appuis continus, des poutres et de certaines parties des bâtiments courants. Lorsque la membrure d'une poutre est armée de barres de diamètre supérieur à 20 mm, leur écartement horizontal ne doit pas dépasser quatre fois leur diamètre.

2) Cas où la fissuration est considérée comme *préjudiciable*.

La fissuration est considérée comme préjudiciable lorsque les éléments sont exposés aux intempéries ou à des condensations ou peuvent être alternativement noyés ou émergés en eau douce.

Il est alors nécessaire d'observer les règles suivantes :

- la contrainte de traction des armatures tendues est limitée à la plus faible des deux valeurs :

$$\sigma_s \leq 2 f_e / 3 ; \quad \sigma_s \leq \text{Max} (0,5 f_e ; 110 \sqrt{\eta f_{tj}}), \quad (\text{MPa})$$

où f_e est la limite élastique de l'acier utilisé ;

f_{tj} , la résistance caractéristique à la traction du béton ;

η , le coefficient numérique (dit coefficient de fissuration) :

$\eta = 1$ pour les ronds lisses y compris les treillis soudés formés de fils tréfilés lisses ;

$\eta = 1,6$ pour les armatures à haute adhérence (sauf le cas des fils de diamètre inférieur à 6 mm pour lesquels on prend $\eta = 1,3$) ;

- le diamètre des armatures les plus proches des parois est au moins égal à 6 mm ;
- dans les poutres de grande hauteur on dispose des armatures de peau, ces armatures sont placées le long de chaque parement, parallèlement à la fibre moyenne et leur section est au moins 3 cm^2 par mètre de longueur de parement ;
- lorsque la membrure tendue d'une poutre est armée de barres d'un diamètre supérieur à 20 mm , la distance entre axes de deux barres consécutives doit être inférieure ou égale à 4 fois leur diamètre;
- pour les dalles et voiles d'une épaisseur totale h inférieure à 40 cm , la distance entre axes des armatures d'une même nappe ne doit pas dépasser la plus faible des deux valeurs 25 cm et $2 h$.

3) Cas où la fissuration est considérée comme *très préjudiciable*.

La fissuration est considérée comme très préjudiciable lorsque les éléments sont exposés à un milieu agressif (eau de mer ou l'atmosphère marine, embruns, brouillards salins, eau très pure, les gaz ou sols particulièrement corrosif) ou doit assurer une étanchéité.

Dans ce cas, on observe les règles suivantes :

- la contrainte de traction des armatures tendues est limitée à la plus faible des deux valeurs :

$$\sigma_s \leq 0,5 f_e, \quad \sigma_s \leq \text{Max} (0,4 f_e ; 90 \sqrt{\eta f_{tj}}), \quad (\text{MPa})$$

- le diamètre des armatures les plus proches des parois est au moins égal à 8 mm ;
- les armatures de peu des poutres de grande hauteur (les armatures qui sont placées le long de chaque parement, parallèlement à la fibre moyenne) ont une section égale à au moins 5 cm^2 par mètre de longueur de parement ;
- lorsque les armatures tendues d'une poutre comportent des barres d'un diamètre supérieur à 20 mm , la distance entre axes de ces barres ne doit pas excéder 3 fois leur diamètre ;
- dans le cas des dalles et des voiles faisant au plus 40 cm d'épaisseur, l'écartement des armatures d'une même nappe est au plus égal à la plus petite des deux valeurs 20 cm et $1,5 h$ (h étant l'épaisseur totale de l'élément).

Les limites indiquées ci-dessus conduisent, pour les aciers généralement utilisés, aux valeurs figurant sur le tableau 2.1.

Tableau 2.1

Contraintes admissibles de traction dans les armatures

Béton (MPa)		Fe E 215		Fe E 235		Fe E 400		Fe E 500	
f_{c28}	f_{t28}	$\eta = 1$		$\eta = 1$		$\eta = 1,6^*$		$\eta = 1,6^*$	
16	1,56	137	110	137	110	200	160	250	200
18	1,68	143	114	143	114	200	160	250	200
20	1,80	143	115	148	118	200	160	250	200
25	2,10	143	115	157	125	202	161	250	200
30	2,40	143	115	157	125	216	172	250	200
40	3,00	143	115	157	125	241	193	250	200
50	3,60	143	115	157	125	264	+211	264	211
60	4,20	143	115	157	125	267+	+213	285	228

Caractères droits - pour les cas où la fissuration est très préjudiciable ;
 caractères gauches - pour les cas où la fissuration est préjudiciable ;
 * sauf des fils de diamètre $\varnothing < 6 \text{ mm}$ quand $\eta = 1,3$; toutes les valeurs
 (sauf celles qui comportent le signe +) sont multipliées par 0,9.

Lorsque la fissuration est considérée comme préjudiciable ou comme très préjudiciable, il y a lieu de vérifier que les contraintes des armatures tendues (armatures qui ont été déterminées lors des calculs aux états-limites ultimes), sous l'effet des sollicitations relatives aux états-limites de service, sont inférieures aux contraintes limites indiquées ci-dessus. S'il n'en était pas ainsi il serait nécessaire d'augmenter la section des armatures tendues.

Etat-limite de service vis-à-vis des déformations. Pour s'assurer que les déformations demeurent dans des limites admissibles on sera amené à calculer la valeur de la flèche maximale pour les ouvrages importants. Il est intéressant de connaître la déformation d'un élément d'une structure, afin de pouvoir s'assurer que cette déformation ne sera pas importante et n'entraînera pas de désordres dans les éléments supportés (par exemple les cloisons sur une poutre de plancher) ou pour pouvoir donner une contre-flèche à la construction.

Le calcul des déformations globales doit tenir compte des phases successives de la construction et des sollicitations exercées (on note que les déformations obtenues lors des phases successives de la construction ne sont pas automatiquement cumulables en raison de la fissuration de béton).

Ce calcul des déformations est pratiqué :

- pour limiter les déformations de l'ouvrage en service ;
- pour évaluer les contre-flèches à donner lors de la construction de l'ouvrage.

2.2. Actions caractéristiques. Combinaisons d'actions

2.2.1. Actions caractéristiques

On appelle actions, les forces et les couples de forces dues aux charges appliquées et aux déformations imposées à une construction. Les actions proviennent donc des charges permanentes, des charges d'exploitation, des charges climatiques et des déformations imposées à la construction (variations de température, retrait, tassement des appuis, etc.). Les valeurs de ces actions à introduire dans le calcul ont un caractère nominal et constituent une approximation des valeurs caractéristiques définies dans les directives réglementaires.

1) **Actions permanentes.** Ces actions, représentées par le symbole G , sont appliquées pratiquement avec la même intensité pendant toute la durée de vie de l'ouvrage ou encore elles sont très peu variables dans le temps. Elles comprennent notamment :

- le poids propre de la structure, calculé d'après les dimensions prévues aux dessins d'exécution ;
- le poids des superstructures (tels que les cloisons dans les bâtiments), des équipements fixes (tels que les machines dans les constructions industrielles) ;
- les efforts dus au sol ou aux liquides dont les niveaux varient peu ;
- les efforts dus aux déformations permanentes subies par la construction (retrait, tassements différentiels des appuis, etc.).

2) **Actions variables.** Représentées par le symbole Q_i , ces actions ont une intensité plus ou moins constante, mais avec une application de courte durée par rapport aux actions permanentes. Elles sont définies par les textes réglementaires et normatifs en vigueur. Les actions variables comprennent en particulier :

- les actions d'exploitation qui sont définies par les conditions propres d'utilisation de l'ouvrage ou par des normes et règlements (bâtiments à usage d'habitation ou usage de bureau, ponts, etc.) ou encore par les conditions d'exploitation (réservoirs, silos) ;

- les charges climatiques (vent et neige), ces charges sont fixées par les textes réglementaires en vigueur ;
- les charges appliquées pendant d'exécution de l'ouvrage et qui proviennent, en général, des équipements de chantier ;
- les actions dues à la température.

Les charges d'exploitation varient avec la destination du bâtiment. Par exemple on admet :

- pour un plancher de bâtiment d'habitation :
 - 1,5 kN/m^2 - pour des locaux ;
 - 2,5 kN/m^2 - pour des escaliers ;
 - 3,5 kN/m^2 - pour des balcons ;
- pour un plancher de bureaux :
 - 2,0 kN/m^2 - pour des locaux privés ;
 - 2,5 kN/m^2 - pour des locaux publics ;
 - 4,0 kN/m^2 - pour des escaliers ;
 - 5,0 kN/m^2 - pour des archives ;
- pour un plancher de magasin 4,0 à 5,0 kN/m^2 ;
- pour un plancher de salle de réunions 5,0 kN/m^2 .

3) **Actions accidentelles.** Ces actions, représentées par le symbole F_A , sont celles provenant de phénomène se produisant rarement et avec faible durée d'application. A titre d'exemple, on peut citer les chocs des bateaux sur des appuis implantés dans le cours d'une voie navigable, les chocs de véhicules routiers sur une pile d'un pont, les séismes. Les actions accidentelles ne sont à considérer que pour les états-limites ultimes. Les valeurs à prendre en compte pour les actions accidentelles sont fixées par les textes réglementaires, tels que les règles parasismiques ou à défaut par le Cahier des Charges.

2.2.2. Combinaisons d'actions

Ici on précise les combinaisons d'actions à considérer dans les cas courants pour la vérification des états-limites ultimes de résistance et des états-limites de service. Il est rappelé que toutes les combinaisons mentionnées ne sont pas à considérer simultanément. Seules sont à étudier celles qui apparaissent comme les plus agressives.

Pour déterminer les sollicitations (moment de flexion, effort normal, effort tranchant, etc.) auxquelles une construction est soumise dans le cas le plus général, on utilise les combinaisons d'actions définies ci après, avec les notations suivantes :

G_{max} : ensemble des actions permanentes dont l'effet est défavorable à la justification d'un élément donné ;

G_{min} : ensemble des actions permanentes dont l'effet est favorable ;

Q_1 : une action variable, dite de base ;

$Q_i (i > 1)$: les autres actions variables dites d'accompagnement.

Dans une combinaison donnée, G_{max} et G_{min} désignent des actions d'origine et de nature différente, ce qui exclut la possibilité de partager une même action permanente entre ces deux parties. Par exemple, dans l'étude d'un mur de soutènement, le poids du remblai lorsqu'il intervient d'une manière favorable sera introduit sous la forme G_{min} , tandis que la poussée des terres qui intervient d'une manière défavorable sera introduite sous la forme de G_{max} .

Les combinaisons d'action à envisager sont différentes pour les états-limites ultimes et les états-limites de service.

Combinaisons des sollicitations de calcul vis-à-vis des états-limites ultimes de résistance et de stabilité de forme. On distingue les combinaisons *fondamentales* (lors de situations durables ou transitoires), qui font intervenir seulement les actions permanentes et variables, et les combinaisons *accidentelles* qui prennent en compte les actions accidentelles.

1) *Les combinaisons fondamentales* sont représentées symboliquement comme suites :

$$1,35 G_{max} + G_{min} + \gamma_{Q1} Q_1 + \sum 1,3 \psi_{oi} Q_i \quad (2.1)$$

Dans cette expression :

G_{max} représente l'ensemble des actions permanentes allant dans le même sens que l'action variable de base Q_1 , et G_{min} ensemble des actions permanentes allant en sens inverse;

$\gamma_{Q1} = 1,5$ dans le cas général ;

$\gamma_{Q1} = 1,35$ pour la température, les bâtiments agricoles à faible densité d'occupation humaine, les charges routières (étroitement bornées ou de caractère particulier) ;

ψ_{oi} est le coefficient de pondération des valeurs des actions

d'accompagnement ($\psi_o = 0,77$ pour le vent, $\psi_o = 0,60$ pour la variation uniforme de la température).

2) *Les combinaisons accidentelles*, si elles ne sont pas définies par des textes spécifiques, sont représentées symboliquement par :

$$G_{max} + G_{min} + F_A + \psi_{11} Q_1 + \Sigma \psi_{2i} Q_i, \quad (2.2)$$

où F_A est la valeur nominale de l'action accidentelle;

$\psi_{11} Q_1$, la valeur fréquente d'une action variable;

$\psi_{2i} Q_i$, la valeur quasi permanente d'une action variable.

Le coefficient $\psi_1 = 0,2$ pour le vent et $\psi_1 = 0,5$ pour la variation de la température ; le coefficient $\psi_2 = 0$ pour le vent et pour la variation de la température.

Combinaisons des sollicitations de calcul vis-à-vis des états-limites de service. Ces combinaisons sont représentées symboliquement par:

$$G_{max} + G_{min} + Q_1 + \Sigma \psi_{oi} Q_i. \quad (2.3)$$

Dans le cas des bâtiments les relations données ci-dessus (formules 2.1, 2.2, 2.3) peuvent être simplifiées. On désigne par :

G : charges permanentes ;

Q_B : charges d'exploitation des bâtiments ;

$W, (S_n)$: action du vent, (action de la neige) ;

T : variations uniformes de la température.

Pour le cas le plus général, quand les éléments des bâtiments susceptibles d'être soumis aux actions des charges permanentes, des charges d'exploitation et du vent, les combinaisons à considérer sont données par le tableau 2.2.

Pour des éléments de planchers susceptibles d'être soumis aux actions des charges permanentes, des charges d'exploitations et du vent les combinaisons sont données par le tableau 2.4.

On note que la valeur nominale du vent en règle générale est prise égale à 1,2 fois la "charge normale" (la valeur de la "charge nominale" est donnée par les Normes) pour les justifications vis-à-vis des états-limites ultimes de résistance (donc les valeurs W dans le tableau

2.2), et à 1,0 fois cette "charge normale" vis-à-vis des états-limites de service (donc les valeurs W dans le tableau 2.3).

Tableau 2.2
Combinaisons d'action pour la vérification des E.L.U. de résistance

Actions permanentes	Actions variables		
	de base	d'accompagnement	d'accompagnement
$1,35 G_{max} + G_{min}$	$\gamma_{Q1} Q_1$	$1,3 \psi_{02} Q_2^*$	$1,3 \psi_{03} Q_3^{**}$
$1,35 G + G$	$1,5 Q_B$	0 ou W ou S_n ou $W + S_n$	0 ou $0,8 T$
	$1,5 W$	0 ou $1,3 \psi_0 Q_B$ ou S_n ou $1,3 \psi_0 Q_B + S_n$	0 ou $0,8 T$
	$1,5 S_n$	0 ou $1,3 \psi_0 Q_B$ ou S_n ou $1,3 \psi_0 Q_B + S_n$	0 ou $0,8 T$

* Le coefficient ψ_0 dans tous les cas courants est pris égal à 0,77

(ainsi $1,33 \times 0,77 = 1,0$), et égal à 1,0 dans certains cas spécifiques ;

** Les effets de la température ne sont généralement pas pris en compte, s'ils doivent intervenir en tant qu'action de base, ils sont introduits avec le coefficient 1,35.

Tableau 2.3
Combinaisons d'actions pour la vérification des états-limites de service

Actions permanentes	Actions variables	
	de base	d'accompagnement
$G_{max} + G_{min}$	Q_1^*	$\psi_{02} Q_2^{**}$
G	Q_B	0 ou $0,77 W$ ou $0,77 S_n$
	W	0 ou $\psi_0 Q_B$
	S_n	0 ou $\psi_0 Q_B$

* Lorsqu'il y a lieu d'introduire la température en tant qu'action de base, elle intervient avec sa valeur nominale.

** Le coefficient ψ_0 est pris égal à 0,77 (donc $1,33 \times 0,77 = 1,0$), dans tous

les cas courants et égal à 1,0 dans certains cas spécifique.

Tableau 2.4

Combinaisons	Travées chargées	Travées déchargées
(1)	$1,35 G + 1,5 Q_B$	$1,35 G$
(2)	$G + 1,5 Q_B$	G
(3)	$1,35 G + 1,5 Q_B + W$	$1,35 G + W$
(4)	$G + 1,5 Q_B + W$	$G + W$
(5)	$1,35 G + 1,5 W + 1,3 \psi_o Q_B$	$1,35 G + 1,5 W$
(6)	$G + 1,5 W + 1,3 \psi_o Q_B$	$G + 1,5 W$

$1,3 \psi_o = 1,0$ pour les constructions courantes, à l'exclusion des salles de spectacle ;

$1,3 \psi_o = 1,3$ pour les salles de spectacles, les bâtiments de stockage et, éventuellement, certaines constructions industrielles.

Si le plancher est susceptible d'être soumise à l'action de la neige, les combinaisons à envisager sont celles définies pour le vent en remplaçant W par S_n .

Suivant les valeurs respectives de Q_B et W et leurs signes, certaines combinaisons ne sont pas à retenir, (1) et (2) sont incluses dans (3) et (4) avec $W = 0$, (3) et (4), dans le cas des travées déchargées, sont incluses dans (5) et (6).

Dans les différentes travées d'un portique soumis à l'action des charges d'exploitation et du vent, les charges d'exploitation peuvent ou non être appliquées par travées entières dans les conditions les plus défavorables, mais le vent est à prendre en compte (dans un sens ou dans l'autre) sur l'ensemble des travées.

Dans la grande majorité des cas, on aura normalement à retenir, pour la vérification des moments sur appuis et en travée, la plus défavorable des deux combinaisons:

$$1,35 G + 1,5 Q_B + W;$$

$$1,35 G + 1,5 W + 1,3 \psi_o Q_B.$$

La combinaison $G + 1,5 W$ étant éventuellement à prendre en considération dans la vérification aux moments positifs sur appuis.

Pour les éléments de plancher soumis uniquement aux actions des charges permanentes et des charges d'exploitation, à l'exclusion des

charges climatiques, on prend en considération dans le cas des états-limites ultimes les combinaisons suivantes :

Combinaisons	Travées chargées	Travées déchargées
(1)	$1,35 G + 1,5 Q_B$	$1,35 G ;$
(2)	$G + 1,5 Q_B$	$G.$

La combinaison (2) n'est pas en général déterminante si on tient compte de l'adaptation qui permet un décalage de la courbe enveloppe des moments, sous réserve qu'une partie de la section des aciers inférieurs soit prolongée jusqu'aux appuis. En revanche, dans le cas d'une travée prolongée par un porte-à-faux, la combinaison (2) doit être prise en considération.

Chaque plancher d'un immeuble est calculé pour la charge d'exploitation maximale qu'il est appelé à supporter. Toutefois, comme il est peu probable que tous les planchers d'une même construction sont soumis, en même temps, à leur charge d'exploitation maximale, on réduit les charges transmises aux piliers et aux fondations (charges obtenues à partir des charges d'exploitation maximales). Dans le cas courant où la surcharge est la même pour tous les étages, cette loi de dégression conduit aux valeurs données par le tableau 2.5 (avec S_o la charge d'exploitation sur le toit ou la terrasse et S la valeur commune de la charge d'exploitation pour chaque étage).

Tableau 2.5

	Valeur des charges d'exploitation à prendre en compte pour les piliers et les fondations (surcharges sont identiques)
Pour le toit et la terrasse	$\Sigma_o = S_o$
Pour le premier étage à partir du toit	$\Sigma_1 = S_o + S$
Pour le deuxième étage à partir du toit	$\Sigma_2 = S_o + 1,9 S$
Pour le troisième étage à partir du toit	$\Sigma_3 = S_o + 2,7 S$
Pour le quatrième étage à partir du toit	$\Sigma_4 = S_o + 3,4 S$
Pour le cinquième étage à partir du toit et pour des étages suivants on prend ("n" étant le numéro de l'étage considéré)	$\Sigma_n = S_o + (3 + n) S / 2$ avec $n > 5$

2. 3. Hypothèses de calcul, diagramme des déformations pour l'état-limite ultime de résistance

2.3.1. Hypothèses de calcul

Dans les calculs relatifs à l'état-limite ultime de résistance, on admet les hypothèses suivantes:

1) Les sections droites, planes avant déformations, restent planes après déformations. C'est l'hypothèse de Navier-Bernouilli, de laquelle il résulte, que le diagramme des déformations est représenté par une droite et que la déformation d'une fibre est proportionnelle à sa distance à l'axe neutre.

2) Il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures et le béton, c'est-à-dire qu'une armature subit la même déformation que la gaine de béton qui l'entoure.

3) Le béton tendu est négligé dans les calculs. Il résulte de cette hypothèse que les contraintes normales de traction doivent être équilibrées uniquement par les efforts existant dans les armatures longitudinales.

4) Pour déterminer les positions extrêmes de la droite représentant le diagramme des déformations dans la section on admet que:

- l'allongement unitaire de l'acier est limité à 10 ‰ dans tous les cas;

- le raccourcissement unitaire du béton est limité à 3,5 ‰ dans les cas de flexion simple ou composée et à 2 ‰ dans le cas de compression simple.

5) Comme le diagramme déformations-contraintes de calcul du béton on utilise généralement le diagramme rectangulaire lorsque la section n'est pas entièrement comprimée et le diagramme parabole-rectangle lorsque la section est entièrement comprimée.

6) Le diagramme déformations-contraintes de calcul des aciers est, suivant le type d'acier utilisé, l'un de ceux définis sur la figure 1.7.

7) On suppose concentrée en son centre de gravité la section d'un groupe de plusieurs barres, tendues ou comprimées, pourvu que l'erreur ainsi commise sur la déformation unitaire ne dépasse pas 15 %. On pourra toujours vérifier sur le diagramme des déformations que cette condition est bien remplie mais dans les cas usuels de la pratique, il en est bien ainsi et il n'est pas nécessaire, en général, de procéder à une vérification.

2.3.2. Diagramme des déformations de la section pour l'état-limite ultime de résistance

Le problème consiste à trouver les positions limites du diagramme des déformations d'une section, de sorte qu'aucune des déformations limites fixées précédemment ne soit dépassée à l'état-limite ultime. Le diagramme des déformations de la section représenté par une droite, est supposé passer par l'un des trois points *A*, *B* ou *C* (fig. 2.1). Ces points, appelés pivots (d'où le nom "Règle des trois pivots") sont définis de la manière suivante.

Le point A correspond à un allongement de 10 ‰ de l'armature la plus tendue, supposée concentrée au centre de gravité de l'ensemble des armatures tendues;

Le point B correspond à un raccourcissement de 3,5 ‰ du béton de la fibre la plus comprimée;

Le point C correspond à un raccourcissement de 2 ‰ de la fibre de béton située à une distance égale à $(3/7)h$ (h étant la hauteur totale de la section) de la fibre la plus comprimée.

Sur le diagramme (fig. 2.1) on peut distinguer *trois domaines*.

Domaine 1. Le diagramme des déformations passe par le point *A*. Il peut alors occuper l'une des positions représentées sur les figures 2.2 a, b, c et d.

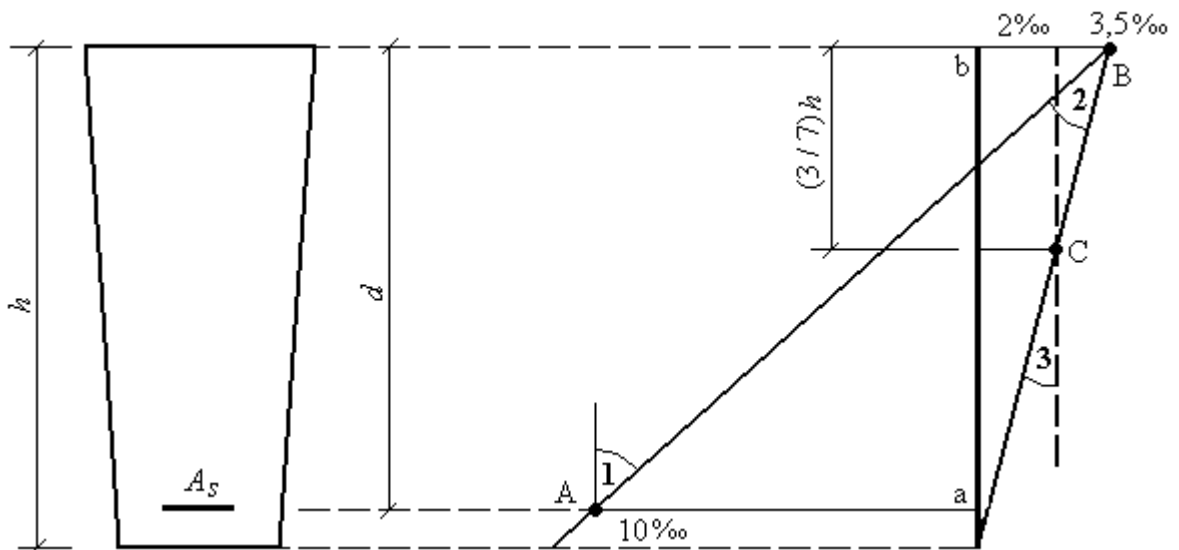


Fig. 2.1. Diagramme des déformations de la section

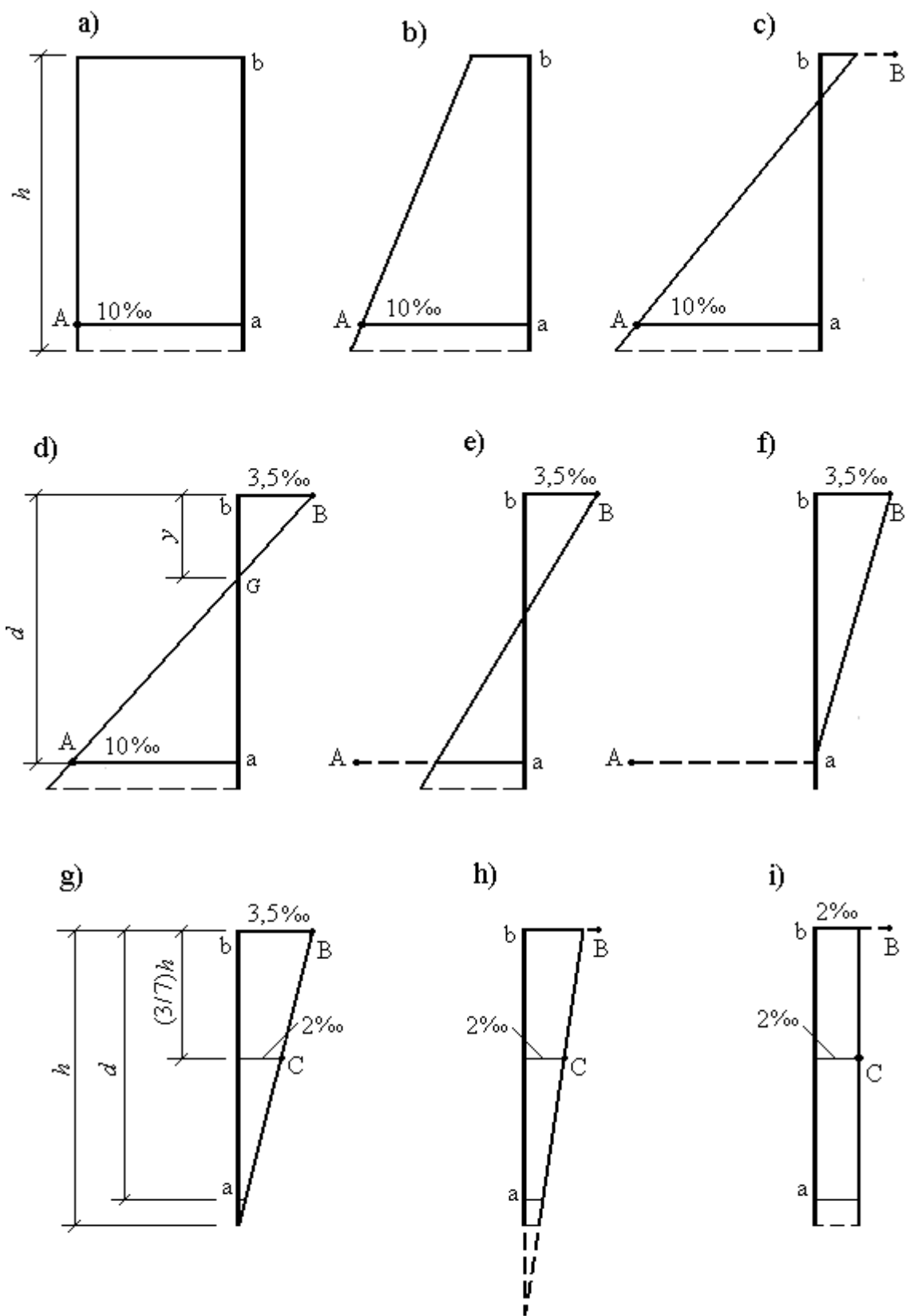


Fig. 2.2

La figure 2.2,a correspond au cas de la traction simple. Toutes les fibres s'allongent de la même quantité. Le béton se fissure et ne participe donc pas à l'équilibre des sollicitations. La pièce sera hors service lorsque la déformation de l'acier vaudra 10 ‰. La limite correspond sur le diagramme à la verticale passant par le point A.

La figure 2.2,b correspond au cas où la section serait entièrement tendue. Ceci se présente lorsque l'effort normal est un effort de traction et que son excentricité est faible. A l'état-limite, la fibre la plus tendue aura un allongement de 10 ‰, et la moins tendue $\varepsilon_s < 10 \text{ ‰}$. Plus l'excentricité augmente, plus la tension minimale tend vers 0, les droites de déformation pivotent donc autour de point A.

La figure 2.2,c correspond au cas de la flexion simple ou de la flexion composée (flexion-traction, flexion-compression). Dans ce cas la section est partiellement tendue et partiellement comprimée, mais le béton comprimé n'atteint pas son raccourcissement ultime. La section comporte alors une zone comprimée et une zone tendue.

La figure 2.2,d correspond aux mêmes cas que ceux de la figure 2.2,c, lorsque le béton atteint son raccourcissement ultime. C'est un cas limite pour le *domaine 1*, puisque après le diagramme des déformations va pivoter autour du point B. On ne peut dépasser la position AB qui correspond à un raccourcissement $\varepsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$ de la fibre de béton la plus comprimée et à un allongement de 10 ‰ de la fibre la plus tendue. La position limite AB correspond à un axe neutre situé à la distance y de la fibre la plus comprimée. La position de l'axe neutre correspondant à ce cas limite peut être déterminée en considérant les triangles semblables GbB et GaA (avec d étant la hauteur utile de la section) :

$$\frac{Bb}{Aa} = \frac{y}{d-y} \quad \text{ou encore :} \quad \frac{3,5}{10} = \frac{y}{d-y}$$

d'où on trouve : $y = 0,259 d$.

Le cas particulier où $\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_{bc} = 2 \text{ ‰}$ correspond à :

$$y = 0,167 d.$$

Donc si :

$y \leq 0,259 d$ le diagramme des déformations passe par le point A ;

$y > 0,259 d$ le diagramme des déformations passe par le point B.

Pour augmenter la zone comprimée, on ne peut plus augmenter ε_{bc} au-delà de 3,5 ‰, il faut donc diminuer la contrainte σ_s . La droite des déformations pivote autour du point B, alors on se trouve dans le *domaine 2*.

Domaine 2. Le diagramme des déformations passe par le point "B". Il peut alors occuper l'une des positions représentées sur les figures 2.2 d, e, f et g.

La figure 2.2,d correspond au cas limite examiné ci-dessus.

La figure 2.2,e correspond au cas de la flexion simple ou de la flexion composée (flexion-traction, flexion-compression, cas des grandes excentricités), lorsque le béton a atteint son raccourcissement ultime 3,5 ‰, l'allongement des aciers est alors inférieur à 10 ‰.

La figure 2.2,f correspond au cas de la flexion composée avec effort normal de compression lorsque le béton de la zone la plus comprimée à un raccourcissement ultime 3,5 ‰, mais l'allongement des aciers est devenu nul (la contrainte dans les armatures sera donc également nulle). Dans ce cas limite on a : $y = d$.

La figure 2.2,g correspond au même cas que ce de la figure 2.2,f (flexion-compression, cas des faibles excentricités), lorsque le béton de la fibre la plus comprimée à atteint son raccourcissement ultime et lorsque le béton de la fibre moins comprimée a un raccourcissement nul. C'est un cas limite pour le *domaine 2*, puisque après le diagramme des déformations va pivoter autour du point "C". Dans ce cas limite on a : $y = h$.

Il résulte de ce qui précède que le diagramme des déformations passera par le point B quand:

$$0,259 d \leq y \leq h.$$

Domaine 3. Toute la section est comprimée et la droite des déformations tourne autour du point C. Ce diagramme des déformations peut alors occuper l'une des positions (figure 2.2, g, h et i).

La figure 2.2,g correspond au cas limite examiné ci-dessus.

La figure 2.2,h correspond au cas de la flexion composée avec effort normal de compression lorsque la section est entièrement comprimée. Dans ce cas l'axe neutre se trouve en dehors de la section et le raccourcissement du béton est, dans toute la section, inférieur à son raccourcissement ultime.

La figure 2.2,i correspond au cas de la compression simple. Le raccourcissement du béton est égal à 2 ‰ sur toute la hauteur de la section. Donc, dans le cas de la compression simple ou composée on a :

$$\begin{aligned} 2 \text{ ‰} \leq \varepsilon_{bc} \leq 3,5 \text{ ‰} & \text{ sur la fibre la plus comprimée ;} \\ \varepsilon_{bc} \leq 2 \text{ ‰} & \text{ sur la fibre la moins comprimée.} \end{aligned}$$

Le diagramme des déformations passera par le point C si l'on a :

$$y \geq h.$$

CHAPITRE 3. JUSTIFICATION DES SECTIONS SOUMISES A LA FLEXION SIMPLE

3.1. Mode de calcul des sections rectangulaires

3.1.1. Etablissement des formules de calcul

La flexion simple se rencontre très souvent dans les ouvrages en béton armé : planchers, murs de soutènement, ponts, etc. Comme, en général, la section droite des éléments de ces ouvrages est une section rectangulaire ou une section en T , alors on examine successivement ces deux types de sections.

Une section droite d'une pièce (pièce possédant un plan de symétrie et chargée symétriquement par rapport à ce plan) est soumise à la flexion simple si les forces agissant à gauche de la section pouvaient être réduites, par rapport à un point quelconque de l'axe de symétrie de cette section, à un couple de moment de flexion M et un effort tranchant V . Etant donné qu'en flexion simple l'effort normal est égal à nul ($N = 0$), donc on n'a pas à se préoccuper de la stabilité de forme pour les pièces soumises à la sollicitation envisagée ; dans ces conditions on ne considérera que l'état-limite ultime de résistance. Ensuite il faudra vérifier que le dimensionnement ainsi obtenu satisfait aux conditions d'état-limite de service vis-à-vis de la durabilité et des déformations.

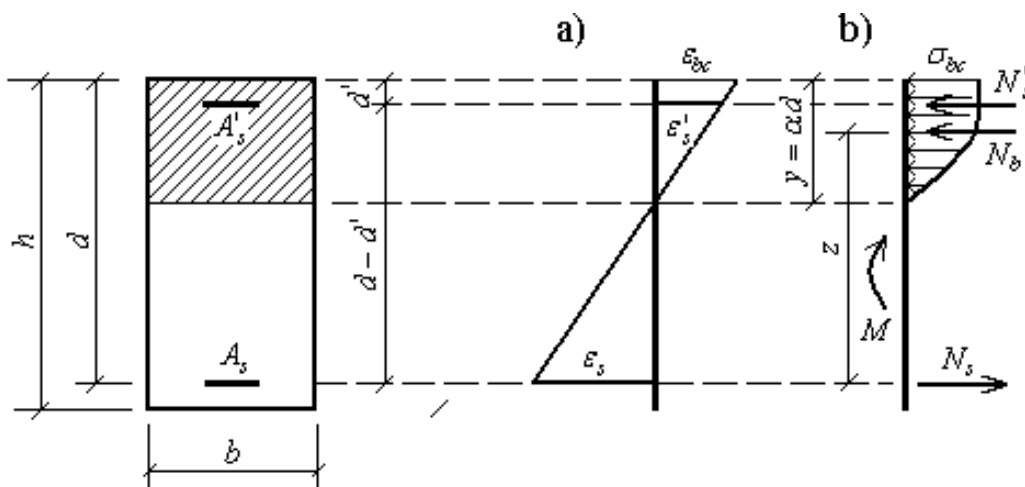


Fig. 3.1

Il faut noter qu'une section soumise à la flexion simple n'est jamais entièrement comprimée, donc il existe une zone tendue, où les efforts de traction sont repris par des armatures, et la zone comprimée, où les efforts de compression sont repris par le béton et par des armatures qui se trouvent dans cette zone.

La figure 3.1 représente pour une section rectangulaire le diagramme des déformations (a) et le diagramme des contraintes (b). Les notations utilisées sont les suivantes :

- b , largeur de la section ;
- h , hauteur totale de la section ;
- d , hauteur utile de la section (distance entre le centre de gravité des armatures tendues et la fibre la plus comprimée) ;
- y , distance de l'axe neutre à la fibre la plus comprimée ;
- A_s et A_s' est respectivement la section totale des armatures tendues et comprimées;
- ε_{bc} , raccourcissement unitaire du béton de la fibre la plus comprimée ;
- ε_s et ε_s' est respectivement la déformation unitaire des armatures tendues et comprimées;
- σ_{bc} , contrainte du béton dans la zone comprimée ;
- σ_s , contrainte de traction dans les armatures tendues ;
- N_b , résultante des efforts de compression dans le béton ;
- N_s , et N_s' est respectivement la résultante des efforts de traction dans les armatures tendues et comprimées;
- z , bras de levier (distance entre N_s et N_b).

Le diagramme réel des contraintes du béton comprimé qui peut être utilisé dans tous les cas où des éléments sont soumis à la flexion simple, est le diagramme dit "parabole-rectangle". Les équations d'équilibre pour le diagramme considéré s'obtiennent en écrivant que la somme des projections des résultantes des efforts longitudinaux sur l'axe de l'élément est nulle, et que la somme des moments de ces résultantes (exprimés par rapport à A_s) équilibre le moment extérieur M_u :

- somme des efforts : $N_b + N_s' - N_s = 0$;
- somme des moments : $M_u = N_b Z + A_s' \sigma_s' (d - d')$. (3.1)

Pour un élément sans armatures comprimées ($A'_s = 0$) on a :

$$N_b - N_s = 0 ; \quad M_u = N_b Z. \quad (3.2)$$

La contrainte dans le béton comprimé est constante sur la hauteur $y - y_1$ avec la valeur f_{bc} et elle varie paraboliquement entre l'axe neutre et y_1 (de f_{bc} à zéro). Dans ce cas la résultante de l'effort de compression N_b dans le béton comprimé est égale à :

$$N_b = \psi_1 y b f_{bc} ,$$

avec $\psi_1 = 0,81$, le coefficient de remplissage du diagramme parabole-rectangle (le calcul de la valeur ψ_1 voir le chapitre 5).

Cette résultante N_b passe par le centre de gravité du diagramme parabole-rectangle, le calcul de sa position donne :

$$z' = 0,416 y ; \quad z = d - 0,416 y.$$

Alors, les équations d'équilibre (3.2) donne :

$$0,81 y b f_{bc} = A_s \sigma_s ;$$

$$M_u = 0,81 y b f_{bc} (d - 0,416 y).$$

En posant : $y = \alpha d$, on a :

$$0,81 \alpha d b f_{bc} = A_s \sigma_s ;$$

$$M_u = 0,81 \alpha b d^2 f_{bc} (1 - 0,416 \alpha) = \mu b d^2 f_{bc}. \quad (3.3)$$

Dans les équations 3.3 la valeur $\mu = 0,81 \alpha (1 - 0,416 \alpha)$,

$$\text{d'où } \alpha = 1,202 (1 - \sqrt{1 - 2,055 \mu}).$$

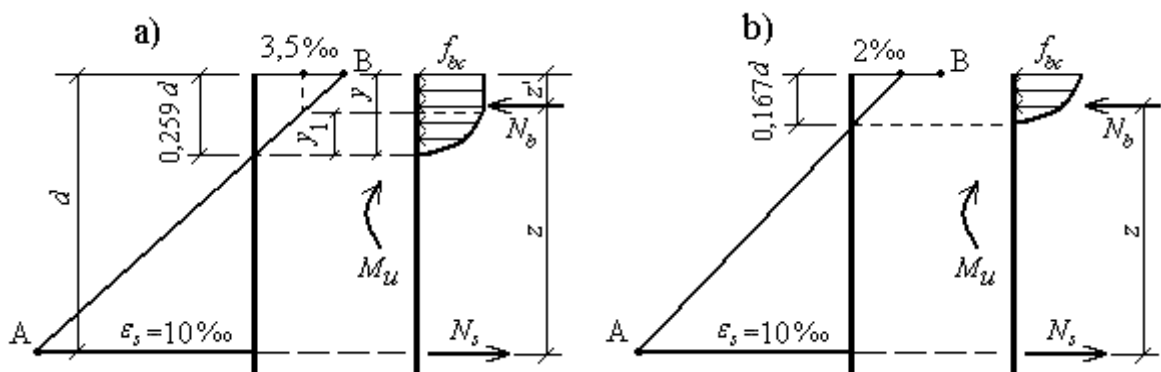


Fig. 3.2

a - déformation du béton comprimé est égale à 3,5 ‰;

b - déformation du béton comprimé est égale à 2 ‰

L'analyse de diagramme contraintes-déformations (chapitre 2) montre que lorsque les déformations du béton comprimé sont égales à $\varepsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$ et de l'armature tendue $\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$, les coefficients correspondants seront $\alpha = 0,259$ et $\mu = 0,186$. C'est le cas limite entre les domaines 1 et 2.

Donc pour $\alpha \leq 0,259$ ($\mu \leq 0,187$), le diagramme des déformations passe par le pivot A et $\varepsilon_{bc} \leq 3,5 \text{ ‰}$. D'après les Règles *B.A.E.L* la contrainte du béton comprimé atteinte sa résistance limite (f_{bc}) lorsque $\varepsilon_{bc} \geq 2 \text{ ‰}$. Pour ce cas limite où $\varepsilon_{bc} = 2 \text{ ‰}$ en considérant les triangles semblables (fig. 3.2,b), on trouve :

$$2 / 1.0 = y / (d - y), \quad \text{d'où } y = 0,167 d, \quad \text{donc } \alpha = 0,167.$$

L'effort de compression N_b et sa distance z' (pour le calcul on utilise les données de la figure 1.4,a) seront :

$$N_b = S b = (2 / 3) y f_{bc} b = 0,667 y f_{bc} b ;$$

$$z' = a_g = (3 / 8) y = 0,375 y, \quad z = d - 0,375 y.$$

Alors, la somme des moments (exprimés par rapport à A_s) est :

$$M_u = N_b (d - z') = 0,667 y f_{bc} b (d - 0,375 y) \quad \text{ou encore}$$

$$M_u = 0,667 \alpha d f_{bc} b d (1 - 0,375 \alpha) = \mu f_{bc} b d^2,$$

avec : $\mu = 0,667 \alpha (1 - 0,375 \alpha)$. Pour $\alpha = 0,167$ on trouve :

$$\mu = 0,667 \times 0,167 (1 - 0,375 \times 0,167) = 0,104.$$

Donc, si $0,104 \leq \mu \leq 0,187$ (c'est-à-dire $2 \text{ ‰} \leq \varepsilon_{bc} \leq 3,5 \text{ ‰}$), la contrainte du béton comprimé est égale à $\sigma_{bc} = f_{bc}$ et le béton est bien utilisé.

Si $\mu < 0,104$ (ce qui correspond à $\varepsilon_{bc} < 2 \text{ ‰}$), la contrainte du béton $\sigma_{bc} < f_{bc}$, et le béton est mal utilisé.

Dans tous les cas, les équations d'équilibre de la section sont :

$$\psi_1 \alpha b d f_{bc} - A_s \sigma_s ; \quad M_u = \psi_1 \alpha b d^2 f_{bc} (1 - \delta_1 \alpha),$$

où δ_1 est le coefficient de position du centre de gravité de l'épure du béton comprimé ($\delta_1 = z' / y$).

3.1.2. Sections rectangulaires sans armatures comprimées

Pour le calcul pratique, on remplace le diagramme parabole-rectangle par le diagramme rectangulaire simplifié ayant sensiblement le même coefficient de remplissage et la même position de centre de gravité : N_b diminue légèrement (0,8 au lieu de 0,81) mais le bras de levier z augmente légèrement (on prend $d - 0,4 y$ au lieu de $d - 0,416 y$).

On note que lorsque la valeur de $\mu \leq 0,187$ (donc $\varepsilon_{bc} \leq 3,5 \text{ ‰}$), et si on utilise le diagramme rectangulaire simplifié, on fait un certain nombre d'erreurs, mais l'examen des résultats obtenus montre que ces erreurs restent toujours inférieures à 2 %. Tandis que les erreurs de lecture de graphe (pour le calcul avec le diagramme parabole-rectangle on utilise le plus souvent les graphiques) et les erreurs d'arrondi sont en général supérieures aux erreurs introduites par l'utilisation du diagramme rectangle simplifié. De plus, la section d'armatures tendues A_s est toujours quelque peu augmentée lorsqu'on choisit la section réelle composée d'un nombre entier de barres. En conclusion, *on peut toujours utiliser le diagramme rectangle simplifié.*

Avec ces remplacements les équations d'équilibre (formules 3.3) deviennent :

$$\begin{aligned} 0,8 \alpha b d f_{bc} - A_s \sigma_s &= 0 ; \\ M_u &= 0,8 b d^2 f_{bc} \alpha (1 - 0,4 \alpha) = \mu b d^2 f_{bc}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où : $\mu = 0,8 \alpha (1 - 0,4 \alpha)$; $\alpha = y/d = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu})$.

Dans ce cas, pour $\alpha = 0,259$, on trouve :

$$\mu = 0,8 \times 0,259 (1 - 0,4 \times 0,259) = 0,186.$$

La somme des moments de résultantes des efforts on peut également rapporter au point d'application de l'effort N_b (fig. 3.3) :

$$M_u = A_s \sigma_s (d - 0,4 y) = A_s \sigma_s d (1 - 0,4 \alpha) = A_s \sigma_s d \beta. \quad (3.5)$$

Avec : $\beta = 1 - 0,4 \alpha$.

Lorsque les dimensions de la section de béton sont connues, on peut calculer la valeur de μ d'après la formule 3.4 (cette valeur ne dépend que des données du problème : les dimensions b et h de la section de

béton, la sollicitation M_u supportée par la section et les caractéristiques des matériaux) :

$$\mu = \frac{M_u}{f_{bc} b d^2} \quad (3.6)$$

La valeur d'étant connue, on peut en déduire les valeurs de α et de β . En ce qui concerne la contrainte σ_s des armatures tendues, elle est déduite de la valeur des déformations ε_s .

Lorsque $\alpha \leq 0,259$ ($\mu \leq 0,186$) la droite des déformations pivote autour du point A , donc $\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$, et la contrainte $\sigma_s = f_e / \gamma_s$.

Lorsque $0,259 < \alpha \leq 1,0$ la droite des déformations pivote autour du point B . Pour $\alpha = 1,0$, $\mu = 0,480$. On aura alors pour le cas considéré $0,186 < \mu \leq 0,480$. Le raccourcissement du béton de la fibre la plus comprimée est égal à $3,5 \text{ ‰}$, c'est-à-dire la valeur connue. Alors on peut déterminer les déformations des armatures tendues en considérant les triangles semblables bGb' et aGa' (fig. 3.3) :

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{bc}} = \frac{Ga}{Gb}; \quad \frac{1000\varepsilon_s}{3,5} = \frac{d-y}{y} = \frac{d-\alpha d}{\alpha d} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

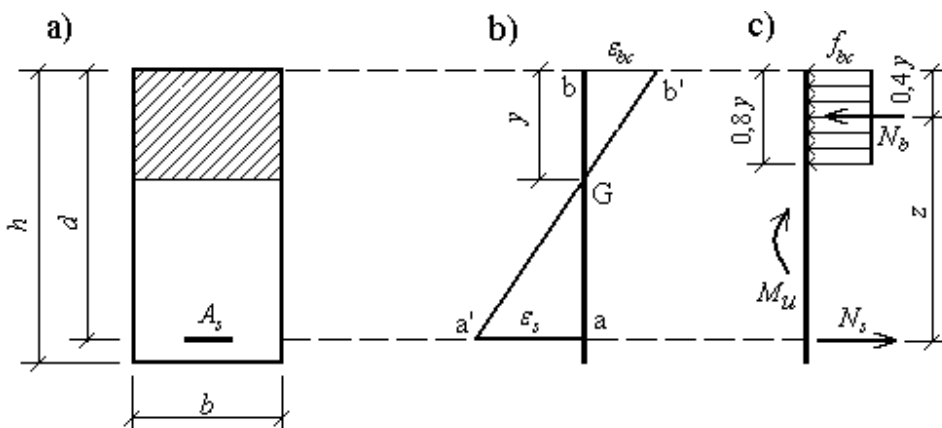


Fig. 3.3

Soit $1000 \varepsilon_s = 3,5 [(1 / \alpha) - 1]$.

ε_s étant connu, on peut déterminer la contrainte de l'acier d'après les diagrammes déformations-contraintes de calcul ou à l'aide des renseignements figurant dans les tableaux A.3 et A.4.

En résumé, les armatures tendues d'une section rectangulaire soumise à un moment M_u peuvent être déterminées par les formules suivantes :

$$\mu = \frac{M_u}{f_{bc} b d^2}, \quad \text{d'où } \alpha, \beta, 1000 \varepsilon_s \text{ et } \sigma_s, \quad A_s = \frac{M_u}{\beta d \sigma_s}.$$

Afin d'éviter d'avoir à faire à chaque fois les calculs intermédiaires, le tableau A.3 donne pour chaque valeur de μ des valeurs de α , de β et de $1000 \varepsilon_s$. En pratique il suffit donc, lorsque μ a été calculé, de lire sur ce tableau les valeurs de β et de $1000 \varepsilon_s$ et de déduire de cette dernière valeur celle de la contrainte σ_s .

Théoriquement, la méthode exposée ci-dessus reste valable jusqu'à ce que l'on ait : $y = d$, c'est-à-dire $\alpha = 1,0$ ou $\mu = 0,48$. Mais, pratiquement, il n'en est pas ainsi car, à partir d'une certaine valeur de ε_s , la contrainte σ_s diminue rapidement et on arrive alors à une section d'armature A_s qui n'est pas économique. Ainsi, pour $\alpha = 1,0$ on aurait :

$$\varepsilon_s = \frac{3,5}{1000} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) = 0, \quad \text{d'où : } \sigma_s = E_s \varepsilon_s = 0 \text{ et } A_s = \infty.$$

Dans ces conditions, on voit qu'il y a un intérêt, au point de vue économique, à ce que ε_s ne soit pas inférieur à une certaine limite qu'on désigne par ε_l , limite que l'on peut considérer comme égale à l'allongement correspondant à la contrainte $\sigma_s = f_e / \gamma_s$.

A cette valeur de ε_l correspond une valeur pour chacun des coefficients α , μ et β , ces valeurs limites seront désignée par α_l , μ_l et β_l . On a, d'après les relations établies ci-dessus :

$$\alpha_l = 3,5 / (3,5 + 1000 \varepsilon_l); \quad \mu_l = 0,8 \alpha_l (1 - 0,4 \alpha_l); \quad \beta_l = 1 - 0,4 \alpha_l.$$

Les valeurs de $1000 \varepsilon_l$, α_l , μ_l , β_l sont données par les tableaux A.1 et A.2 (ou pour les aciers couramment utilisés, on peut prendre les valeurs limites $\mu_l = 0,400$, $\alpha_l = 0,69$, soit $0,8 \alpha_l = 0,552$).

Ayant constaté que la condition $\varepsilon_s > \varepsilon_l$ entraîne $\mu < \mu_l$, on peut dire que lorsque:

- $\mu \leq \mu_l$ - la section est armée uniquement par des armatures tendues déterminées comme indiqué ci-dessus;
- $\mu > \mu_l$ - la section est armée par des armatures tendues et des armatures comprimées, déterminées comme indiqué ci-après.

Exemple 3.1. Déterminer les armatures de la section rectangulaire représentée sur la figure 3.4, qui est soumise à un moment de flexion $M_u = 170 \text{ kNm}$. Les armatures sont en acier $Fe E 400$ type 1, $\gamma_s = 1,15$, et le béton a pour résistance caractéristique $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$.

Solution. Pour commencer le calcul on suppose en première approximation que les déformations du béton comprimé sont suffisantes pour que la contrainte du béton soit égale à sa valeur de calcul :

$$f_{bc} = 0,85 (f_{c28} / \theta \gamma_b) = 0,85 (20 / 1 \times 1,5) = 11,3 \text{ MPa}.$$

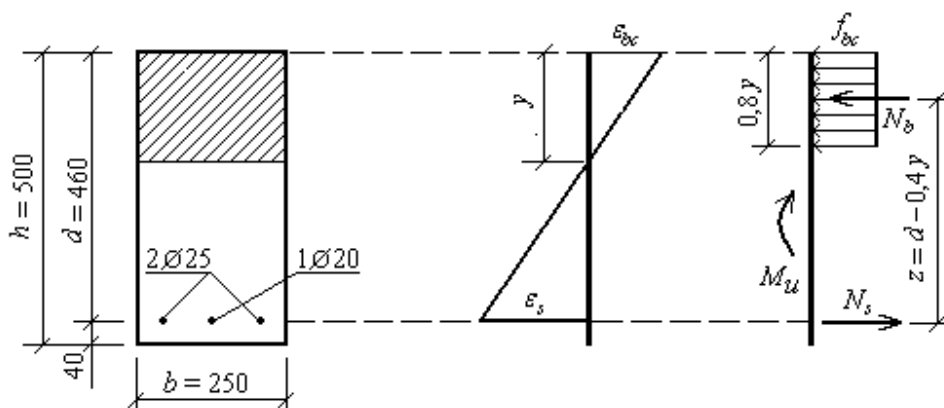


Fig. 3.4

Alors on peut calculer le coefficient du tableau μ :

$$\mu = \frac{M_u}{f_{bc} b d^2} = \frac{170 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 250 \cdot 460^2} = 0,284.$$

On a que $\mu = 0,284 < \mu_l = 0,392$, donc la section ne comportera que des armatures tendues, et les contraintes des armatures tendues sont égales à sa valeur limite $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa}$. D'autre côté le diagramme des déformations pivote autour de point B , c'est-à-dire que les déformations du béton sont de 3,5 ‰ (alors la contrainte $\sigma_{bc} = f_{bc}$). Sur le tableau A.3 on trouve $\beta = 0,829$. Alors, la section des armatures tendues sera égale à :

$$A_s = \frac{M_u}{\beta \sigma_s d} = \frac{170 \cdot 10^6}{0,829 \cdot 348 \cdot 460} = 1281 \text{ mm}^2.$$

On prend 2 $\varnothing 25 \text{ mm}$ et 1 $\varnothing 20 \text{ mm}$ avec $A_s = 1296 \text{ mm}^2$.
(Pour faire la comparaison, voir l'exemple 3.1 [6]).

Exemple 3.2. Déterminer les armatures de la section rectangulaire représentée sur la figure 3.4 qui est soumise à un moment de flexion $M_u = 200 \text{ kNm}$. Les armatures sont en acier $Fe E 500$, type 2 et on a pour le béton $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$,
 $f_{bc} = 0,85 (f_{c28} / \theta \gamma_b) = 0,85 (25 / 1,5) = 14,2 \text{ MPa}$.

Solution. Le coefficient de tableau μ est calculé d'après la formule :

$$\mu = \frac{M_u}{f_{bc} b d^2} = \frac{200 \cdot 10^6}{14,2 \cdot 250 \cdot 460^2} = 0,266.$$

Vu que $\mu = 0,266 < \mu_l = 0,298$, donc la section ne comporte que des armatures tendues. Pour $\mu = 0,266$ on trouve sur le tableau A.3 : $\beta = 0,842$; $1000 \varepsilon_s = 5,36$ et sur le tableau A.5 (pour $\gamma_s = 1,15$ et $1000 \varepsilon_s = 5,36$) on obtient $\sigma_s = 447 \text{ MPa}$.

Alors, la section exigée des armatures tendues est :

$$A_s = \frac{M_u}{\beta \sigma_s d} = \frac{200 \cdot 10^6}{0,842 \cdot 447 \cdot 460} = 1155 \text{ mm}^2.$$

On prend 3 $\varnothing 22 \text{ mm}$ avec $A_s = 1140 \text{ mm}^2$.

Exemple 3.3. Une poutre de section rectangulaire soumise à un moment fléchissant M_u . La poutre a les dimensions de la section transversale $h \times b = 400 \times 200 \text{ mm}$. Les armatures principales sont composées de 2 barres de 20 mm de diamètre ($A_{s1} = 628 \text{ mm}^2$) et de 2 barres de 16 mm de diamètre ($A_{s2} = 402 \text{ mm}^2$) en acier de nuance $Fe E 235$ (fig. 3.5). Le béton a la résistance caractéristique $f_{c28} = 16 \text{ MPa}$. On demande de vérifier la portance de la poutre.

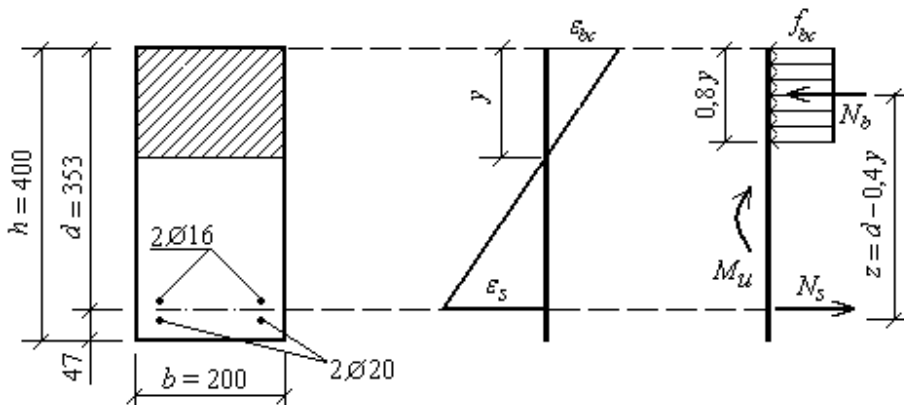


Fig. 3.5

Solution. En supposant que le diagramme des contraintes passe par le point B (domaine 2), on prend pour les résistances de calcul :

$$\sigma_s = f_e / \gamma_s = 235 / 1,15 = 204 \text{ MPa} ;$$

$$f_{bc} = 0,85 (f_{c28} / \theta \gamma_b) = 0,85 (16 / 1,5) = 9,1 \text{ MPa}.$$

La disposition des armatures dans la section transversale de la poutre est présentée par la figure 3.5. La distance $d = h - c = 400 - 47 = 353 \text{ mm}$.

La hauteur de la zone comprimée y est calculée d'après la condition :

$$0,8 f_{bc} b y = \sigma_s A_s ;$$

$$y = \frac{\sigma_s A_s}{0,8 f_{bc} b} = \frac{204(628 + 402)}{0,8 \cdot 9,1 \cdot 200} = 144 \text{ mm}.$$

Les coefficients de tableau A.3 correspondant à cette valeur y sont :

$$\alpha = y/d = 144 / 353 = 0,408 ;$$

$$\mu = 0,8 \alpha (1 - 0,4 \alpha) = 0,8 \times 0,408 (1 - 0,4 \times 0,408) = 0,273.$$

Vu que $\mu = 0,273 < \mu_l = 0,428$ (d'après le tableau A.1), le diagramme contraintes-déformations pivote alors autour du point B (domaine 2), ce qui correspond à un raccourcissement du béton de la zone comprimée égal à $\varepsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$ et à un allongement de l'acier tendue $1000 \varepsilon_s > 1000 \varepsilon_l$ (donc on peut prendre $f_{bc} = 0,85 f_{c28} / \gamma_b = 9,1 \text{ MPa}$, et $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 204 \text{ MPa}$).

Le moment fléchissant (rapporté aux armatures tendues) aura pour valeur

$$\begin{aligned} M &= 0,8 y f_{bc} b (d - 0,4 y) = 0,8 \times 144 \times 9,1 \times 200 (353 - 0,4 \times 144) = \\ &= 61,93 \times 10^6 \text{ N mm} = 61,93 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

(Pour faire la comparaison, voir l'exemple 3.3 [6]).

3.1.3. Sections rectangulaires comportant des armatures tendues et des armatures comprimées

La section rectangulaire, dont le béton de la zone comprimée n'est pas capable de reprendre seul tous les efforts de compression, doit être renforcée dans cette zone par des armatures. Le mode de ferrailage de la section (uniquement par des armatures tendues ou par des armatures tendues et comprimées), dépend du rapport entre μ et μ_l . Si $\mu \leq \mu_l$, la section peut être armée uniquement par des armatures tendues; si $\mu > \mu_l$, la section doit être armée par des armatures tendues et comprimées (le ferrailage d'une telle section sans armature comprimée n'est pas économiques).

Les règles *B.A.E.L* précisent que seules peuvent être prises en compte dans les calculs les armatures longitudinales de compression qui sont maintenues tous les 15 diamètres, au plus, par des armatures transversales. Par conséquent, s'il existe des armatures de compression en dehors des angles de la section, les armatures transversales ne pourront pas être constituées uniquement par un cadre, il sera nécessaire de prévoir des étriers ou des épingles, pour empêcher tout déplacement

et tout risque de flambage des armatures comprimées situées dans la partie centrale (fig. 3.6).

Si la condition précédente n'était pas remplie, les armatures comprimées seraient à considérer comme de simples barres de montage et ne pourraient intervenir dans les calculs. En outre, les règles *B.A.E.L* indiquent que la partie du moment de flexion équilibré par les armatures comprimées doit être inférieure à 40 % du moment total.

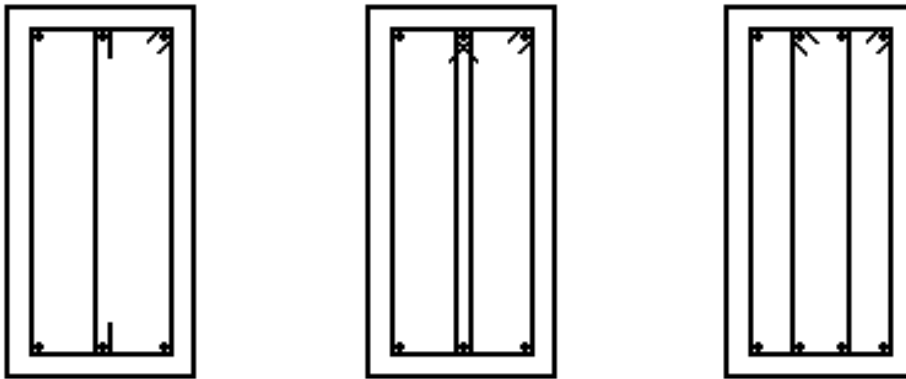


Fig. 3.6

La section doublement armée peut être considérée comme la somme des deux sections fictives représentées sur la figure 3.7.

La première (fig.3.7,*b*) est une section de mêmes dimensions que celle donnée mais ne comportant que des armatures tendues A_{s1} . La deuxième (fig.3.7,*c*) comprend des armatures tendues A_{s2} , telles que $A_s = A_{s1} + A_{s2}$, et des armatures A_s' égales à celles de la section donnée. Le diagramme des déformations de la section réelle est représenté sur la figure 3.7,*c*.

Etant donné que des armatures de compression sont supposées nécessaires, nous sommes dans le domaine 2 et le diagramme des déformations passe par le pivot B, le raccourcissement du béton sur la fibre la plus comprimée est donc égal à 3,5 ‰.

En ce qui concerne l'allongement ε_s de l'acier tendue on a vu que l'on n'a pas intérêt à descendre au-dessous de $\varepsilon_s = \varepsilon_l$, ainsi on prend $\varepsilon_s = \varepsilon_l$. Dans ces conditions la position de l'axe neutre est déterminée et la valeur limite de α_l est :

$$\alpha_l = \frac{3,5}{3,5 + 1000 \varepsilon_l} \quad (3.7)$$

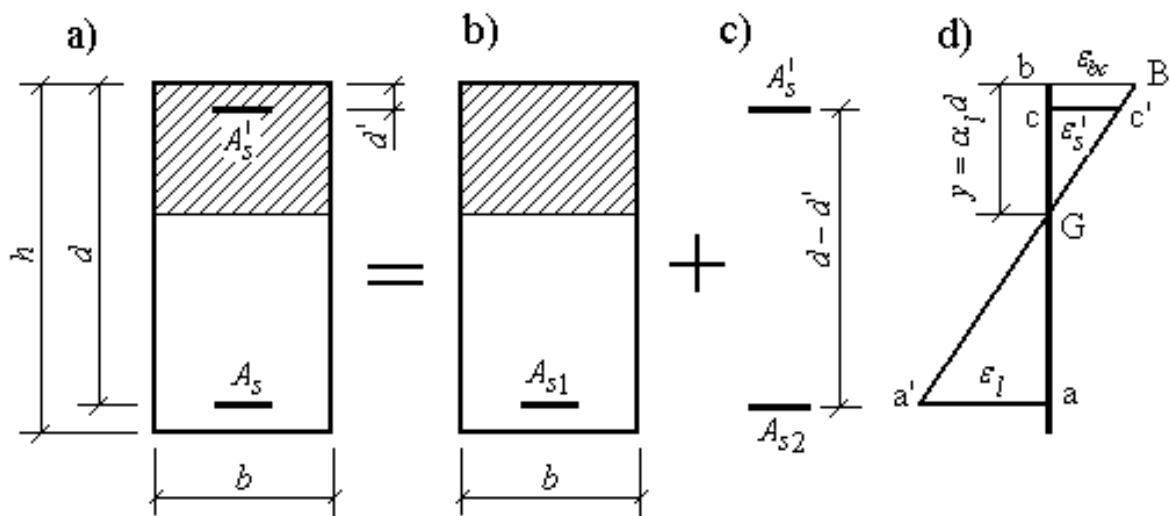


Fig.3.7

Le raccourcissement ε_s' des armatures comprimées peut être déterminé d'après les triangles semblables cGc' et aGa' :

$$\frac{\varepsilon_s'}{\varepsilon_l} = \frac{\alpha_l d - \delta' d}{d - \alpha_l d} = \frac{\alpha_l - \delta'}{1 - \alpha_l} = \frac{3,5(1 - \delta') - 1000 \varepsilon_l \delta'}{1000 \varepsilon_l},$$

d'où $1000 \varepsilon_s' = 3,5(1 - \delta') - 1000 \varepsilon_l \delta'$.

On peut trouver la condition pour que $\varepsilon_s' \geq \varepsilon_l$:

$$3,5(1 - \delta') - 1000 \varepsilon_l \delta' \geq 1000 \varepsilon_l, \text{ alors :}$$

$$\delta' \leq \frac{3,5 - 1000 \varepsilon_l}{3,5 + 1000 \varepsilon_l} \quad (3.8)$$

Si on prend en compte, dans l'inégalité précédente, des valeurs ε_l données dans les tableaux A.1 et A.2, on obtient pour δ' les limites supérieures indiquées dans le tableau 3.1 (ci après). Lorsque δ' est inférieur à ces valeurs, la condition $\varepsilon_s' > \varepsilon_l$ réalisera.

Tableau 3.1

Ronds lisses				Barres HA type 1			
Fe E 215		Fe E 235		Fe E 400		Fe E 500	
$\gamma_s = 1,15$ 0,58	$\gamma_s = 1$ 0,53	$\gamma_s = 1,15$ 0,55	$\gamma_s = 1$ 0,50	$\gamma_s = 1,15$ 0,33	$\gamma_s = 1$ 0,27	$\gamma_s = 1,15$ 0,23	$\gamma_s = 1$ 0,17

Fils HA type 3				Treillis soudés en fils lisses			
Fe TE 400		Fe TE 500		TLE 500		TLE 520	
$\gamma_s = 1,15$ 0,33	$\gamma_s = 1$ 0,27	$\gamma_s = 1,15$ 0,23	$\gamma_s = 1$ 0,17	$\gamma_s = 1,15$ 0,23	$\gamma_s = 1$ 0,17	$\gamma_s = 1,15$ 0,22	$\gamma_s = 1$ 0,15

Donc on peut constater que, pour les aciers considérés, les valeurs obtenues pour $\delta' = d'/d$ sont toujours supérieures à celles rencontrées en pratique. Par conséquent, pour ces aciers, la contrainte σ_s' sera toujours égale à f_e / γ_s . Ce n'est donc que pour les aciers de type 2 qu'il sera nécessaire de calculer ε_s' par l'expression :

$$1000 \varepsilon_s' = 3,5 (1 - \delta') - 1000 \varepsilon_l \delta'.$$

Les valeurs de σ_s' sont données par les tableaux A.4 et A.5.

Quant à la contrainte des armatures tendues, comme $\varepsilon_s = \varepsilon_l$, on aura:

- dans le cas des aciers autres que le type 2 : $\sigma_s = f_e / \gamma_s$;
- dans le cas des aciers de type 2, la valeur σ_s correspond à :

$$1000 \varepsilon_s = 1000 \varepsilon_l .$$

Pour un type d'armature donné, on peut donc lire sur les tableaux A.1 et A.2 les valeurs de μ_l et de β_l (ainsi que celle de $1000 \varepsilon_l$ pour les aciers type 2) et en déduire les valeurs de σ_s' et de σ_s .

Ces quantités étant connues, on écrira que la section fictive représentée sur la figure 3.7,b équilibre le moment fictif :

$$M_1^f = \mu_l f_{bc} b d^2 \quad (3.9)$$

lorsque ses armatures ont pour valeur :

$$A_{s1} = \frac{M_1^f}{\beta_l d \sigma_s} \quad (3.10)$$

La deuxième section fictive devra donc équilibrer le moment résiduel

$$M_2^f = M_u - M_1^f \quad (\text{avec } M_2^f \leq 0,40 M_u).$$

Ce moment M_2^f donnera une force de compression N_s' dans les armatures comprimées A_s' et une force de traction N_{s2} dans les armatures tendues A_{s2} . Comme le bras de levier a pour valeur $d - d'$ (ou encore $d - \delta'd$), on aura :

$$N_s' = N_{s2} = \frac{M_2^f}{d - d'}, \quad A_s' = \frac{N_s'}{\sigma_s'} = \frac{M_2^f}{(d - d') \sigma_s'}; \quad (3.11)$$

$$A_{s2} = A_s' \frac{\sigma_s'}{\sigma_s} = \frac{N_{s2}}{\sigma_s} = \frac{M_2^f}{(d - d') \sigma_s} \quad (3.12)$$

Les armatures de la section réelle seront donc A_s' dans la zone de compression et $A_s = A_{s1} + A_{s2}$ dans la zone de traction. On peut résumer la méthode de calcul décrit par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} M_1^f &= \mu_l f_{bc} b d^2; & M_2^f &= M_u - M_1^f; \\ A_s' &= \frac{M_2^f}{(d - d') \sigma_s'}; & A_s &= \frac{M_1^f}{\beta_l d \sigma_s} + A_s' \frac{\sigma_s'}{\sigma_s}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Exemple 3.4. On demande de déterminer les armatures de la section rectangulaire représentée sur la figure 3.8 et soumise à un moment de flexion $M_u = 320 \text{ kNm}$. Les armatures sont en acier *Fe E 400* type 1, $\gamma_s = 1,15$, et on a pour le béton $f_{bc} = 14,2 \text{ MPa}$.

Solution. En supposant que la section ne comporte que des armatures tendues ($A_s' = 0$), on détermine le coefficient de tableau μ :

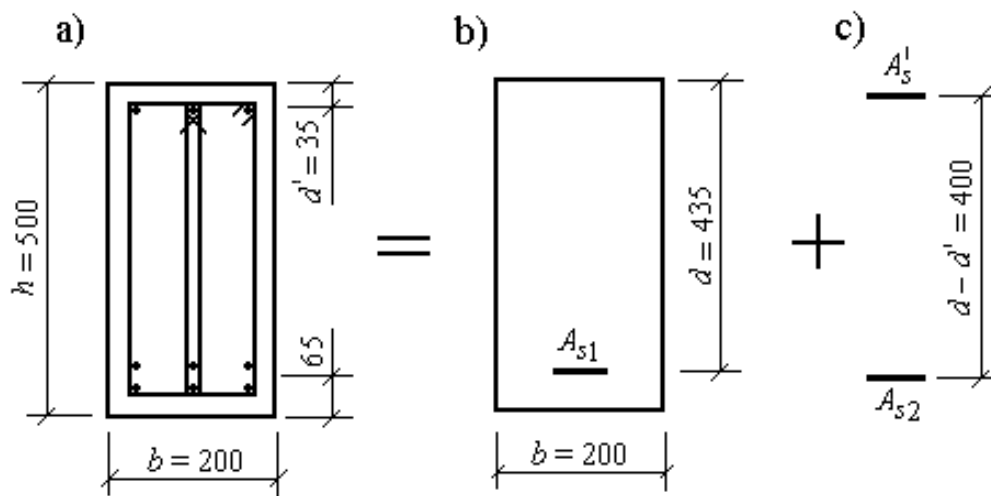


Fig. 3.8

$$\mu = \frac{M_u}{f_{bc} b d^2} = \frac{320 \cdot 10^6}{14,2 \cdot 200 \cdot 435^2} = 0,595.$$

On lit sur le tableau A.1 : $\mu_l = 0,392$. Alors $\mu = 0,595 > \mu_l = 0,392$, donc les armatures comprimées sont nécessaires.

D'après le tableau A.1 on prend : $\mu_l = 0,392$, $\beta_l = 0,733$, comme on utilise de l'acier *Fe E 400*, $\sigma_s' = \sigma_s = 348 \text{ MPa}$.

La section fictive représentée sur la figure 3.8,b équilibre le moment fictif:

$$M_1^f = \mu_l f_{bc} b d^2 = 0,392 \times 14,2 \times 200 \times 435^2 = 210,66 \times 10^6 \text{ Nmm}.$$

La section fictive représentée sur la figure 3.8,c devra donc équilibrer le moment résiduel :

$$M_2^f = M_u - M_1^f = 320 - 210,66 = 109,34 \text{ kNm}.$$

Ce moment ne dépasse pas la valeur : $0,4 M_u = 0,4 \times 320 = 128 \text{ kNm}$.

La section des armatures comprimées sera égale à :

$$A'_s = \frac{M_2^f}{(d - d') \sigma'_s} = \frac{109,34 \cdot 10^6}{(435 - 35) 348} = 785,5 \text{ mm}^2.$$

La section totale des armatures tendues :

$$A_s = \frac{M_1^f}{\beta_l d \sigma_s} + A'_s \frac{\sigma'_s}{\sigma_s} = \frac{210,66 \cdot 10^6}{0,733 \cdot 435 \cdot 348} + 785,5 \frac{348}{348} = 2684 \text{ mm}^2.$$

Pour le ferrailage on adopte :

- pour la zone comprimée 2 \emptyset 18 et 1 \emptyset 20 avec $A'_s = 823 \text{ mm}^2$;
- pour la zone tendue 4 \emptyset 25 et 2 \emptyset 22 avec $A_s = 2724 \text{ mm}^2$.

Pour calculer les armatures des sections doublement armées, on peut utiliser aussi la méthode exposée ci-dessous.

Soit, on considère une section rectangulaire doublement armée et soumise à un moment M . Les diagrammes des contraintes et des déformations dans le béton de cette section sont représentés sur la figure 3.9, qui indique également la position de la résultante des compressions N_b dans le béton, ainsi que celles des efforts N'_s dans les armatures comprimées et N_s dans les armatures tendues.

Les efforts repris par la section sont:

$$N_b = 0,8 f_{bc} b y ; \quad N'_s = A'_s \sigma'_s ; \quad N_s = A_s \sigma_s.$$

La somme des efforts sur l'axe longitudinal donne:

$$\Sigma N = 0 ; \quad A_s \sigma_s - A'_s \sigma'_s - 0,8 f_{bc} b y = 0,$$

ou encore $A_s \sigma_s - A'_s \sigma'_s - 0,8 f_{bc} b \alpha_l d = 0.$

La somme des moments par rapport au point de passage de N'_s :

$$\Sigma M = 0 ; \quad M_u - A_s \sigma_s (d - d') + 0,8 f_{bc} b y (0,4 y - d') = 0.$$

La somme des moments par rapport au point de passage de N_s

$$\Sigma M = 0 ; \quad M_u - A'_s \sigma'_s (d - d') - 0,8 f_{bc} b y (d - 0,4 y) = 0,$$

ou encore $M_u - A'_s \sigma'_s (d - d') - \mu_l f_{bc} b d^2 = 0.$

D'après ces équations on trouve:

$$A_s = \frac{M_u + 0,8 f_{bc} b y (0,4 y - d')}{(d - d') \sigma_s}, \quad \text{ou encore}$$

$$A_s = \frac{A'_s \sigma'_s + 0,8 f_{bc} b \alpha_l d}{\sigma_s}; \quad (3.14)$$

$$A'_s = \frac{M_u - \mu_l f_{bc} b d^2}{(d - d') \sigma'_s} = \frac{A_s \sigma_s - 0,8 f_{bc} b y}{\sigma'_s}. \quad (3.15)$$

En prenant : $\alpha = \alpha_l$, c'est-à-dire $y = \alpha_l d$, comme des valeurs connues, ainsi que des contraintes σ_s et σ'_s (voir la partie précédente), on calcule la section des armatures A_s et A'_s .

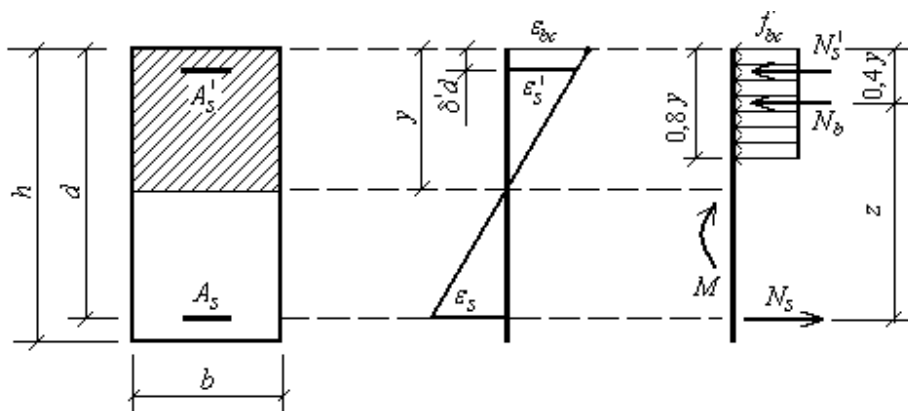


Fig. 3.9

Exemple 3.5. Déterminer les armatures de la section rectangulaire représentée sur la figure 3.8 et soumise à un moment $M_u = 320 \text{ kNm}$. Les armatures sont en acier $Fe E 400$, type 2, $\gamma_s = 1,15$, et on a pour le béton $f_{bc} = 14,2 \text{ MPa}$.

Solution. Pour l'acier $Fe E 400$, type 2, on lit sur le tableau A.1:

$$1000 \varepsilon_l = 3,739; \quad \alpha_l = 0,483; \quad \mu_l = 0,312.$$

En supposant que la section ne comporte que des armatures tendues, on détermine la valeur :

$$\mu = \frac{M_u}{f_{bc} b d^2} = \frac{320 \cdot 10^6}{14,2 \cdot 200 \cdot 435^2} = 0,595 > \mu_l = 0,312.$$

Donc des armatures comprimées sont nécessaires.

Pour continuer le calcul on détermine la hauteur de la zone comprimée y et les contraintes σ'_s et σ_s .

$$y = \alpha_l d = 0,483 \times 435 = 210 \text{ mm.}$$

Le raccourcissement des armatures comprimées est donné par :

$$1000 \varepsilon_s' = 3,5 (1 - \delta') - 1000 \varepsilon_l \delta'. \quad \text{Pour } \delta' = d'/d = 35 / 435 = 0,08,$$

$$\text{et pour } 1000 \varepsilon_s' = 3,5 (1 - 0,08) - 3,739 \times 0,08 = 2,92,$$

d'après le tableau A.4 on a : $\sigma_s' = 337 \text{ MPa}$.

Pour $1000 \varepsilon_s = 1000 \varepsilon_l = 3,739$ d'après le tableau A.4 on trouve :

$$\sigma_s = f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa.}$$

Alors, l'application des formules 3.14 et 3.15 nous donne :

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{M_u + 0,8 f_{bc} b y (0,4 y - d')}{(d - d') \sigma_s} = \\ &= \frac{320 \cdot 10^6 + 0,8 \cdot 14,2 \cdot 200 \cdot 210 (0,4 \cdot 210 - 35)}{(435 - 35) 348} = 2466,8 \text{ mm}^2, \end{aligned}$$

$$A_s' = \frac{A_s \sigma_s - 0,8 f_{bc} b y}{\sigma_s'} = \frac{2466,8 \cdot 348 - 0,8 \cdot 14,2 \cdot 200 \cdot 210}{337} = 1131,5 \text{ mm}^2$$

On adopte : dans la zone comprimée 3 \varnothing 22 mm avec $A_s' = 1140 \text{ mm}^2$;

dans la zone tendue 4 \varnothing 25 mm et 2 \varnothing 18 mm avec $A_s = 2473 \text{ mm}^2$.

3.1.4. Valeur minimale des armatures $A_s + A_s'$

Si les méthodes exposées au-dessus conduisent bien pour A_s et A_s' à des valeurs compatibles avec la sécurité de la pièce, il n'est pas évident, à priori, que l'on obtienne ainsi pour la somme $A_s + A_s'$ la valeur minimale, résultat qui est pourtant intéressant au point de vue économique.

Les formules 3.14 et 3.15 peuvent s'écrire, en posant : $y = \alpha d$ et en tenant compte de la valeur de A_s dans l'expression de A_s' :

$$A_s = \frac{M_u + 0,8 f_{bc} b d^2 (0,4\alpha - \delta') \alpha}{(d - \delta' d) \sigma_s} ; \quad (3.16)$$

$$A_s' = \frac{M_u - 0,8 f_{bc} b d^2 (1 - 0,4\alpha) \alpha}{(d - \delta' d) \sigma_s'}$$

En supposant qu'on utilise un acier dont le diagramme contraintes-déformations de calcul présente un palier et que (pour les armatures comprimées et pour celles tendues) les déformations ε_s et ε_s' soient telles que l'on se trouve sur la partie horizontale du diagramme, on a alors, pour cet acier :

$$\sigma_s = \sigma_s' = \sigma = \text{constante.}$$

Dans ces conditions on obtient :

$$\sigma (d - \delta' d) (A_s + A_s') = 2 M_u + 0,8 f_{bc} b d^2 (0,8\alpha - 1 - \delta') \alpha.$$

Comme, dans les hypothèses considérées, $\sigma (d - \delta' d)$ est une constante, la somme $(A_s + A_s')$ sera minimale lorsque l'expression :

$$S = 2 M_u + 0,8 f_{bc} b d^2 (0,8\alpha - 1 - \delta') \alpha$$

sera elle-même minimale. On aura alors :

$$(\partial S / \partial \alpha) = 0,8 f_{bc} b d^2 (1,6\alpha - 1 - \delta') = 0, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{1 + \delta'}{1,6}.$$

Alors, pour différentes valeurs de δ' , on calcule α_m à partir de α conduisant à la valeur minimale de $(A_s + A_s')$ ainsi que les valeurs correspondantes de μ , β , $1000 \varepsilon_s$ et $1000 \varepsilon_s'$.

On a :

$$\begin{aligned} \alpha_m &= (1 + \delta') / 1,6 ; & \mu_m &= 0,8 \alpha_m (1 - 0,4 \alpha_m) ; \\ \beta_m &= 1 - 0,4 \alpha_m ; & 1000 \varepsilon_s &= 3,5 [(1 / \alpha_m) - 1] ; \\ & & 1000 \varepsilon_s' &= 3,5 (1 - \delta') - 1000 \varepsilon_s \delta'. \end{aligned}$$

Les résultats obtenus sont indiqués dans le tableau 3.2

Il est possible, pour l'application des formules 3.13, 3.14 et 3.15 d'utiliser les valeurs données dans le tableau 3.2 lorsque le diagramme de l'acier utilisé présente un palier, à condition toutefois que l'on a $\mu_m \leq \mu_l$, sinon l'hypothèse de départ ne serait plus vérifiée puisqu'on ne se trouverait plus sur la partie horizontale du diagramme.

Si l'on compare les résultats précédents (tableau 3.2) avec ceux donnés dans les tableaux A.1 et A.2, on constate que, pour les barres HA type 1, les fils HA type 3 et les treillis soudés en fils lisses, les valeurs de μ_m sont sans intérêt car l'on a pratiquement toujours $\mu_m < \mu_l$.

Tableau 3.2

δ'	α_m	μ_m	β_m	$1000 \varepsilon_s$	$1000 \varepsilon_s'$
0,05	0,6562	0,387	0,738	1,834	3,233
0,06	0,6625	0,389	0,735	1,783	3,183
0,07	0,6687	0,392	0,733	1,734	3,134
0,08	0,6750	0,394	0,730	1,685	3,085
0,09	0,6812	0,396	0,728	1,638	3,038
0,10	0,6875	0,399	0,725	1,591	2,991
0,11	0,6937	0,401	0,723	1,545	2,945
0,12	0,7000	0,403	0,720	1,500	2,900
0,13	0,7062	0,405	0,718	1,456	2,856
0,14	0,7125	0,407	0,715	1,412	2,812
0,15	0,7187	0,410	0,713	1,370	2,770

Ce n'est donc que dans le cas des rondes lisses que les valeurs de μ_m pourront être utilisées mais la différence obtenue sur le total ($A_s + A_s'$), calculé en utilisant μ_m ou μ_l , est en général peu importante.

C'est pourquoi dans la grande majorité des cas les Normes *B.A.E.L* autorisent pour le calcul pratique de prendre la valeur de α (qui minimise $A_s + A_s'$) égale à :

$$\alpha = \alpha_m = 0,69, \quad 0,8 \alpha = 0,552 \quad \text{et} \quad \mu = \mu_m = 0,400.$$

Avec ces valeurs les formules 3.14 et 3.15 s'écrivent :

$$A_s' = \frac{M_u - 0,4 b d^2 f_{bc}}{(d - d') \sigma_s'} ; \quad A_s = \frac{A_s' \sigma_s' + 0,552 b d f_{bc}}{\sigma_s}.$$

3.1.5. Raccourcissement des armatures comprimées

On distingue deux cas selon que le diagramme des déformations passe par le point *A* ou par le point *B*.

a) *Le diagramme des déformations passe par le point A* (fig. 3.10,a). L'allongement des armatures tendues a alors pour valeur 10 ‰. La considération des triangles semblables *GaA* et *Gcc'* donne le raccourcissement des armatures comprimées :

$$\frac{c c'}{A a} = \frac{G c}{G a} ; \quad \text{soit :} \quad \frac{1000 \varepsilon_s'}{10} = \frac{\alpha d - \delta' d}{d - \alpha d} = \frac{\alpha - \delta'}{1 - \alpha},$$

$$\text{d'où} \quad 1000 \varepsilon_s' = 10 (\alpha - \delta') / (1 - \alpha).$$

De la même manière on peut déterminer le raccourcissement du béton de la zone la plus comprimée :

$$\frac{b B}{a A} = \frac{G b}{G a} ; \quad \frac{\varepsilon_b}{10} = \frac{\alpha d}{d - \alpha d} = \frac{\alpha}{1 - \alpha},$$

$$\text{d'où} \quad \varepsilon_b = 10 \alpha / (1 - \alpha).$$

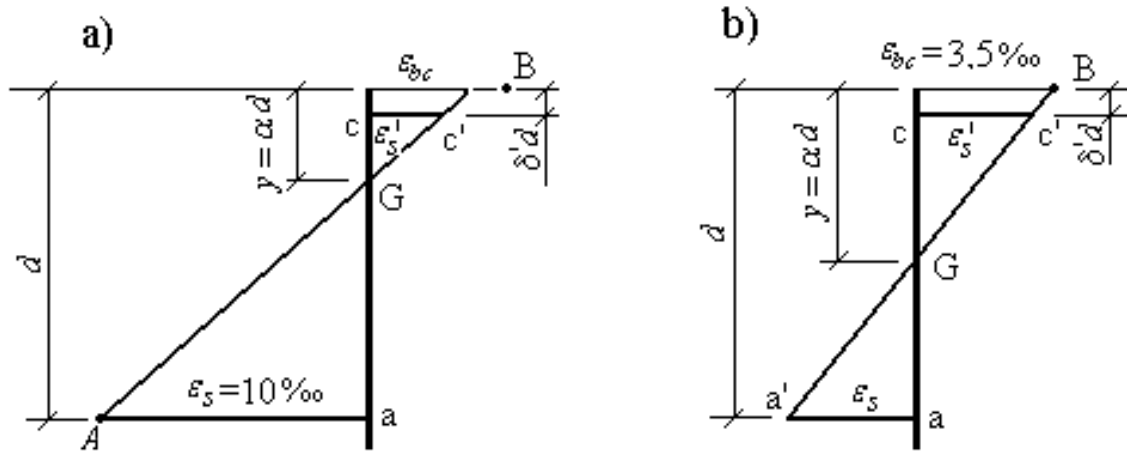


Fig. 3.10

Le raccourcissement $1000 \varepsilon'_s$ s'étant connu, la contrainte σ'_s dans l'armature comprimée a pour valeur :

- pour les aciers autre que le type 2 :

$$\text{si } 1000 \varepsilon'_s < 1000 \varepsilon_l, \quad \sigma'_s = 200 (1000 \varepsilon'_s);$$

$$\text{si } 1000 \varepsilon'_s > 1000 \varepsilon_l, \quad \sigma'_s = f_e / \gamma_s;$$

- pour les aciers de type 2 :

les valeurs de σ'_s pour les aciers Fe E 400 et Fe E 500 sont à lire dans les tableaux A.4 et A.5.

b) *Le diagramme des déformations passe par le pivot B* (fig.3.10,b). Le raccourcissement du béton sur la fibre extrême a pour valeur 3,5 ‰. Les triangles semblables Gaa' et Gcc' donnent:

$$\frac{c}{a} \frac{c'}{a'} = \frac{G}{G} \frac{c}{a}; \quad \frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_s} = \frac{\alpha d - \delta' d}{d - \alpha d} = \frac{\alpha - \delta'}{1 - \alpha},$$

et les triangles Gaa' et GbB :

$$\frac{a}{b} \frac{a'}{B} = \frac{G}{G} \frac{a}{b}; \quad \frac{1000 \varepsilon_s}{3,5} = \frac{d - \alpha d}{\alpha d} = \frac{1 - \alpha}{\alpha}.$$

D'où, en multipliant membre à membre les deux égalités précédentes on trouve :

$$1000 \varepsilon'_s = 3,5 (\alpha - \delta') / \alpha.$$

Le raccourcissement $1000 \varepsilon_s'$ étant connu, la contrainte σ_s' dans l'armature comprimée à pour valeur:

- pour les aciers autres que le type 2 : $\sigma_s' = f_e / \gamma_s$. Puisque le diagramme des déformations passe par le pivot B , l'allongement étant toujours, en pratique, supérieur à l'allongement limite correspondant à la partie horizontale du diagramme ;

- pour les aciers du type 2 : on procèdera comme indiqué dans le cas du pivot A . On note que les valeurs de $1000 \varepsilon_s'$ données ci-dessus sont indépendantes de la forme de la section.

3.1.6. Calcul d'une section pour laquelle l'armature A_s' est connue

Le cas envisagé se présente, en particulier, dans les sections d'appuis des poutres continues, sections dans lesquelles les armatures comprimées sont généralement le prolongement de la totalité ou d'une partie, des armatures prévues dans la partie centrale de la travée et sont, par conséquent, connues. Ces armatures existant nécessairement, il est intéressant de les prendre en compte dans les calculs, même si la section pouvait être armée uniquement par des armatures tendues. En application des règles *B.A.E.L.*, la section A_s' ne peut toutefois être quelconque puisque, comme déjà indiqué, la part du moment de flexion équilibré par les armatures comprimées ne peut dépasser 40 % du moment total. En pratique cette condition est d'ailleurs automatiquement remplie, en général.

Soit M_u est le moment appliqué à la section. D'après la figure 3.7 on peut écrire :

- la section fictive de la figure 3.7,c peut équilibrer un moment :

$$M_2^f = A_s' (d - d') \sigma_s' ;$$

- tandis que celle de la figure 3.7,b peut équilibrer un moment :

$$M_1^f = M_u - M_2^f.$$

Alors les armatures A_{s1} ont pour valeur :

$$A_{s1} = \frac{M_1^f}{\beta_1 d \sigma_s},$$

où β_1 est le coefficient correspondant à $\mu_1 = M_1^f / (f_{bc} b d^2)$ et σ_s la contrainte dans les armatures tendues, elle est fonction de coefficient μ_1 .

Les armatures de la section réelle sont :

$$A_s' \quad \text{et} \quad A_s = A_{s1} + (A_s' \sigma_s') / \sigma_s ;$$

Comme A_s' est connu, le problème serait résolu à l'aide des formules précédentes. Pour cela on doit savoir la contrainte des armatures comprimées σ_s' .

Pour déterminer σ_s' on distingue deux cas :

1. *Aciers dont le diagramme des déformations présente un palier.*

Pour commencer le calcul on suppose que $\sigma_s' = f_e / \gamma_s$ et on calcule le coefficient μ_1 .

Si $\mu_1 > \mu_l$, la section fictive de la figure 3.7,b ne peut-être simplement armée et les armatures données sont insuffisantes, il est nécessaire de les renforcer. On calculera alors les armatures de la section réelle à l'aide des formules 3.13.

Si $0,186 \leq \mu_1 < \mu_l$, dans ce cas, le diagramme des déformations passe par le pivot B et pour les aciers considérés, on prend $\sigma_s' = f_e / \gamma_s$, donc l'hypothèse de départ est exacte et on peut alors calculer A_s par :

$$A_s = A_{s1} + (A_s' \sigma_s) / \sigma_s'.$$

Si $\mu_1 < 0,186$, il est alors nécessaire de procéder par approximations successives pour déterminer σ_s' . On sait seulement que, dans ce cas, le diagramme des déformations passe par le pivot A et que $\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$.

De la valeur obtenue pour μ_1 , en partant de l'hypothèse que $\sigma'_{s1} = f_e / \gamma_s$, on peut déduire α_1 (tableau A.3) puis calculer $1000 \varepsilon'_s = 10 (\alpha_1 - \delta') / (1 - \alpha_1)$ et par la suite σ'_{s2} . En général σ'_{s2} sera différent de σ'_{s1} . On recommence alors le calcul avec une nouvelle valeur $\sigma'_{sm} = (\sigma'_{s1} + \sigma'_{s2}) / 2$, d'où une nouvelle valeur σ'_{s3} et on continue ainsi jusqu'à ce qu'on obtienne $\sigma'_{sn} = \sigma'_{s(n+1)}$.

2. *Armatures de type 2.* Comme dans le cas précédent, on commence par supposer que $\sigma'_s = f_e / \gamma_s$ et on calcule μ_1 .

Si $\mu_1 > \mu_l$, la section des armatures A'_s donnée n'est pas suffisante, il faut alors déterminer les armatures A'_s de la section réelle à l'aide des formules 3.13.

Si $0,186 \leq \mu_1 < \mu_l$, le diagramme des déformations passe alors par le pivot *B*. De la valeur obtenue pour μ_1 on peut déduire α_1 (tableau A-3) et calculer la valeur $1000 \varepsilon'_s = 3,5 [(\alpha_1 - \delta') / \alpha_1]$, d'où on trouve la contrainte σ'_{s2} (voir 3.1.5) pour les aciers de type 2. En général σ'_{s2} sera différent de σ'_{s1} . On recommence alors le calcul avec $\sigma'_{sm} = (\sigma'_{s1} + \sigma'_{s2}) / 2$ jusqu'à ce que l'on ait $\sigma'_{sn} = \sigma'_{s(n+1)}$.

Si $\mu_1 < 0,186$, le diagramme des déformations passe alors par le pivot *A*. On procèdera comme dans le cas précédent, la seule différence étant que, pour le cas envisagé, on a : $1000 \varepsilon'_s = 10 [(\alpha - \delta') / (1 - \alpha)]$.

Exemple 3.6. Déterminer les armatures tendues de la section rectangulaire (fig.3.11) pour laquelle $A'_s = 603 \text{ mm}^2$ ($3\varnothing 16 \text{ mm}$). Cette section est soumise à un moment $M_u = 400 \text{ kNm}$. Les armatures sont en acier *Fe E 400*, type 1 : $\gamma_s = 1,15$, $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 348 \text{ MPa}$. Pour le béton on a $f_{bc} = 14,2 \text{ MPa}$.

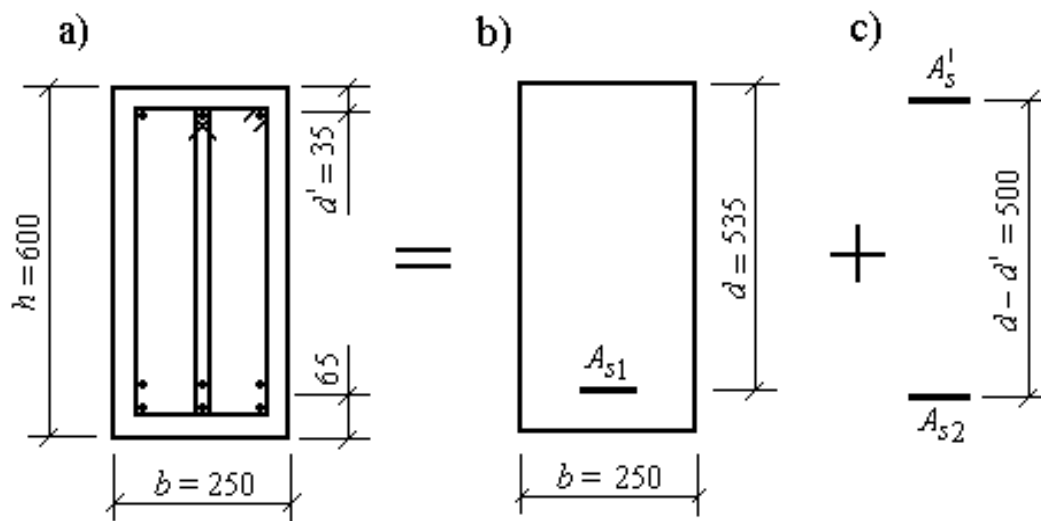


Fig. 3.11

Solution. En prenant $\sigma'_{s1} = 348 \text{ MPa}$, on trouve :

$$M_2^f = A_s' (d - d') \sigma'_{s1} = 603 (535 - 35) 348 = 104,92 \times 10^6 \text{ N mm.}$$

$$M_1^f = M_u - M_2^f = 400 - 104,92 = 295,08 \text{ kN m.}$$

Le coefficient μ_1 sera égal à (figure 3.11,b) :

$$\mu_1 = \frac{M_1^f}{f_{bc} b d^2} = \frac{295,08 \cdot 10^6}{14,2 \cdot 250 \cdot 535^2} = 0,290 .$$

On a que $0,186 < \mu_1 = 0,290$.

Le diagramme des déformations passe par le pivot B et on sait que, dans ce cas, pour l'acier $Fe E 400$, type 1, $\sigma_s' = 348 \text{ MPa}$, donc l'hypothèse de départ est exacte.

Il faut remarquer que $M_2^f = 104,92 \text{ kN m} < 0,4 M_u = 160 \text{ kN m}$.

Pour $\mu_1 = 0,290$ on trouve sur le tableau A-3 : $\beta_1 = 0,8245$.

Comme $\mu < \mu_f = 0,392$ (tableau A.1) on trouve $\sigma_s = 348 \text{ MPa}$.

Alors, la section des armatures A_s sera égale à :

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{M_1^f}{\beta_1 d \sigma_s} + A_s' \frac{\sigma'_s}{\sigma_s} = \frac{295,08 \cdot 10^6}{0,8245 \cdot 535 \cdot 348} + 603 \frac{348}{348} = \\ &= 2525,3 \text{ mm}^2 . \end{aligned}$$

Pour le ferrailage on prend $3 \text{ } \varnothing 25$ (1473 mm^2) et $3 \text{ } \varnothing 22$ (1140 mm^2) avec la section totale des armatures $A_s = 2613 \text{ mm}^2$.

Exemple 3.7. Reprenons l'étude de la section représentée sur la figure 3.11, mais avec cette fois le moment $M_u = 250 \text{ kNm}$.
Les autres données restant inchangées.

Solution. En prenant $\sigma'_{s1} = 348 \text{ MPa}$, on obtient :

$$M_2^f = 603 (535 - 35) 348 = 104,92 \times 10^6 \text{ Nmm} ;$$

$$M_1^f = M_u - M_2^f = 250 - 104,92 = 145,08 \text{ kNm} ;$$

$$\mu_1 = \frac{M_1^f}{f_{bc} b d^2} = \frac{145,08 \cdot 10^6}{14,2 \cdot 250 \cdot 535^2} = 0,143.$$

On a que : $\mu_1 = 0,143 < 0,186$, donc le diagramme des déformations passe par le pivot A. Pour $\mu_1 = 0,143$, nous lisons sur le tableau A.3 : $\alpha_1 = 0,1937$.

Comme $\delta' = 35 / 535 = 0,065$, on trouve :

$$1000 \varepsilon'_s = \frac{10(\alpha_1 - \delta')}{1 - \alpha_1} = \frac{10(0,1937 - 0,065)}{1 - 0,1937} = 1,596.$$

Donc, nous avons que $1000 \varepsilon'_s = 1,596 < 1000 \varepsilon_l = 1,739$ (tableau A.1).

Alors on calcule la contrainte σ'_{s2} à l'aide de la formule :

$$\sigma'_{s2} = 200 (1000 \varepsilon'_s) = 200 \times 1,596 = 319,2 \text{ MPa}.$$

Recommençons les calculs avec la contrainte:

$$\sigma'_{sm} = \frac{\sigma'_{s1} + \sigma'_{s2}}{2} = \frac{348 + 319,2}{2} = 333,6 \text{ MPa} ;$$

$$M_2^f = 603 (535 - 35) 333,6 = 100,58 \times 10^6 \text{ Nmm} ;$$

(cette valeur satisfait la condition: $M_2^f = 100,58 \text{ kNm} \approx 0,4 M_u = 100 \text{ kNm}$)

$$M_1^f = 250 - 100,58 = 149,42 \text{ kNm} ;$$

$$\mu_2 = \frac{M_1^f}{f_{bc} b d^2} = \frac{149,42 \cdot 10^6}{14,2 \cdot 250 \cdot 535^2} = 0,147 < 0,186 .$$

Pour $\mu_2 = 0,147$, on a : $\alpha_2 = 0,1998$.

$$1000 \varepsilon'_s = \frac{10(\alpha_2 - \delta')}{1 - \alpha_2} = \frac{10(0,1998 - 0,065)}{1 - 0,1998} = 1,684 < 1,739 .$$

$$\sigma'_{s3} = 200 (1000 \varepsilon_s) = 200 \times 1,684 = 336,8 \text{ MPa.}$$

Cette valeur est très voisine de σ'_{sm} , aussi nous pouvons prendre définitivement $\sigma'_s = \sigma'_{sm} = 333,6 \text{ MPa}$ [s'il n'en avait pas été ainsi il faut continuer de la même manière que ci-dessus en prenant $\sigma'_{s4} = (\sigma'_{s2} + \sigma'_{s3}) / 2$].

Alors dans ce cas on peut considérer que la valeur $\mu_2 = 0,147$ est exacte.

Pour $\mu_2 = 0,147$, $\beta_2 = 0,920$. Comme le diagramme des déformations passe par le point A, $\sigma_s = 348 \text{ MPa}$. Alors, on peut calculer :

$$A_s = \frac{M_1^f}{\beta_1 d \sigma_s} + A'_s \frac{\sigma'_s}{\sigma_s} = \frac{149,42 \cdot 10^6}{0,920 \cdot 535 \cdot 348} + 603 \frac{333,6}{348} = 1450,4 \text{ mm}^2.$$

Pour le ferrailage on prend 3 \varnothing 25 avec $A_s = 1473 \text{ mm}^2$.

3.1.7. Calcul des sections avec des armatures symétriques

On peut être amené à prévoir des armatures symétriques lorsque le moment M_u peut changer de sens, tout en gardant la même valeur absolue. Dans ce cas les armatures comprimées auront une valeur importante mais, étant donné que les règles *B.A.E.L.* imposent que la part du moment fléchissant équilibré par ces armatures soit inférieur à 40 % du moment total, on aura à la limite, avec les notations utilisées par les formules 3.13 :

$$M_1^f = 0,60 M_u, \quad M_2^f = 0,40 M_u.$$

Par conséquent $\mu = (0,60 M_u) / f_{bc} b d^2$ est connu, donc α et les allongements ε_s et ε'_s , ainsi que les contraintes σ_s et σ'_s , qui résultent de ces allongements. On aura donc :

$$A'_s = \frac{0,40 M_u}{(d - d') \sigma'_s}; \quad A_s = \frac{0,60 M_u}{\beta d \sigma_s} + A'_s \frac{\sigma'_s}{\sigma_s}.$$

Pour armer la section on prendra $A'_s = A_s$ puisque, par hypothèse, les armatures doivent être symétriques.

Exemple 3.8. Déterminer les armatures de la section rectangulaire représentée sur la figure 3.11 et pour laquelle on désire d'obtenir des armatures symétriques. Cette section est soumise à un moment $M_u = 250 \text{ kNm}$, les armatures sont en acier $Fe E 400$, type 1, $\gamma_s = 1,15$ (donc $f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa}$) et on a pour le béton :
 $f_{bc} = 14,2 \text{ MPa}$.

Solution. En prenant $M_1^f = 0,60 M_u = 0,60 \times 250 = 150 \text{ kNm}$, on aura :

$$\mu = \frac{M_1^f}{f_{bc} b d^2} = \frac{150 \cdot 10^6}{14,2 \cdot 250 \cdot 535^2} = 0,147.$$

D'où, d'après le tableau A.3 on trouve : $\alpha = 0,1998$, $\beta = 0,920$, $\varepsilon_s = 10\text{‰}$, donc $\sigma_s = 348 \text{ MPa}$. Comme $\mu = 0,147 < 0,186$, le diagramme passe par le pivot A.

Les déformations des armatures A_s' sont calculées à l'aide de la formule (en ayant $\delta' = 35 / 535 = 0,065$):

$$1000 \varepsilon_s' = 10 (\alpha - \delta') / (1 - \alpha) = 10 (0,1998 - 0,065) / (1 - 0,1998) = 1,684.$$

Vu que $1000 \varepsilon_s' = 1,684 < 1000 \varepsilon_l = 1,739$, la contrainte des armatures A_s' est prise égale à :

$$\sigma_s' = 200 (1000 \varepsilon_s') = 200 \times 1,684 = 336,8 \text{ MPa}.$$

Alors la section des armatures comprimées a pour valeurs :

$$A_s' = \frac{0,40 M_u}{(d - d') \sigma_s'} = \frac{0,40 \cdot 250 \cdot 10^6}{(535 - 35) 336,8} = 593,8 \text{ mm}^2.$$

Et celle des armatures tendues :

$$A_s = \frac{0,60 M_u}{\beta d \sigma_s} + A_s' \frac{\sigma_s'}{\sigma_s} = \frac{150 \cdot 10^6}{0,920 \cdot 535 \cdot 348} + 593,8 \frac{336,8}{348} = 1450,4 \text{ mm}^2.$$

On retiendra donc $A_s = A_s' = 1450,4 \text{ mm}^2$.

3.2. Calcul des sections en T

3.2.1. Composition des sections en T

Les sections en T se rencontrent fréquemment dans les constructions en béton armé, par exemple dans les planchers, les murs de soutènement, les tabliers de pont et d'une manière générale, dans tous les ouvrages où l'on fait concourir le hourdis à la résistance de la poutre.

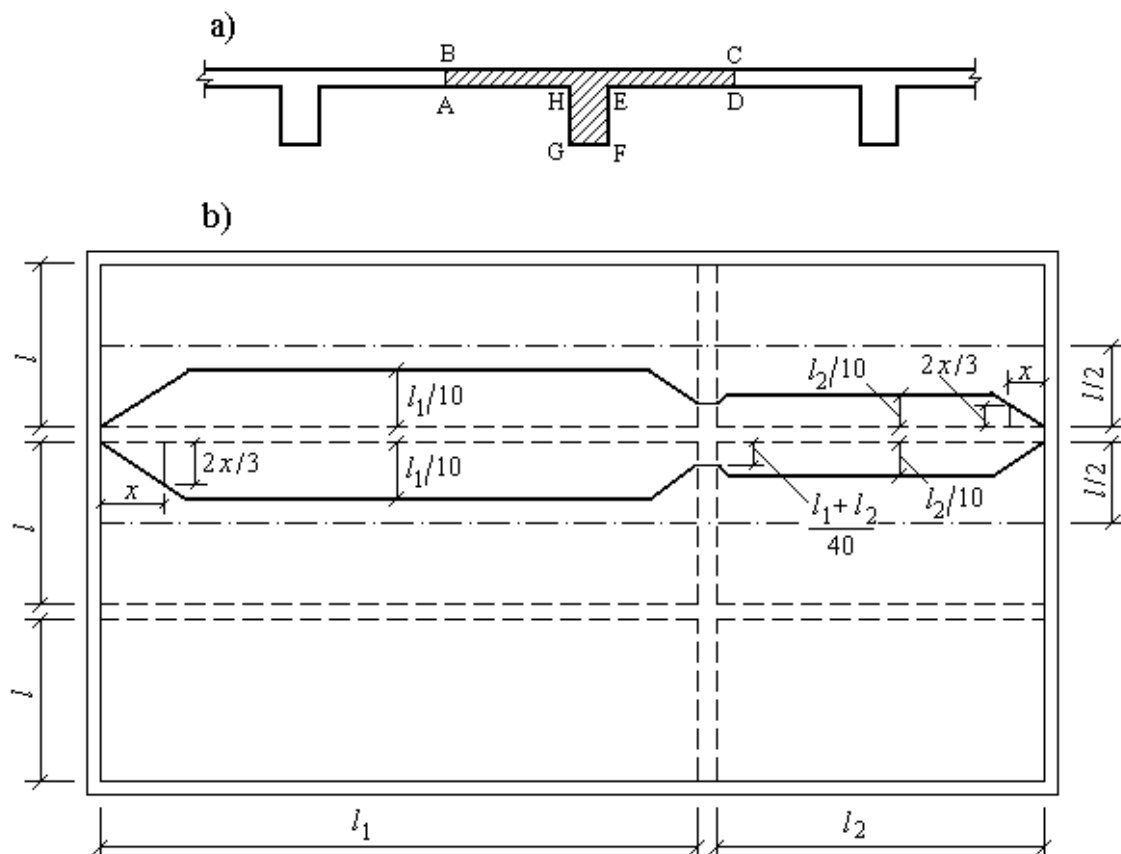


Fig. 3.12. Détermination de la largeur de la table à prendre en compte dans les calculs

Cette forme de section est tout à fait rationnelle puisqu'elle résulte de la suppression de la plus grande partie du béton tendu, béton qui ne constitue qu'un poids mort inutile étant donné qu'il est négligé dans les calculs de résistance.

La table doit être prise en compte si elle se trouve dans la zone comprimée. S'il n'en était pas ainsi, comme cela se produit aux appuis d'une poutre continue où la table se trouve dans la zone de béton tendu, on serait alors ramené au calcul d'une section rectangulaire de largeur GF (fig. 3.12,a), puisque le béton tendu n'est pas pris en compte dans les calculs servant à la détermination des armatures.

La largeur de hourdis à prendre en compte de chaque côté d'une nervure, à partir de son parement, est limitée à la plus faible des valeurs suivantes :

- la moitié de la distance entre les faces voisines de deux nervures consécutives ;
- le dixième de la portée de la travée ;
- les deux tiers de la distance de la section considérée à l'axe de l'appui extrême le plus rapproché ;
- le quarantième de la somme des portées encadrant l'appui intermédiaire le plus rapproché, augmenté des deux tiers de la distance de la section considérée à cet appui.

La figure 3.12,b représente ces limites. Notons que dans la partie centrale de la poutre seule les deux premières limites interviennent (moitié de la distance entre faces voisines et dixième de la portée).

Dans l'étude des sections en T , on distingue deux cas suivant que la zone comprimée, de hauteur égale à $0,8 y$, se trouve située uniquement dans la table ou s'étend aussi dans la nervure. Dans le premier cas la section en T sera calculée comme une section rectangulaire de largeur b , puisque le béton tendu n'intervient pas dans les calculs de résistance.

3.2.2. La section ne comporte que des armatures tendues

En commençant le calcul, on détermine tout d'abord la hauteur de la zone comprimée. Pour cela on considère la section qui est soumise à un moment M_t (fig. 3.13,a). On suppose que pour cette valeur du moment, la hauteur de la zone comprimée est égale à h_o .

Alors on a : $N_b = f_{bc} b h_o$. L'effort de N_b passe à la distance $h_o / 2$ de l'arête supérieure de la section. En prenant les moments par rapport au centre des armatures tendues on peut écrire :

$$M_t = f_{bc} b h_o (d - h_o / 2) \quad (3.17)$$

Si le moment M_u appliqué à la section est inférieur au moment M_t équilibré par la table, seule une partie de la table est comprimée, et si le moment M_u est supérieur à M_t , la table entière et une partie de la nervure sont comprimées.

Par conséquent :

- si $M_u \leq f_{bc} b h_o (d - h_o / 2)$, seule une partie, ou la totalité, de la table est comprimée et la section en T est à calculer comme une section rectangulaire de largeur b et de hauteur utile d . Les armatures seront alors déterminées à l'aide des formules pour une section rectangulaire ;

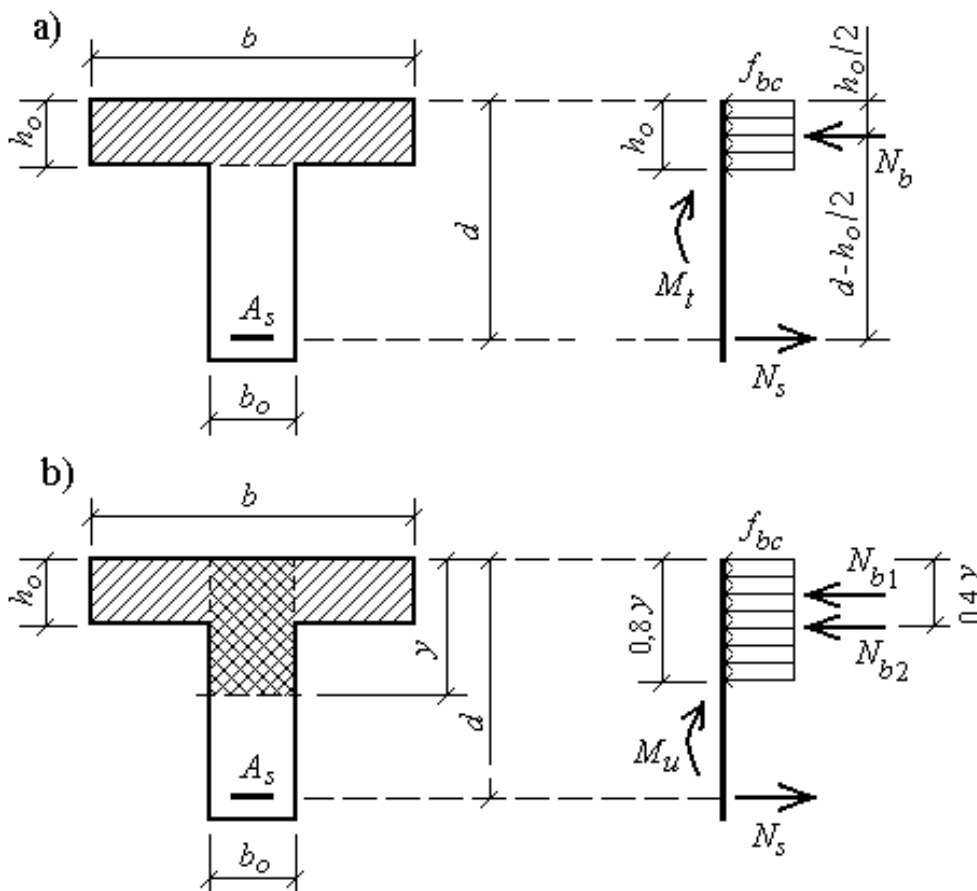


Fig.3.13

- si $M_u > f_{bc} b h_o (d - h_o / 2)$, une partie de la nervure est comprimée et la section en T est à calculer par une méthode qui lui est propre. Les armatures seront alors déterminées à l'aide des formules données ci-après (fig. 3.13,b).

En considérant la section en T représentée sur la figure 3.13,b, pour laquelle la partie comprimée s'étend dans la nervure, on a:

$$M_u > f_{bc} b h_o (d - h_o / 2).$$

Dans ce cas on décompose la section en deux parties : la nervure (doublement hachurée) et les ailes de la table de compression (simplement hachurée). Les efforts équilibrés valent :

$N_{b1} = f_{bc} (b - b_o) h_o$ - la résultante des compressions sur la partie simplement hachurée de la figure 3.13,b (débords de la table), cette résultante passe à la distance $h_o / 2$ de l'arête supérieure ;

$N_{b2} = 0,8 f_{bc} b_o y = 0,8 \alpha f_{bc} b_o d$ - la résultante des compressions sur la partie doublement hachurée de la figure 3.13,b, cette résultante passe à la distance $0,4 y$ de l'arête supérieure ;

$N_s = A_s \sigma_s$ - la résultante des tractions dans les armatures tendues.

Les moments équilibrés par ces efforts sont (rapportés au centre des armatures tendues) :

$M_{u1} = f_{bc} (b - b_o) h_o (d - h_o / 2)$ - le moment fléchissant équilibré par la partie du béton simplement hachurée ;

$M_{u2} = 0,8 f_{bc} b_o y (d - 0,4 y) = 0,8 \alpha d^2 f_{bc} b_o (1 - 0,4 \alpha)$ - le moment fléchissant équilibré par la partie du béton doublement hachurée ;

$M_u = M_{u1} + M_{u2}$ - le moment fléchissant total équilibré par le béton de la zone comprimée.

La condition exprimant que le moment fléchissant dû aux charges de calcul ne doit pas dépasser le moment maximal des efforts internes prend alors la forme :

$$\begin{aligned} M_u &< M_{u1} + M_{u2} = & (3.18) \\ &= f_{bc} (b - b_o) h_o (d - h_o / 2) + 0,8 \alpha d^2 f_{bc} b_o (1 - 0,4 \alpha). \end{aligned}$$

La projection des efforts sur l'axe longitudinal donne :

$$\begin{aligned} A_s \sigma_s - f_{bc} (b - b_o) h_o - 0,8 f_{bc} b_o y &= 0 ; \quad \text{ou encore} \\ A_s \sigma_s - f_{bc} (b - b_o) h_o - 0,8 \alpha f_{bc} b_o d &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

On pose :

$$M_{u2} = M_u - M_{u1} = M_u - f_{bc} (b - b_o) h_o (d - h_o / 2),$$

ou encore [vu que $y = \alpha d$ et $\mu = 0,8 \alpha (1 - 0,4 \alpha)$] :

$$M_{u2} = 0,8 \alpha d^2 f_{bc} b_o (1 - 0,4 \alpha) = \mu f_{bc} b_o d^2. \quad (3.20)$$

D'après cette dernière équation on a : $\mu = M_{u2} / (f_{bc} b_o d^2)$, donc une expression identique à celle trouvée pour la section rectangulaire simplement armée. Les valeurs de α en fonction de μ sont données par le tableau A.3.

Comme $M_{u2} - 0,8 f_{bc} b_o y (d - 0,4 y) = 0$, et

$$A_s \sigma_s - f_{bc} (b - b_o) h_o - 0,8 f_{bc} b_o y = 0, \quad (3.21)$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} M_{u2} - [A_s \sigma_s - f_{bc} (b - b_o) h_o] (d - 0,4 y) &= 0 ; \\ M_{u2} - [A_s \sigma_s - f_{bc} (b - b_o) h_o] (1 - 0,4 \alpha) d &= 0 ; \\ M_{u2} - [A_s \sigma_s - f_{bc} (b - b_o) h_o] \beta d &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ici la valeur de $\beta = 1 - 0,4 \alpha$ en fonction de μ sera donc toujours donnée par le tableau A.3.

D'après (3.22) on peut calculer :

$$A_s = \frac{(M_{u2} / \beta d) + f_{bc} (b - b_o) h_o}{\sigma_s} ; \quad (3.23)$$

ou encore (d'après la formule 3.21) :

$$A_s = \frac{[(b - b_o) h_o + 0,8 \alpha b_o d] f_{bc}}{\sigma_s}. \quad (3.24)$$

Comme dans le cas de la section rectangulaire et pour les mêmes raisons, en pratique, ces formules ne sont à utiliser que lorsque $\varepsilon_s \geq \varepsilon_l$, c'est-à-dire si $\mu \leq \mu_l$. Si $\mu > \mu_l$, la section en T est armée par des armatures comprimées et tendues.

Exemple 3.9. Soit à déterminer les armatures de la section en T (figure 3.14) soumise à un moment fléchissant $M_u = 200 \text{ kNm}$.

Les armatures sont en acier $Fe E 400$, type 1, $\gamma_s = 1,15$, $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa}$. Le béton a la résistance caractéristique $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$, alors la résistance de calcul est égale à : $f_{bc} = 0,85 f_{c28} / \theta \gamma_b = 0,85 \times 25 / 1 \times 1,5 = 14,2 \text{ MPa}$.

Solution. Pour déterminer la position de l'axe neutre on suppose que la hauteur de la zone comprimée est égale à h_o (figure 3.14,a). A l'aide de la formule 3.17 on calcule le moment M_t :

$$M_t = f_{bc} b h_o (d - h_o / 2) = 14,2 \times 1000 \times 80 (550 - 80 / 2) = 579,36 \times 10^6 \text{ N mm}.$$

Donc, on a que $M_u = 200 \text{ kNm} < M_t = 579,36 \text{ kNm}$, c'est-à-dire que seule une partie de la table est comprimée et la section en T est à calculer comme une section rectangulaire de largeur $b = 1000 \text{ mm}$ et de hauteur utile $d = 550 \text{ mm}$.

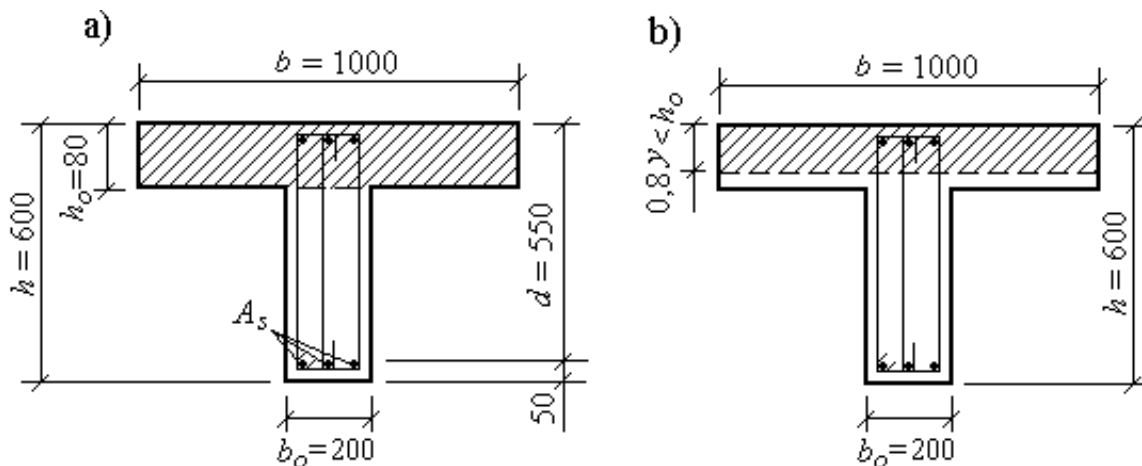


Fig. 3.14

Alors, on calcule la valeur de μ à l'aide de la formule 3.6 :

$$\mu = \frac{M_u}{f_{bc} b d^2} = \frac{200 \cdot 10^6}{14,2 \cdot 1000 \cdot 550^2} = 0,0465 < \mu_l = 0,392 .$$

D'après le tableau A.3, on trouve : $\beta = 0,976$, $1000 \varepsilon_s = 10$, $\alpha = 0,0595$.

Vu que $1000 \varepsilon_s > 1000 \varepsilon_l$ (ou encore $\mu = 0,0465 < \mu_l = 0,392$) la contrainte des armatures tendues sera égale à $\sigma_s = 348 \text{ MPa}$.

D'autre côté $\mu = 0,0465 < 0,104$, alors, la déformation du béton comprimé est inférieure à 2 ‰ ce qui signifie que la contrainte du béton est inférieure à sa résistance de calcul : $f_{bc} = 14,2 \text{ MPa}$. La contrainte du béton comprimé σ_{bc} peut être déterminée à l'aide de la formule 1.7 en fonction des déformations ε_{bc} par approximation successive. Ainsi, pour $\sigma_{bc} = f_{bc} = 14,2 \text{ MPa}$ la hauteur de la zone comprimée du béton est égale à : $y = \alpha d = 0,0595 \cdot 550 = 32,72 \text{ mm}$. Les déformations du béton comprimé correspondant sont :

$$1000 \varepsilon_{bc} = \varepsilon_s \frac{y}{d-y} = 10 \frac{32,72}{550-32,72} = 0,632.$$

A l'aide de la formule 1.7 on trouve :

$$\sigma_{bc1} = 0,25 f_{bc} 10^3 \varepsilon_{bc} (4 - 10^3 \varepsilon_{bc}) = 0,25 \cdot 14,2 \cdot 0,632 (4 - 0,632) = 7,556 \text{ MPa}.$$

Dans cette approximation on prend la contrainte du béton comprimé égale à la valeur moyenne :

$$\sigma_{bc(m1)} = \frac{\sigma_{bc1} + f_{bc}}{2} = \frac{14,2 + 7,556}{2} = 10,88 \text{ MPa}.$$

Avec cette contrainte on calcule :

$$\mu = \frac{M_u}{\sigma_{bc(m1)} b d^2} = \frac{200 \cdot 10^6}{10,88 \cdot 1000 \cdot 550^2} = 0,0608, \quad \alpha = 0,0785, \quad \beta = 0,9686.$$

$$A_s = \frac{M_u}{\beta d \sigma_s} = \frac{200 \cdot 10^6}{0,9686 \cdot 550 \cdot 348} = 1078,8 \text{ mm}^2.$$

Pour la deuxième approximation comme précédemment on a (avec $\alpha = 0,0785$) :

$$y = \alpha d = 0,0785 \cdot 550 = 43,175 \text{ mm}; \quad 1000 \varepsilon_{bc} = 10 \frac{43,175}{550-43,175} = 0,852.$$

$$\sigma_{bc2} = 0,25 f_{bc} 10^3 \varepsilon_{bc} (4 - 10^3 \varepsilon_{bc}) = 0,25 \cdot 14,2 \cdot 0,852 (4 - 0,852) = 9,521 \text{ MPa}.$$

$$\sigma_{bc(m2)} = \frac{\sigma_{bc(m1)} + \sigma_{bc2}}{2} = \frac{10,88 + 9,521}{2} = 10,20 \text{ MPa}.$$

$$\mu = \frac{M_u}{\sigma_{bc(m2)} b d^2} = \frac{200 \cdot 10^6}{10,20 \cdot 1000 \cdot 550^2} = 0,0648, \quad \alpha = 0,0838, \quad \beta = 0,9665;$$

$$A_s = \frac{M_u}{\beta d \sigma_s} = \frac{200 \cdot 10^6}{0,9665 \cdot 550 \cdot 348} = 1081,1 \text{ mm}^2.$$

On a que, la première et la deuxième approximations donnent la petite différence dans la quantité des armatures.

De plus, la section de l'armature calculée d'après la contrainte du béton comprimé $f_{bc} = 14,2 \text{ MPa}$ sera égale à :

$$A_s = \frac{M_u}{\beta d \sigma_s} = \frac{200 \cdot 10^6}{0,976 \cdot 550 \cdot 348} = 1070,6 \text{ mm}^2 .$$

Ainsi, la section des armatures exigée dépend peu des déformations et des contraintes du béton de la zone comprimée dans ce cas considéré (élément sollicité à la flexion simple). C'est pourquoi, au défaut de calcul exact, on peut admettre $\sigma_{bc} = f_{bc}$. Pour le ferrailage on prend $3 \varnothing 22 \text{ mm}$ avec $A_s = 1140 \text{ mm}^2$.

Exemple 3.10. Déterminer les armatures de la section en T représentée sur la figure 3.15 et soumise à un moment $M_u = 300 \text{ kN m}$. Les armatures sont en acier $Fe E 500$, type 1: $\gamma_s = 1,15$, $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 435 \text{ MPa}$. Le béton a la résistance de calcul $f_{bc} = 14,2 \text{ MPa}$ (la résistance caractéristique du béton $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$).

Solution. Le moment repris par la section ayant la hauteur de la zone comprimée $0,8 y = h_o = 80 \text{ mm}$:

$$M_t = f_{bc} b h_o (d - h_o / 2) = 14,2 \times 500 \times 80 (450 - 80 / 2) = 232,9 \times 10^6 \text{ N mm} .$$

On a alors $M_u = 300 \text{ kN m} > M_t = 232,9 \text{ kN m}$.

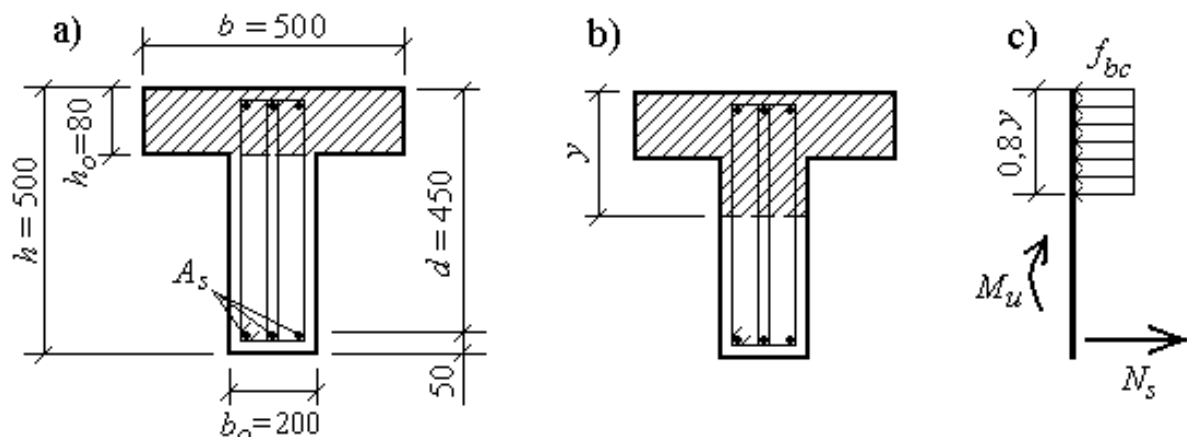


Fig. 3.15

Donc une partie de la nervure est comprimée (fig.3.15,b) et on doit utiliser les formules 3.23 ou 3.24.

Le moment qui doit être équilibré par la nervure sera égal à :

$$M_{u2} = M_u - f_{bc} (b - b_o) h_o (d - h_o / 2) =$$

$$= 300 \times 10^6 - 14,2 (500 - 200) 80 (450 - 80 / 2) = 160,27 \times 10^6 \text{ N mm.}$$

$$\mu = \frac{M_{u2}}{f_{bc} b_o d^2} = \frac{160,27 \cdot 10^6}{14,2 \cdot 200 \cdot 450^2} = 0,278.$$

D'après le tableau A.3 on a : $\beta = 0,833$, $1000 \varepsilon_s = 4,89 > 1000 \varepsilon_l = 2,174$.

donc $\sigma_s = 435 \text{ MPa}$.

La section des armatures tendues A_s est calculée à l'aide de la formule 3.23:

$$A_s = \frac{(M_{u2} / \beta d) + f_{bc} (b - b_o) h_o}{\sigma_s} =$$

$$= \frac{(160,27 \cdot 10^6) / (0,833 \cdot 450) + 14,2(500 - 200)80}{435} = 1766,3 \text{ mm}^2.$$

Soit, on prend 2 \varnothing 22 et 2 \varnothing 25 avec $A_s = 1742 \text{ mm}^2$.

3.2.3. La section comporte des armatures tendues et des armatures comprimées

Lorsqu'une section en T , dont les dimensions sont imposées, est soumise à un moment fléchissant M_u , supérieur à celui que peut équilibrer la section ne comportant que des armatures tendues, parce que l'on a $\mu > \mu_l$, on renforce la partie comprimée de cette section en y disposant des armatures de compression.

La section doublement armée (fig.3.16) peut être considérée comme la somme des sections fictives :

- la première de ces sections fictives (fig. 3.16,b) est une section de mêmes dimensions que la section donnée mais ne comporte que des armatures tendues A_{s1} ;

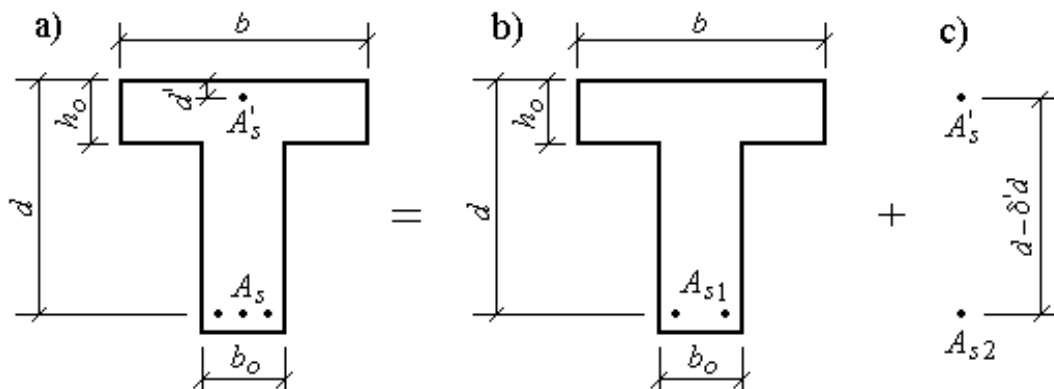


Fig. 3.16

- la deuxième section fictive (fig. 3.16, c) est constituée par des armatures tendues A_{s2} , telles que $A_{s1} + A_{s2} = A_s$, et des armatures comprimées A_s' égales à celles de la section donnée.

Le diagramme des déformations de la section réelle est représenté sur la figure 3.17.

Etant donné que des armatures de compression sont nécessaires on a dans le domaine 2 et le diagramme des déformations passe par le point B, donc le raccourcissement du béton sur la fibre la plus comprimée est égal à 3,5 ‰. En ce qui concerne l'allongement des aciers tendus on prend, comme dans le cas de la section rectangulaire, $\varepsilon_s = \varepsilon_l$. Dans ces conditions, la position de l'axe neutre est déterminée puisqu'on a :

$$\alpha_l = 3,5 / (3,5 + 1000 \varepsilon_l).$$

Le diagramme représenté sur la figure 3.17 permet de faire la comparaison de la hauteur de la zone comprimée, donnée par $0,8 y = 0,8 \alpha_l d$, avec la hauteur h_0 de la table. Ainsi, la valeur la plus faible de α_l pour les aciers normalement utilisés est $\alpha_l = 0,438$ (tableau A.2), ce qui donne : $0,8 \alpha_l d = 0,35 d$.

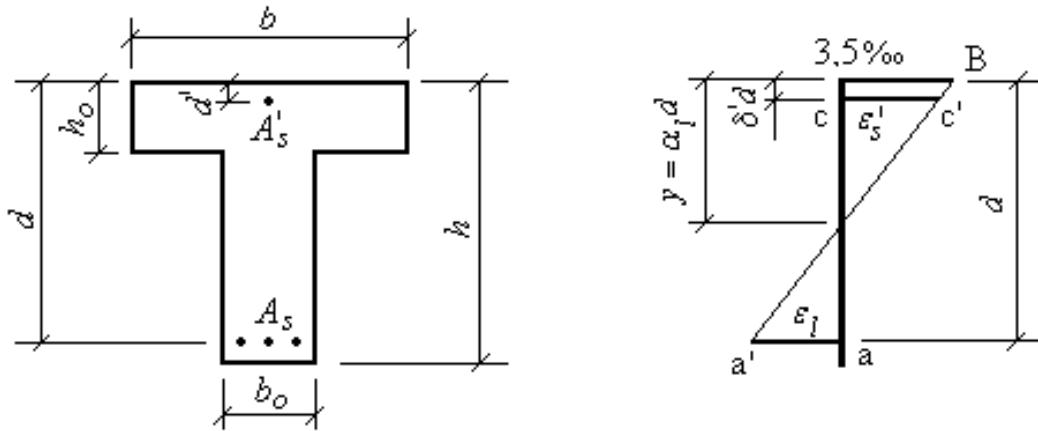


Fig. 3.17

En pratique, pour les sections en T , on a presque toujours $h_o < 0,35 d$, par conséquent dans le cas envisagé, où des armatures comprimées sont nécessaires, la partie comprimée s'étendra toujours dans la nervure.

La section fictive représentée sur la figure 3.16,b peut équilibrer un moment M_1^f donné par :

$$M_1^f = \mu_l f_{bc} b_o d^2 + f_{bc} (b - b_o) h_o (d - h_o / 2) \quad (3.25)$$

où μ_l étant la valeur de μ correspondant à α_l .

La section des armatures A_{s1} est donnée par :

$$A_{s1} = \frac{(\mu_l f_{bc} b_o d^2) / \beta_l d + f_{bc} (b - b_o) h_o}{\sigma_s} \quad (3.26)$$

La deuxième section fictive (fig. 3.16,c) devra donc équilibrer le moment résiduel $M_2^f = M_u - M_1^f$ (avec $M_2^f < 0,40 M_u$).

Ce moment M_2^f donnera une force de compression N_s' dans les armatures comprimées et une force de traction N_s dans les armatures tendues. Comme le bras de levier a pour valeur $d - \delta'd = d - d'$, on a :

$$N_s' = N_s = M_2^f / (d - d').$$

Alors, la section des armatures sera :

$$A'_s = \frac{N'_s}{\sigma'_s} = \frac{M_2^f}{(d - d') \sigma'_s}; \quad (3.27)$$

$$A_{s2} = \frac{N_s}{\sigma_s} = \frac{M_2^f}{(d - d') \sigma_s} = A'_s \frac{\sigma'_s}{\sigma_s}. \quad (3.28)$$

La contrainte σ_s sera la contrainte correspondant à l'allongement ε_l , c'est-à-dire $\sigma_s = f_e / \gamma_s$.

Pour les armatures comprimées on a : $1000 \varepsilon_s' = 3,5 (\alpha_l - \delta') / \alpha_l$.

Après avoir déterminé la valeur de $1000 \varepsilon_s'$ on peut déduire la valeur de σ_s' :

- pour les aciers autres, que ceux de type 2 on a vu (tableau 3.1) qu'avec les valeurs de δ' normalement utilisées on a $\sigma_s' = f_e / \gamma_s$, et il est inutile, dans ce cas, de calculer $1000 \varepsilon_s'$;

- pour les armatures de type 2, la valeur de σ_s' sera lue sur les tableaux A.4 et A.5 en fonction de $1000 \varepsilon_s'$.

Les sections A'_s et A_{s2} étant calculées, les armatures de la section réelle seront A'_s et $A_s = A_{s1} + A_{s2}$.

On peut résumer la méthode de calcul décrite par les formules :

$$M_1^f = \mu_l f_{bc} b_o d^2 + f_{bc} (b - b_o) h_o (d - h_o / 2);$$

$$M_2^f = M_u - M_1^f;$$

$$A'_s = \frac{M_2^f}{(d - d') \sigma_s'};$$

$$A_s = \frac{(\mu_l f_{bc} b_o d^2) / \beta_l d + f_{bc} (b - b_o) h_o}{\sigma_s} + \frac{A'_s \sigma_s'}{\sigma_s}.$$

Pour le calcul des armatures on peut également utiliser les formules suivantes (en prenant $\mu_l = 0,4$ et $\alpha_l = 0,69$, donc $0,8 \alpha_l = 0,8 \times 0,69 = 0,552$) :

$$A_s' = \frac{M_u - \left[(b - b_o) h_o (d - h_o / 2) + 0,4 b_o d^2 \right] f_{bc}}{\sigma_s' (d - d')} ; \quad (3.29)$$

$$A_s = \frac{A_s' \sigma_s' + \left[(b - b_o) h_o + 0,552 b_o d \right] f_{bc}}{\sigma_s} . \quad (3.30)$$

Exemple 3.11. Déterminer les armatures de la section en T représentée sur la figure 3.18 et soumise à un moment $M_u = 460 \text{ kN m}$. Les armatures sont en acier $Fe E 400$, type 1 : $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 348 \text{ MPa}$. La résistance caractéristique du béton est $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$, alors la résistance de calcul sera :
 $f_{bc} = (0,85 f_{c28}) / \theta \gamma_b = (0,85 \times 20) / 1,5 = 11,3 \text{ MPa}$.

Solution. Pour vérifier la position de l'axe neutre, calculons le moment M_t qui peut être équilibré par la table (en prenant $0,8 y = h_o$):

$$\begin{aligned} M_t &= f_{bc} b h_o (d - h_o / 2) = 11,3 \times 500 \times 60 (600 - 60 / 2) = \\ &= 193,23 \times 10^6 \text{ N mm} = 193,23 \text{ kN m}. \end{aligned}$$

Donc on a $M_u = 460 \text{ kN m} > M_t = 193,23 \text{ kN m}$, c'est-à-dire que la zone comprimée est constituée par la table et par une partie de la nervure.

Déterminons le moment qui doit être équilibré par la nervure :

$$\begin{aligned} M_{u2} &= M_u - f_{bc} (b - b_o) h_o (d - h_o / 2) = \\ &= 460 \times 10^6 - 11,3 (500 - 200) 60 (600 - 60 / 2) = 344,06 \times 10^6 \text{ N mm}. \end{aligned}$$

Le coefficient μ correspondant à ce moment sera égal à :

$$\mu = \frac{M_{u2}}{f_{bc} b_o d^2} = \frac{344,06 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 200 \cdot 600^2} = 0,423 .$$

D'après le tableau A.1 on a : $\mu_l = 0,392$, $\beta_l = 0,733$.

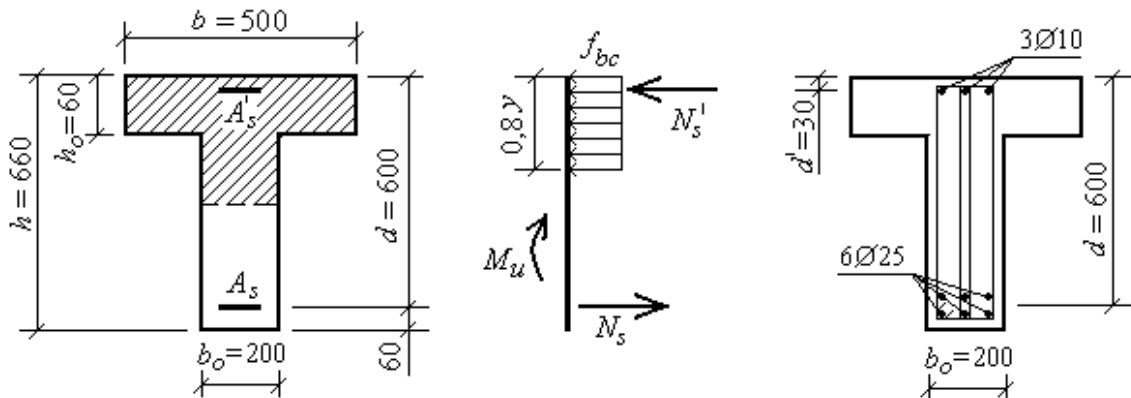


Fig. 3.18

Vu que $\mu = 0,423 > \mu_l = 0,392$, la partie comprimée doit être renforcée par des armatures comprimées. Calculons le moment maximal qui peut être équilibré par la section ne comportant que des armatures tendues :

$$\begin{aligned} M_1^f &= \mu_l f_{bc} b_o d^2 + f_{bc} (b - b_o) h_o (d - h_o / 2) = \\ &= 0,392 \times 11,3 \times 200 \times 600^2 + 11,3 (500 - 200) 60 (600 - 60 / 2) = \\ &= 434,87 \times 10^6 \text{ N mm} = 434,87 \text{ kN m}. \end{aligned}$$

Alors le moment qui doit être équilibré par des armatures comprimées et par une partie des armatures tendues :

$$M_2^f = M_u - M_1^f = 460 - 434,87 = 25,13 \text{ kN m}.$$

Pour $d' = \delta' d = 30 \text{ mm}$, on a : $\delta' = d' / d = 30 / 600 = 0,05 < 0,33$ (tableau 3.1), alors on prend $\sigma_s' = \sigma_s = 348 \text{ MPa}$.

Avec ces données on peut calculer la section des armatures tendues et comprimées :

$$A_s' = \frac{M_2^f}{(d - d') \sigma_s'} = \frac{25,13 \cdot 10^6}{(600 - 30) 348} = 126,7 \text{ mm}^2 ;$$

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{(\mu_l f_{bc} b_o d / \beta_l) + f_{bc} (b - b_o) h_o}{\sigma_s} + \frac{A_s' \sigma_s'}{\sigma_s} = \\ &= \frac{(0,392 \cdot 11,3 \cdot 200 \cdot 600 / 0,733) + 11,3 (500 - 200) 60}{348} + \frac{126,7 \cdot 348}{348} = \\ &= 2795 \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

Soit pour la zone comprimée on prend 3 Ø 10 avec $A_s' = 236 \text{ mm}^2$
et pour la zone tendue 6 Ø 25 avec $A_s = 2945 \text{ mm}^2$.

3.2.4. Etude d'une section pour laquelle l'armature comprimée A_s' est connue

Il faut commencer par rechercher si la partie comprimée de la section est limitée par la table ou s'étend dans la nervure.

On suppose que la hauteur de la zone comprimée soit égale à h_o et soit σ'_{so} la contrainte de l'armature comprimée dans cette hypothèse. Le moment M_t équilibré par la table a pour valeur (en prenant les moments des forces par rapport au centre de gravité des armatures tendues) :

$$M_t = f_{bc} b h_o (d - h_o / 2) + A_s' \sigma'_{so} (d - d'). \quad (3.31)$$

Pour déterminer M_t il faut connaître σ'_{so} et, par conséquent, le pivot par lequel passe le diagramme des déformations.

On sait que le diagramme des déformations passe par le pivot A si $y \leq 0,259 d$, comme par hypothèse $h_o = 0,8 y$, il en résulte :

$$h_o \leq 0,207 d .$$

Dans ce cas le raccourcissement de l'armature comprimée a pour valeur :

$$1000 \varepsilon_s' = \frac{10(\alpha - \delta')}{1 - \alpha} = \frac{10(\alpha d - d')}{d - \alpha d} = \frac{10(y - d')}{d - y} = \frac{10(1,25 h_o - d')}{d - 1,25 h_o} .$$

Si $h_o > 0,207 d$, le diagramme des déformations passe par le pivot B et on aura alors : $\varepsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$ et

$$1000 \varepsilon_s' = \frac{3,5(\alpha - \delta')}{\alpha} = \frac{3,5(1,25 h_o - d')}{1,25 h_o} . \quad (3.32)$$

Ainsi ε_s' étant connu, on en déduira σ'_{so} .

Soit M_u est le moment appliqué à la section.

$$\text{Si } M_u \leq f_{bc} b h_o (d - h_o / 2) + A_s' \sigma'_{so} (d - d'),$$

la partie comprimée étant limitée par la table, et la section en T est calculée comme une section rectangulaire de largeur b et de hauteur utile d . On utilise alors la méthode exposée en haut. Il y a lieu de bien noter que la valeur de σ'_s , qui interviendra au cours du calcul, sera

différente de la valeur σ'_{s0} considérée ci-dessus, cette dernière n'intervenant que pour la comparaison de M_u et de M_t .

Lorsque $M_t > f_{bc} b h_o (d - h_o / 2) + A_s' \sigma'_{s0} (d - d')$, une partie de la nervure est comprimée et il y a lieu d'utiliser une méthode propre à la section en T .

D'après la figure 3.16, on a :

- la section fictive représentée sur la figure 3.16,c peut équilibrer le moment $M_2^f = A_s' \sigma'_{s0} (d - d')$;
- la section fictive représentée sur la figure 3.16,b devra donc équilibrer un moment $M_1^f = M_u - M_2^f$.

L'armature A_{s1} aura pour valeur :

$$A_{s1} = \frac{(\mu_1 f_{bc} b_o d / \beta_1) + f_{bc} (b - b_o) h_o}{\sigma_s} . \quad (3.33)$$

Les coefficients β_1 correspond à μ_1 , dont la valeur est déterminée:

$$\mu_1 = \frac{M_1^f - f_{bc} (b - b_o) h_o (d - h_o / 2)}{f_{bc} b_o d^2} . \quad (3.34)$$

Les armatures tendues de la section réelle auront pour valeur :

$$A_s = A_{s1} + (A_s' \sigma') / \sigma_s.$$

Pour pouvoir effectuer le calcul précédent il est nécessaire de connaître σ'_s , qui est différent de σ'_{s0} . Pour la détermination de σ'_s on procédera comme indiqué dans le cas de la section rectangulaire.

CHAPITRE 4. JUSTIFICATION DES SECTIONS SOUMISES A LA FLEXION COMPOSÉE (ETAT-LIMITE ULTIME)

Une section droite (S) d'une pièce était soumise à la flexion composée si les forces et les couples agissant à gauche de (S) pouvaient être réduits, par rapport à un point G_0 de l'axe cette section (fig.4.1), à :

- un couple de moment M_G (moment de flexion), d'axe perpendiculaire au plan de symétrie de la section ;
- une force N (effort normal), perpendiculaire à (S), dirigée vers la droite dans le cas d'un effort de compression et vers la gauche dans le cas d'un effort de traction ;
- une force V (effort tranchant), portée par l'axe de symétrie de la section.

Dans le présent chapitre, on étudie uniquement les effets du moment de flexion M_G et de l'effort N , ceux de l'effort tranchant V seront étudiés au chapitre 5.

Le système constitué par M_G et N peut être remplacé par une force unique N , appliquée au centre de pression C , distant de G_0 d'une quantité $e = M_G / N$. Le moment M_G peut avoir un signe quelconque, dans ce qui, suit, on supposera toujours que M_G est positif. Si M_G est négatif, il suffit de retourner la figure, le haut devenant le bas et inversement, car le signe de M_G influence uniquement sur la position de la fibre la plus comprimée ou la plus tendue.

Lorsqu'il sera nécessaire de faire une distinction entre N effort de compression et N effort de traction, N sera affecté du signe "plus" en cas d'effort de compression et "moins" en cas d'effort de traction.

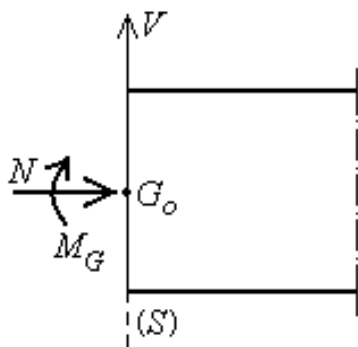


Fig.4.1

Lorsque l'effort normal est un effort de compression, il est nécessaire de vérifier l'état-limite ultime de stabilité de forme de la pièce à laquelle appartient la section étudiée (les principes de cette vérification seront exposés un peu plus tard).

Une section sera entièrement tendue si l'effort N est un effort de traction et si le centre de pression C se trouve entre les armatures.

4.1. Calcul des sections entièrement tendues

Une section sera entièrement tendue si l'effort N est un effort de traction et si le centre d'application "C" se trouve entre les armatures.

En effet, dans ce cas, N_u peut être décomposé en deux forces de traction N_1 et N_2 passant par les centres de gravité des armatures supérieures et des armatures inférieures (fig. 4.2).

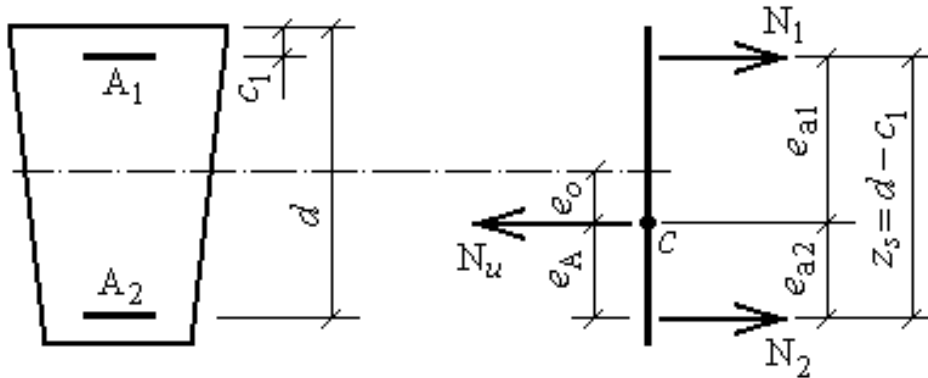


Fig. 4.2

On désigne :

A_1 , la section des armatures supérieures, σ_{s1} leur contrainte ;

A_2 , la section des armatures inférieures, σ_{s2} leur contrainte.

On a alors : $N_1 = A_1 \sigma_{s1}$, $N_2 = A_2 \sigma_{s2}$.

Pour le schéma considéré on peut écrire :

$$\begin{aligned} -N_u + N_1 + N_2 &= 0 ; & -N_u + A_1 \sigma_{s1} + A_2 \sigma_{s2} &= 0 ; \\ -N_u e_{a2} + N_1 (d - c_1) &= 0 ; & -N_u e_{a2} + A_1 \sigma_{s1} (d - c_1) &= 0 ; \end{aligned}$$

$$\text{D'où on trouve : } A_1 = \frac{N_u e_{a2}}{(d - c_1) \sigma_{s1}} ; \quad (4.1)$$

$$A_2 = \frac{N_u}{\sigma_{s2}} - \frac{A_1 \sigma_{s1}}{\sigma_{s2}}, \text{ ou encore } A_2 = \frac{N_u e_{a1}}{(d - c_1) \sigma_{s2}} \quad (4.2)$$

Du point de vue économique, on a intérêt à prendre, pour chacune des contraintes σ_{s1} et σ_{s2} la plus grande valeur possible, on prend donc celle correspondant à l'allongement maximal $\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$,

que l'on appelle : σ_{s10} . Alors avec $\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \sigma_{s10}$, les relations (4.1) et (4.2) deviennent :

$$A_1 = \frac{N_u e_{a2}}{(d - c_1) \sigma_{s10}}; \quad A_2 = \frac{N_u e_{a1}}{(d - c_1) \sigma_{s10}}. \quad (4.3)$$

La solution avec armatures symétriques est:

$$A_1 = A_2 = N_u / (2 f_e / \gamma_s). \quad (4.4)$$

La section minimale des armatures doit être au moins égale à:

$$A_{min} = (B f_{t28}) / f_e, \quad (4.5)$$

où B est l'aire d'une section de béton ($B = b \times h$, pour une section rectangulaire).

4.2. Calcul des sections partiellement comprimées

Une section sera partiellement comprimée :

- si le centre de pression C se trouve à l'extérieur du segment limité par les armatures (l'effort normal peut être de traction ou de compression):

- si le centre de pression C se trouve à l'intérieur du segment limité par les armatures (l'effort normal est un effort de compression) et si la condition suivante est vérifiée:

- pour une section rectangulaire:

$$N_u (d - d') - M_{As} \leq [0,337 - (0,81 d' / h)] b h^2 f_{bc}, \quad (4.6)$$

- pour une section en T :

$$N_{u,R} (d - d') - M_{As,R} \leq [0,337 - (0,81 d' / h)] b_o h^2 f_{bc}. \quad (4.7)$$

Avec: $N_{u,R} = N_u - (b - b_o) h_o f_{bc}$;

$$M_{As,R} = M_{As} - (b - b_o) h_o (d - h_o / 2) f_{bc},$$

Où : $M_{As} = N_u e_A$, représentant le moment par rapport au centre de gravité des armatures inférieures.

La figure 4.3 représente une section de forme quelconque soumise à un effort de compression N_u passant par le centre de pression C . Soit la section est partiellement comprimée.

On notera :

N_b , la résultante des forces de compression dans le béton;

N_s' , la résultante des forces de compression dans les armatures comprimées A_s' pour lesquelles la contrainte est σ_s' , alors

$$N_s' = A_s' \sigma_s' ;$$

N_s , la résultante des forces de traction dans les armatures tendues A_s pour lesquelles la contrainte est σ_s , alors :

$$N_s = A_s \sigma_s ;$$

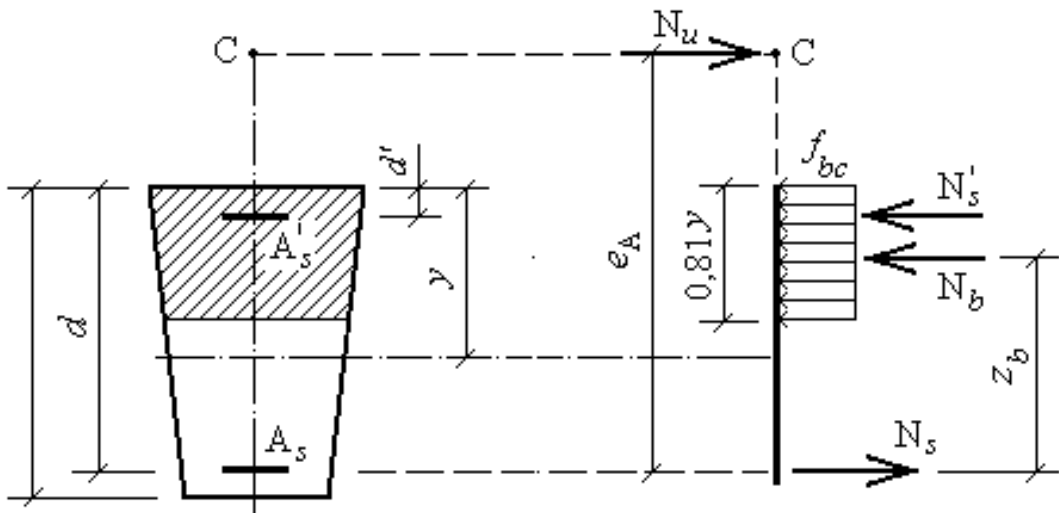


Fig. 4.3

D'après le schéma, on peut écrire une équation :

$$N_u + N_s - N_b - N_s' = N_u + A_s \sigma_s - N_b - A_s' \sigma_s' = 0. \quad (4.8)$$

Pour la deuxième équation on prend les moments par rapport au centre de gravité des armatures inférieures :

$$N_u e_A - N_s'(d - d') - z_b N_b = N_u e_A - A_s' \sigma_s' (d - d') - z_b N_b = 0. \quad (4.9)$$

e_A , la distance du centre de pression C au centre de gravité des armatures tendues ;

z_b , la distance entre N_b et N_s .

Si on pose : $N_u + A_s \sigma_s = A_{1s} \sigma_s$ et $N_u e_A = M_{As}$,

les équations précédentes s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} A_{1s} \sigma_s - N_b - A'_s \sigma'_s &= 0 ; \\ M_{As} - A'_s \sigma'_s (d - d') - z_b N_b &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Pour une section rectangulaire on a :

$$N_b = 0,81 \alpha b d f_{bc}, \quad z_b = (1 - 0,416 \alpha) d.$$

On peut remarquer que ces nouvelles équations sont celles que l'on obtiendrait pour une section ayant les mêmes dimensions que la section donnée, qui serait soumise à la flexion simple (sous l'action du moment fictif M_{As}) et dont les armatures A'_s et A_{1s} seraient telles que les contraintes dans cette section soient les mêmes que dans la section donnée.

Les valeurs de A'_s et de A_{1s} peuvent être déterminées en calculant (par les méthodes indiquées pour des éléments fléchis) les armatures d'une section dont les dimensions sont connues et qui est soumise, à la flexion simple par le moment fictif $M_{As} = N_u e_A$ égal au moment par rapport aux armatures tendues. A'_s et A_{1s} étant connues, on aura pour la section donnée soumise à la flexion composée :

$$A'_s ; \quad A_s = A_{1s} - (N_u / \sigma_s). \quad (4.11)$$

Par conséquent, pour calculer à la flexion composée une section partiellement comprimée, soumise à un effort normal de compression N_u (effort excentré appliqué en C), on calculera la section à la flexion simple sous l'effet d'un moment égal au moment de l'effort normal par rapport au centre de gravité des armatures tendues. La valeur des armatures comprimées dans la section étudiée sera égale à la valeur des armatures comprimées ainsi calculées (cette valeur pouvant d'ailleurs être nulle) et la valeur des armatures tendues dans la section étudiée sera égale à la valeur des armatures ainsi calculées, diminuées de N_u / σ_s .

Si l'effort normal N_u est un effort de traction, on montrerait, de la même manière que ci-dessus, que l'on a :

$$A'_s ; \quad A_s = A_{1s} + (N_u / \sigma_s). \quad (4.12)$$

Si la formule (4.11) conduit pour A_s à une valeur négative (lorsque N_u est un effort de compression), on la prend $A_s = 0$.

On distingue deux cas suivants :

1) Si $A_s = 0$ et $A_s' = 0$. Aucune armature n'est théoriquement nécessaire pour armer la section. L'effort normal N_u est alors équilibré par le béton seul, cela signifie, que $N_s = N_s' = 0$ et que N_u est directement opposé à N_b . Comme il est néanmoins indispensable de prévoir dans la section des armatures minimales, on prendra pour $A_s + A_s'$ une valeur au moins égale à la plus grande des deux limites suivantes :

- 4 cm^2 par mètre de longueur de parement mesuré perpendiculairement à la direction des armatures ;
- 0,2 % de B (B est la section du béton comprimé).

2) Si $A_s = 0$ et $A_s' \neq 0$. L'effort normal est alors équilibré par le béton comprimé (N_b) et par les armatures comprimées (N_s'), cela signifie que $N_s = 0$. Dans ce cas les équations d'équilibre (4.8) et (4.9) deviennent :

$$\begin{aligned} N_u - N_b - A_s' \sigma_s' &= 0; \\ N_u e_A - A_s' \sigma_s' (d - d') - z_b N_b &= 0. \end{aligned}$$

On tire $A_s' \sigma_s'$ de la première équation et porte la valeur obtenue dans la deuxième, d'où :

$$N_u (e_A + d' - d) + N_b (d - d' - z_b) = 0.$$

Cette équation permet de calculer la valeur y .

En effet, si on suppose qu'il s'agisse d'une section rectangulaire, on a :

$$N_b = 0,8 f_{bc} b y, \quad z_b = d - 0,4 y,$$

(dans ces équations on a remplacé 0,81 et 0,416 par 0,8 et 0,4 comme pour le cas de la flexion simple) ce qui donne:

$$0,4 y^2 - d' y + [N_u (e_A + d' - d) / 0,8 f_{bc} b] = 0. \quad (4.13)$$

Après avoir déterminé la distance y , par résolution de l'équation (4.13), on en déduit $\alpha = y / d$ et par la suite, l'allongement e_s' et la contrainte σ_s' des armatures comprimées. Ensuite on calcule :

$$A'_s = \frac{N_u - 0,8 f_{bc} b y}{\sigma'_s}; \quad A_s = 0.$$

(Il faudra néanmoins prévoir des armatures longitudinales tendues comme barres de montage pour maintenir les armatures transversales).

Exemple 4.1. Déterminer les armatures de la section rectangulaire représentée sur la figure 4.4 et soumise à un effort normal de compression $N_u = 600 \text{ kN}$, ainsi qu'à un moment de flexion $M_u = 240 \text{ kNm}$, rapportés au centre de gravité G de la section du béton. Les armatures sont en acier $FeE 500$, type 1, donc $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 500 / 1,15 = 435 \text{ MPa}$, et on a pour le béton $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$, donc, $f_{bc} = 0,85 f_{c28} / \gamma_b = 14,2 \text{ MPa}$.

Solution. La distance du centre de gravité G au centre de pression C est égale à (fig. 4.4):

$$e = M_u / N_u = 240 / 600 = 0,4 \text{ m}.$$

Donc le centre de pression C se trouve en dehors de la zone limitée par les armatures, en effet : $e = 0,4 \text{ m} > (0,5 h - d') = (0,5 \times 0,5 - 0,04) = 0,21 \text{ m}$.

Alors, la section est partiellement comprimée. Le moment des efforts extérieurs par rapport au centre de gravité des armatures tendues est :

$$M_{As} = M_u + N_u (0,5 h - c) = 240 + 600 (0,5 \times 0,5 - 0,05) = 360 \text{ kNm}$$

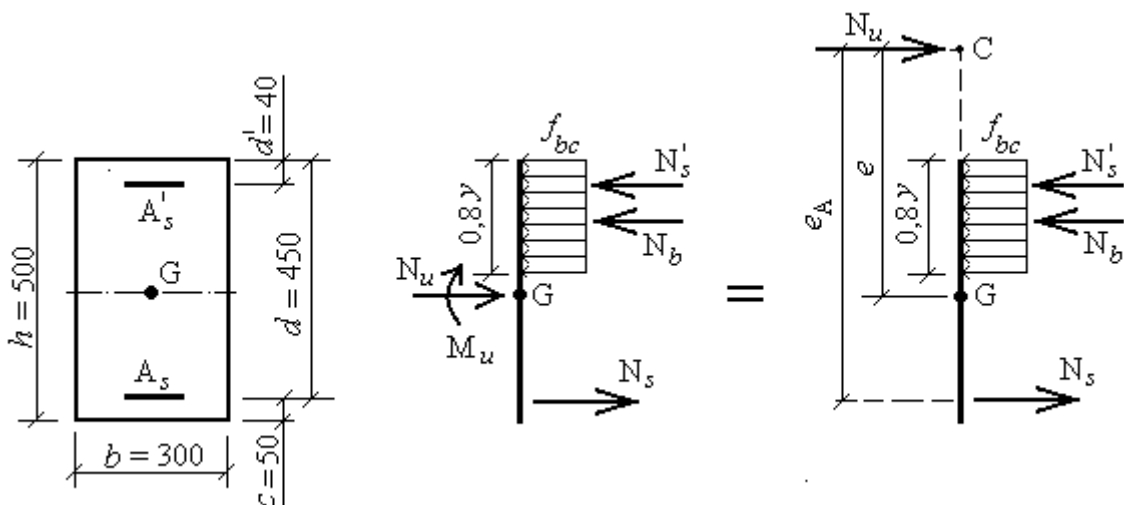


Fig. 4.4

Comme pour une section soumise à une flexion simple (le moment étant égal à M_{As}), on détermine le coefficient μ :

$$\mu = \frac{M_{As}}{f_{bc} b d^2} = \frac{360 \cdot 10^6}{14,2 \cdot 300 \cdot 450^2} = 0,417 > \mu_l.$$

Donc les armatures comprimées sont nécessaires et pour les calculer, on utilise les formules des éléments fléchis doublement armés.

On prend (tableau A.1) : $\mu_l = 0,372$, $\beta_l = 0,753$.

Comme $\varepsilon_s = \varepsilon_l$, on a $\sigma_s = 435 \text{ MPa}$, et comme le diagramme des déformations passe par le pivot B, alors $\sigma'_s = 435 \text{ MPa}$.

Avec ces valeurs on trouve :

$$M_1^f = \mu_l f_{bc} b d^2 = 0,372 \times 14,2 \times 300 \times 450^2 = 320,9 \times 10^6 \text{ N mm},$$

$$M_2^f = M_{As} - M_1^f = 360 - 320,9 = 39,1 \text{ kNm};$$

$$A'_s = \frac{M_2^f}{(d - d') \sigma'_s} = \frac{39,1 \cdot 10^6}{(450 - 40) 435} = 219 \text{ mm}^2;$$

$$A_{1s} = \frac{M_1^f}{\beta_l d \sigma_s} + A'_s \frac{\sigma'_s}{\sigma_s} = \frac{320,9 \cdot 10^6}{0,753 \cdot 450 \cdot 435} + 219 = 2396 \text{ mm}^2.$$

Les mêmes résultats (calcul des A_s et A'_s) peuvent être obtenus en utilisant les formules (4.8) et (4.9), c'est-à-dire sans calcul préalable des moments M_1^f et M_2^f . En effet on a :

$$A'_s = \frac{N_u e_A - \mu_l f_{bc} b d^2}{(d - d') \sigma'_s} = \frac{600 \cdot 10^3 \cdot 600 - 0,372 \cdot 14,2 \cdot 300 \cdot 450^2}{(450 - 40) 435} =$$

$$= 219 \text{ mm}^2.$$

$$A_{1s} = \frac{0,8 \alpha_l f_{bc} b d + A'_s \sigma'_s}{\sigma_s} = \frac{0,8 \cdot 0,617 \cdot 14,2 \cdot 300 \cdot 450 + 219 \cdot 435}{435} =$$

$$= 2394 \text{ mm}^2 \approx 2396 \text{ mm}^2.$$

Donc pour les armatures de la section étudiée on a : $A'_s = 219 \text{ mm}^2$;

$$A_s = A_{1s} - N_u / \sigma_s = 2396 - (600 \times 10^3) / 435 = 1017 \text{ mm}^2.$$

On prend : pour la zone tendue $3\emptyset 22$ avec $A_s = 1140 \text{ mm}^2$.

Dans la zone comprimée (d'après les exigences constructives) :

$$A'_s \geq 0,5 \times 4 \text{ cm}^2 (2h + 2b) = 0,5 \times 4 (2 \times 0,5 + 2 \times 0,3) = 3,2 \text{ cm}^2.$$

On prend : $3\emptyset 12$ avec $A_s = 339 \text{ mm}^2$.

Exemple 4.2. Déterminer les armatures de la section rectangulaire représentée sur la figure 4.4 et soumise à un effort normal de compression $N_u = 800 \text{ kN}$, ainsi qu'à un moment $M_u = 120 \text{ kNm}$ rapportés au centre de gravité G de la section en béton. Les armatures sont en acier $Fe E 400$, type 1, $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa}$, pour le béton on a $f_{bc} = 14,2 \text{ MPa}$ ($f_{c28} = 25 \text{ MPa}$).

Solution. Dans ce cas on a :

$$e = M_u / N_u = 120 / 800 = 0,15 \text{ m} < (0,5 h - d') = 0,21 \text{ m}.$$

Donc le centre de pression C se trouve entre les armatures. Il faut vérifier si la section est partiellement comprimée. Le moment des efforts extérieurs rapporté au centre des armatures tendues est égal à :

$$M_{As} = M_u + N_u (0,5 h - c) = 120 + 800 (0,5 \times 0,5 - 0,05) = 280 \text{ kNm}.$$

Pour une section rectangulaire on vérifie la condition (4.6) ;

$$N_u (d - d') - M_{As} < [0,337 - (0,81 d' / h)] b h^2 f_{bc} ;$$

$$N_u (d - d') - M_{As} = 800 (0,45 - 0,05) - 280 = 40 \text{ kNm} ;$$

$$[0,337 - (0,81 d' / h)] b h^2 f_{bc} =$$

$$= [0,337 - (0,81 \times 0,04 / 0,5)] 300 \times 500^2 \times 14,2 = 289,9 \times 10^6 \text{ Nmm}.$$

Comme $N_u (d - d') - M_{As} = 40 \text{ kNm} < 289,9 \text{ kNm}$, la section est partiellement comprimée. Alors on calcule le coefficient :

$$\mu = \frac{M_{As}}{f_{bc} b d^2} = \frac{280 \cdot 10^6}{14,2 \cdot 300 \cdot 450^2} = 0,324.$$

Vu que $\mu = 0,324 < \mu_l = 0,392$, les armatures comprimées ne sont pas nécessaires, donc on pose $A_s' = 0$. La contrainte des armatures tendues (pour $\mu < \mu_l$): $\sigma_s = 348 \text{ MPa}$. Pour $\mu = 0,324$, on prend (sur le tableau A.3) $\beta = 0,797$, et on calcule :

$$A_{1s} = \frac{M_{As}}{\beta d \sigma_s} = \frac{280 \cdot 10^6}{0,797 \cdot 450 \cdot 348} = 2243,4 \text{ mm}^2.$$

On aura donc pour les armatures de la section étudiée : $A_s' = 0$;

$$A_s = A_{1s} - N_u / \sigma_s = 2243,4 - (800 \times 10^3) / 348 < 0.$$

C'est-à-dire qu'on a définitivement $A_s' = A_s = 0$.

Comme il est néanmoins indispensable de prévoir dans la section des armatures minimales, on prendra :

$$A_s + A_s' \geq 4 \text{ cm}^2 (2 h + 2 b) = 4 (2 \times 0,5 + 2 \times 0,3) = 6,4 \text{ cm}^2 ;$$

$$A_s + A_s' \geq 0,002 B = 0,002 \times 500 \times 300 = 300 \text{ mm}^2 = 3,0 \text{ cm}^2.$$

On prend pour la zone tendue et comprimée 3 $\emptyset 12 \text{ mm}$ avec $A_s = A_s' = 3,39 \text{ cm}^2$.

La quantité totale des armatures : $A_s + A_s' = 2 \times 3,39 = 6,78 \text{ cm}^2$.

Exemple 4.3. Déterminer les armatures de la section rectangulaire représentée sur la figure 4.5 et soumise à un effort normal de traction $N_u = 150 \text{ kN}$, ainsi qu'à un moment $M_u = 100 \text{ kNm}$, rapportés au centre de gravité G de la section en béton. Béton $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$, armature $Fe E 400$.

Solution. La distance de centre de gravité de la section au point d'application de l'effort N_u (fig. 4.5) est égale à :

$$e = M_u / N_u = 100 / 150 = 0,666 \text{ m} > (h / 2) - c = (0,5 / 2) - 0,04 = 0,21 \text{ m},$$

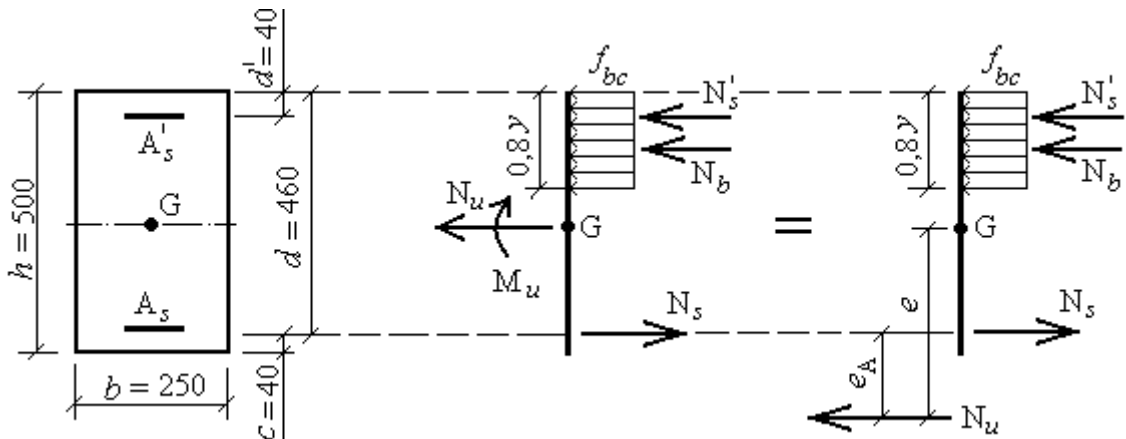


Fig. 4.5

donc, le centre d'application de l'effort C se trouve en dehors de la zone limitée par les armatures, c'est-à-dire que la section est partiellement comprimée.

Le moment des efforts extérieurs rapporté au centre de gravité des armatures tendues : $M_{As} = M_u - N_u [(h/2) - c] = 100 - 150 [(0,5/2) - 0,04] = 68,5 \text{ kNm}$.

Alors on peut calculer :

$$\mu = \frac{M_{As}}{f_{bc} b d^2} = \frac{68,5 \cdot 10^6}{14,2 \cdot 250 \cdot 460^2} = 0,091 < \mu_l = 0,392.$$

Donc, les armatures comprimées ne sont pas nécessaires ($A_s' = 0$). Pour $\mu = 0,091$, on lit sur le tableau A.1 : $\sigma_s = 348 \text{ MPa}$ et sur le tableau A.3 : $\beta = 0,952$. Avec ces valeurs on peut calculer la section de l'armature A_s :

$$A_{1s} = \frac{M_{As}}{\beta d \sigma_s} = \frac{68,5 \cdot 10^6}{0,952 \cdot 460 \cdot 348} = 449,5 \text{ mm}^2.$$

On aura donc pour les armatures de la section étudiée : $A_s' = 0$;

$$A_s = A_{1s} + N_u / \sigma_s = 449,5 + (150 \times 10^3) / 348 = 880,5 \text{ mm}^2.$$

On prend pour la zone comprimée (d'après les exigences constructives) :

$$A_s' \geq 0,5 \times 4 \text{ cm}^2 (2h + 2b) = 0,5 \times 4 (2 \times 0,5 + 2 \times 0,25) = 3 \text{ cm}^2.$$

Donc, 2 $\varnothing 14$ avec $A_s' = 308 \text{ mm}^2$. Pour la zone tendue on prend (d'après les résultats de calcul) : 2 $\varnothing 25$ avec $A_s = 982 \text{ mm}^2$.

(Notons que pour $\mu = 0,091 < 0,104$, les déformations du béton de la zone comprimé $\varepsilon_{bc} < 2\text{‰}$, donc $\sigma_{bc} < f_{bc}$. D'autre côté, la précision de calcul donne les résultats proches. En effet, on trouve $\sigma_{bc} = 12,7 \text{ MPa}$, $\mu = 0,101$, $\beta = 0,952$ et les sections d'armature exigées : $A_{1s} = 451,8 \text{ mm}^2$; $A_s = 882,8 \text{ mm}^2$).

Exemple 4.4. On demande de déterminer les armatures pour la section rectangulaire représentée sur la figure 4.6. La section est soumise à un effort normal de traction $N_u = 200 \text{ kN}$ et à un moment de flexion $M_u = 30 \text{ kNm}$, rapportés au centre de gravité G de la section du béton seul. Les armatures sont en acier $FeE 235$, $\gamma_s = 1,15$, $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 235 / 1,15 = 204 \text{ MPa}$. Le béton a pour la résistance caractéristique $f_{c28} = 16 \text{ MPa}$, $f_{t28} = 1,56 \text{ MPa}$, la résistance de calcul : $f_{bc} = 0,85 f_{c28} / \theta \gamma_b = 0,85 \times 16 / 1,5 = 9,1 \text{ MPa}$ (avec $\theta = 1,0$).

Solution. La distance "e" est égale à :

$$M_u / N_u = 30 / 200 = 0,15 \text{ m} < (h / 2) - c = (0,5 / 2) - 0,04 = 0,21 \text{ m}.$$

Donc le point C se trouve entre les armatures et la section est entièrement tendue. La distance e_A du centre de pression C au centre de gravité des armatures tendue : $e_A = (h / 2) - c - e = (0,5 / 2) - 0,04 - 0,15 = 0,06 \text{ m}$.

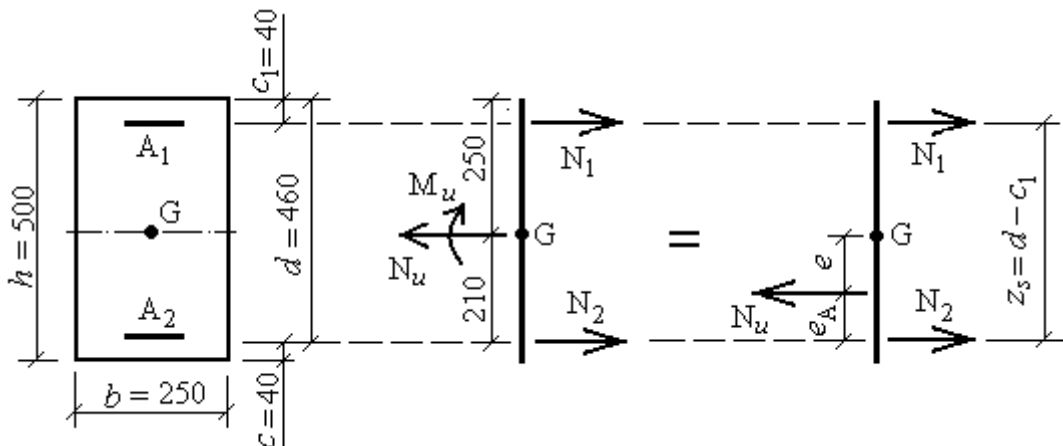


Fig. 4.6

D'après les formules (4.3) on calcule [en prenant les contraintes des armatures $\sigma_{s1} = \sigma_{s2} = \sigma_{s10} = 204 \text{ MPa}$, et les distances $e_{a2} = e_A = 60 \text{ mm}$, $e_{a1} = (h / 2) - c_1 + e = (0,5 / 2) - 0,04 + 0,15 = 0,36 \text{ m} = 360 \text{ mm}$, (fig. 4.2)] :

$$A_1 = \frac{N_u e_{a2}}{(d - c_1) \sigma_{s10}} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 60}{(460 - 40) 204} = 140 \text{ mm}^2.$$

$$A_2 = \frac{N_u e_{a1}}{(d - c_1) \sigma_{s10}} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 360}{(460 - 40) 204} = 840 \text{ mm}^2.$$

On prend $2\text{Ø} 12$ avec $A_1 = 226 \text{ mm}^2$ et $2\text{Ø} 25$ avec $A_2 = 982 \text{ mm}^2$.

D'après la condition de non-fragilité il faut que (formule 4.5) :

$$A_1 + A_2 \geq (b \times h) f_{t28} / f_e = (500 \times 250) 1,56 / 235 = 829,8 \text{ mm}^2.$$

La condition est satisfaite, en effet : $226 + 982 = 1208 \text{ mm}^2 > 829,8 \text{ mm}^2$.

4.3. Calcul des sections entièrement comprimées

Pour une section entièrement comprimée (les droites de déformation pivotent autour du point C) on a que les déformations du béton sont :

sur la fibre la plus comprimée $2 \text{ ‰} \leq \varepsilon_{bc} \leq 3,5 \text{ ‰}$, donc la contrainte du béton $\sigma_{bc} = f_{bc}$;

sur la fibre la moins comprimée $0 \leq \varepsilon_{bc} \leq 2 \text{ ‰}$, donc $\sigma_{bc} \leq f_{bc}$.

Pour une section rectangulaire on peut envisager deux cas extrêmes suivants :

1) L'effort normal est tel que la déformation du béton ε_{bc} sur une fibre extrême la plus comprimée est égale à $3,5 \text{ ‰}$ et est égale à zéro sur une fibre moins comprimée (fig. 4.7,a). Dans ce cas le calcul à l'aide des formules de la figure 1.4 (voir au-dessus) donne : $F_b = 0,81 f_{bc} b h$ et l'excentricité d'application de cet effort : $e = 0,084 h$. Ici $0,81 = \psi_1$ est le coefficient de remplissage du diagramme parabole-rectangle.

2) L'effort normal est appliqué au centre de gravité de la section, le raccourcissement du béton est égal à 2 ‰ sur toute la hauteur de la section (fig. 4.7,b). Dans ce cas $F_b = f_{bc} b h$.

Pour une section entièrement comprimée dans laquelle les déformations des fibres extrêmes du béton sont $\varepsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_{bc} = 0$ on peut rencontrer les cas suivants :

- si $N_u \leq 0,81 f_{bc} b h$ et $e \leq 0,084 h$, la section est entièrement comprimée, mais l'état-limite ultime n'est pas atteint ; on applique dans ce cas une section minimale d'armature égale à 4 cm^2 par mètre linéaire de parement ;

- si $N_u > 0,81 f_{bc} b h$ et $e \leq 0,084 h$, la section est entièrement comprimée, l'état-limite ultime est atteint, la section des armatures est prise d'après le calcul;

- si $N_u < 0,81 f_{bc} b h$ et $e > 0,084 h$, l'état-limite n'est pas atteint, la déformation du béton n'atteignant pas $3,5 \text{ ‰}$, et la résultante des forces de compression dans le béton n'est plus à $0,416 h$ de la fibre extrême et la valeur $e \neq 0,084$.

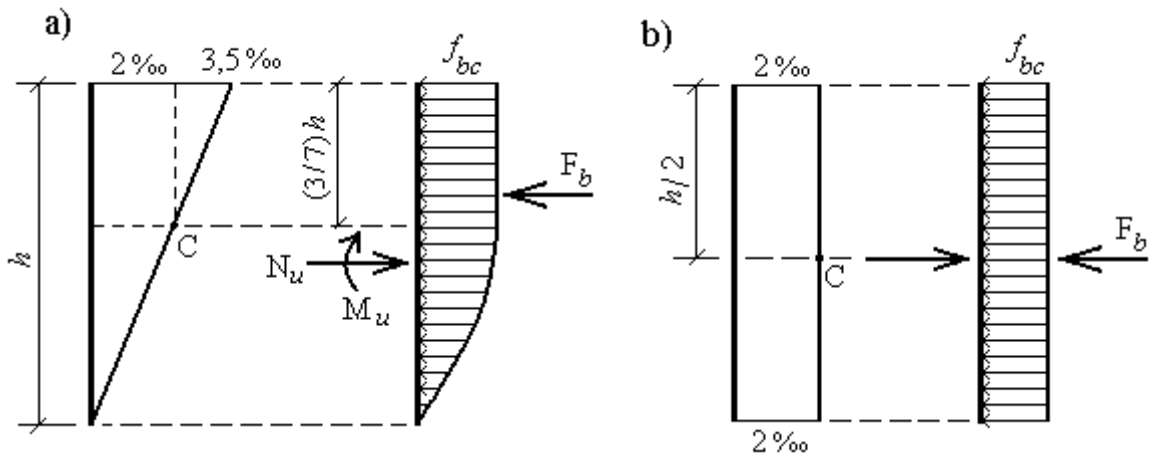


Fig. 4.7

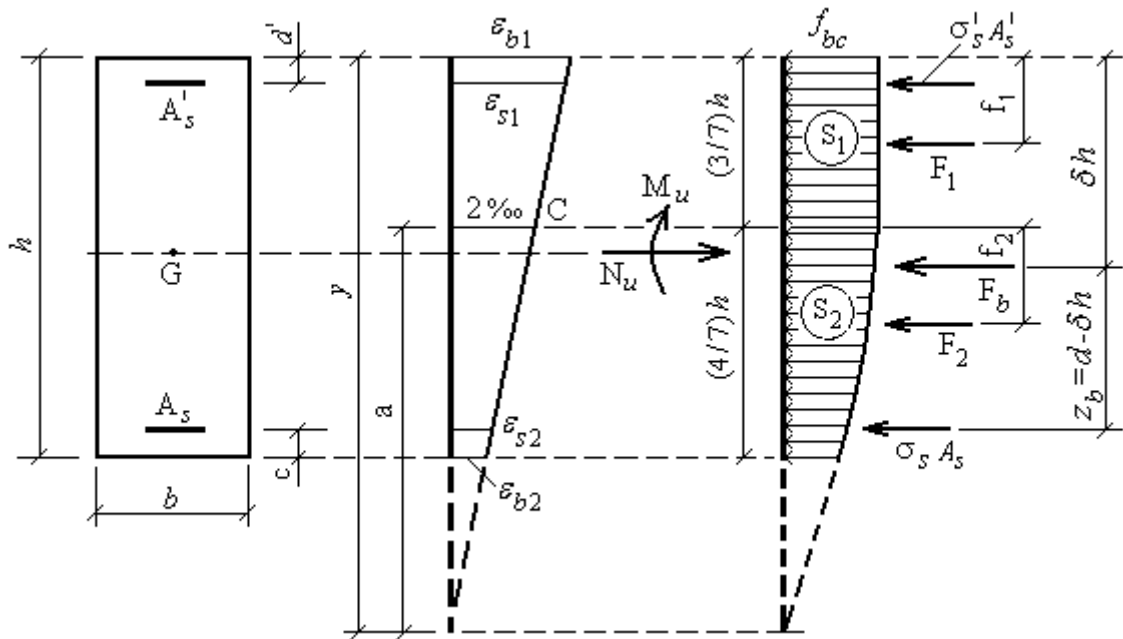


Fig. 4.8

Considérons la section rectangulaire présentée sur la figure 4.8 et supposons que cette section soit entièrement comprimée; dans ce cas le diagramme des déformations passe par le point C et on doit utiliser le diagramme parabole-rectangle. Avec les notations indiquées sur la figure 4.8 et avec les données de la figure 1.4, on trouve (pour la partie rectangulaire de diagramme) :

$$S_1 = (3h/7)f_{bc}; \quad f_1 = 3h/14.$$

D'après les formules données par la figure 1.4, et avec $s = f_{bc}$, on a (pour la partie curviligne de diagramme) :

$$a_1 = 4 h / 7, \quad a = y - (3 h / 7).$$

Alors:

$$\begin{aligned} S_2 &= s a_1 \left[1 - \frac{a_1^2}{3 a^2} \right] = f_{bc} \frac{4h}{7} \left[1 - \frac{16h^2 / 49}{3[y - (3h/7)]^2} \right] = \\ &= f_{bc} h \left[\frac{4}{7} - \frac{3,0476}{[(7y/h) - 3]^2} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{3 a_1}{4} \left[1 - \frac{s a_1}{3 S_2} \right] = \frac{3}{4} \cdot \frac{4h}{7} \left[1 - \frac{f_{bc} 4h}{21 S_2} \right] = \\ &= \frac{3 h}{7} - \frac{4 h^2 f_{bc}}{49 S_2}. \end{aligned}$$

On pose :

$$\psi_1 = 1 - \frac{3,0476}{[(7y/h) - 3]^2} = 1 - \chi; \quad \chi = \frac{3,05}{[(7y/h) - 3]^2}.$$

Comme, dans une section entièrement comprimée, y varie de h à ∞ . Alors on a : $0,8095 \leq \psi_1 \leq 1,0$ (pour simplifier, on prend : $0,81 \leq \psi_1 < 1,0$), et $S_2 = h f_{bc} [\psi_1 - (3/7)]$.

On désigne par :

F_1 , la résultante des forces de compression dans le béton pour la partie rectangulaire du diagramme ;

F_2 , la résultante des forces de compression dans le béton pour la partie parabolique du diagramme ;

$F_b = F_1 + F_2$, la résultante de compression dans le béton ;

δh , la distance de F_b à l'arête supérieure de la section.

Alors on a :

$$F_1 = b S_1 = (3/7) f_{bc} b h; \quad F_2 = b S_2 = [\psi_1 - (3/7)] f_{bc} b h;$$

$$F_b = F_1 + F_2 = (3/7) f_{bc} b h + [\psi_1 - (3/7)] f_{bc} b h = \psi_1 f_{bc} b h.$$

Le moment des efforts intérieurs par rapport à la fibre la plus comprimée de la section :

$$F_b \delta h = F_1 f_1 + F_2 [f_2 + (3/7) h] \text{ ou encore :}$$

$$\begin{aligned} \psi_1 f_{bc} b \delta h^2 &= (3/7) f_{bc} b h (3 h / 14) + \\ &+ (\psi_1 - 3/7) b h f_{bc} \left[\frac{3 h}{7} - \frac{4 f_{bc} h^2}{49 [\psi_1 - (3/7)] f_{bc} h} + \frac{3 h}{7} \right], \end{aligned}$$

d'où $\delta = (6/7) - 35/98 \psi_1 = 0,8571 - 0,3571 / \psi_1$.

Le moment de la résultante des forces de compression dans le béton par rapport au centre de gravité des armatures inférieures a pour valeur :

$$M_b = - F_b (d - \delta h) = - \psi_1 f_{bc} b h [d - (0,8571 - 0,3571 / \psi_1) h] ;$$

$$M_b = - [0,3571 + (d/h - 0,8571) \psi_1] f_{bc} b h^2 \text{ ou encore}$$

$$M_b = [d/h - 0,5 + \chi (6/7 - d/h)] f_{bc} b h^2, \text{ avec } \chi = 1 - \psi_1.$$

Si on désigne par :

σ_s' , la contrainte des armatures les plus comprimées A_s' ;

σ_s , la contrainte des armatures les moins comprimées A_s ;

M_{As} , le moment, par rapport au centre de gravité des armatures inférieures, provoqué par des forces extérieures situées à gauche de la section. Avec ces notations on peut écrire :

$$N_u - F_1 - F_2 - A_s' \sigma_s' - A_s \sigma_s = 0,$$

$$\text{Ou encore } N_u - \psi_1 f_{bc} b h - A_s' \sigma_s' - A_s \sigma_s = 0 ; \quad (4.15)$$

$$M_{As} + M_b - A_s' \sigma_s' (d - d') = \quad (4.16)$$

$$= M_{As} - [0,3571 + (d/h - 0,8571) \psi_1] f_{bc} b h^2 - A_s' \sigma_s' (d - d') = 0 ;$$

On suppose que les armatures sont constituées par des aciers dont le diagramme des déformations présente un palier et qu'on se trouve dans le cas où $\sigma_s' = \sigma_s$. Il est intéressant, au point de vue économique, de rechercher pour A_s' et A_s des valeurs telles que la somme $A_s' + A_s$ ou encore $(A_s' + A_s) \sigma_s$, est minimale. La projection des efforts sur l'axe longitudinal donne : $(A_s' \sigma_s' + A_s \sigma_s) = N_u - \psi_1 f_{bc} b h$. Alors, la partie droite sera minimale lorsque ψ_1 sera maximal, donc pour $\psi_1 = 1$, ce qui correspond à $y = \infty$.

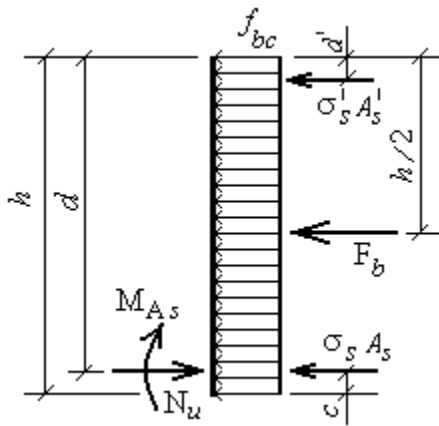


Fig.4.9

On admet, à titre d'approximation, que ce résultat est également valable pour les aciers de type 2. Si $y = \infty$ toutes les fibres de la section ont un raccourcissement égal à 2‰ (fig.4.9). Soit σ_{s2} est la contrainte pour le raccourcissement de 2‰.

Avec $\psi_1 = 1$, ($\chi = 0$) les contraintes $\sigma'_s = \sigma_s = \sigma_{s2}$, alors les équations de $\sum N$ et de $\sum M$ seront :

$$N_u - f_{bc} b h - A'_s \sigma_{s2} - A_s \sigma_{s2} = 0;$$

$$M_{As} - (d - 0,5 h) f_{bc} b h - A'_s \sigma_{s2} (d - d') = 0.$$

De ces deux équations on tire :

$$A'_s = \frac{M_{As} - (d - 0,5 h) f_{bc} b h}{(d - d') \sigma_{s2}}; \quad (4.17)$$

$$A_s = \frac{N_u - f_{bc} b h}{\sigma_{s2}} - A'_s \quad (4.18)$$

Pour que les résultats obtenus aient un sens il faut que l'on ait $A'_s \geq 0$ et $A_s \geq 0$. Vu que A'_s , la section des armatures situées du côté le plus comprimé est supérieure à A_s , il suffit donc de chercher la condition pour que l'on ait $A_s \geq 0$. Cette condition s'écrit (d'après les formules 4.17 et 4.18) :

$$A_s = \frac{N_u - f_{bc} b h}{\sigma_{s2}} - \frac{M_{As} - (d - 0,5 h) f_{bc} b h}{(d - d') \sigma_{s2}} \geq 0.$$

$$\text{Soit } N_u (d - d') - M_{As} \geq (0,5 h - d') f_{bc} b h. \quad (4.19)$$

Donc si cette condition est satisfaite, c'est-à-dire qu'on a besoin des armatures A'_s et A_s , on calcule les sections des armatures par les formules 4.17 et 4.18.

Si on suppose que la condition (4.19) n'est pas remplie, c'est-à-dire que l'on ait :

$$N_u (d - d') - M_{As} < (0,5 h - d') f_{bc} b h.$$

Il en résulterait $A_s < 0$, c'est-à-dire que l'armature A_s est inutile. Dans ce cas on prend $A_s = 0$, alors les conditions de la résistance (4.15) et (4.16) seront :

$$N_u - \psi_1 f_{bc} b h - A_s' \sigma_s' = 0 ;$$

$$M_{As} - [0,3571 + (d/h - 0,8571) \psi_1] f_{bc} b h^2 - A_s' \sigma_s' (d - d') = 0.$$

En éliminant $A_s' \sigma_s'$ entre les deux équations, on obtient :

$$\psi_1 = \frac{0,3571 + [N_u (d - d') - M_{As}] / f_{bc} b h^2}{0,8571 - (d'/h)} . \quad (4.20)$$

On a déjà montré que pour qu'une section rectangulaire qui est entièrement comprimée, on devait avoir:

$$0,81 \leq \psi_1 \leq 1,0 \quad \text{ou encore :}$$

$$0,81 \leq \frac{0,3571 + [N_u (d - d') - M_{As}] / f_{bc} b h^2}{0,8571 - (d'/h)} \leq 1,0 .$$

Ce qui donne :

$$(0,337 h - 0,81 d') f_{bc} b h \leq N_u (d - d') - M_{As} \leq (0,5 h - d') f_{bc} b h. \quad (4.21)$$

Cette condition caractérise le travail de la section :

- la section est entièrement comprimée, lorsque :

$$(0,337 h - 0,81 d') f_{bc} b h \leq N_u (d - d') - M_{As}. \quad (4.22)$$

- on n'a pas besoin d'armature moins comprimée ($A_s < 0$), lorsque :

$$N_u (d - d') - M_{As} \leq (0,5 h - d') f_{bc} b h. \quad (4.22')$$

Pour les armatures supérieures la contrainte σ_s' est déterminée en considérant les triangles semblables sur la figure 4.8, ce qui donne :

$$\frac{1000 \varepsilon_s'}{2} = \frac{y - d'}{y - (3h/7)} .$$

Soit : $1000 \varepsilon_s' = 2 (y - d') / [y - (3 h / 7)]$.

Comme :

$$\psi_1 = 1 - \frac{3,0476}{[(7y/h) - 3]^2} \quad \text{et} \quad y = \frac{h}{7} \left[3 + \frac{1,7457}{\sqrt{1 - \psi_1}} \right].$$

Alors on trouve :

$$1000 \varepsilon_s' = 2 + (3,437 - 8,019 d'/h) \sqrt{1 - \psi_1} . \quad (4.23)$$

Après avoir déterminé ε_s' , on déduit σ_s' d'après le diagramme des déformations et on calcule l'armature A_s' (armature $A_s = 0$) :

$$A_s' = \frac{N_u - \psi_1 f_{bc} b h}{\sigma_s'} ; \quad A_s = 0. \quad (4.24)$$

Donc, si la condition (4.21) est satisfaite (c'est-à-dire qu'une section de l'élément est entièrement comprimée, mais la section des armatures situées du côté le moins comprimé $A_s = 0$), on détermine le coefficient ψ_1 (formule 4.20), ensuite la déformation de l'acier $1000 \varepsilon_s'$ (formule 4.23) et la contrainte des armatures σ_s' et définitivement on calcule la section des armatures A_s' (formule 4.24).

Exemple 4.5. Déterminer les armatures de la section rectangulaire représentée sur la figure 4.10. La section est soumise à un effort normal de compression $N_u = 2000 \text{ kN}$, ainsi qu'à un moment $M_u = 80 \text{ kNm}$, rapportés au centre de gravité G de la section du béton. Les armatures sont en acier $Fe E 235$ ($\sigma_s = f_e / \gamma_s = 235 / 1,15 = 204 \text{ MPa}$) et le béton a la résistance caractéristique $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$ ($f_{bc} = 0,85 f_{c28} / \gamma_b = 0,85 \times 20 / 1,5 = 11,3 \text{ MPa}$).

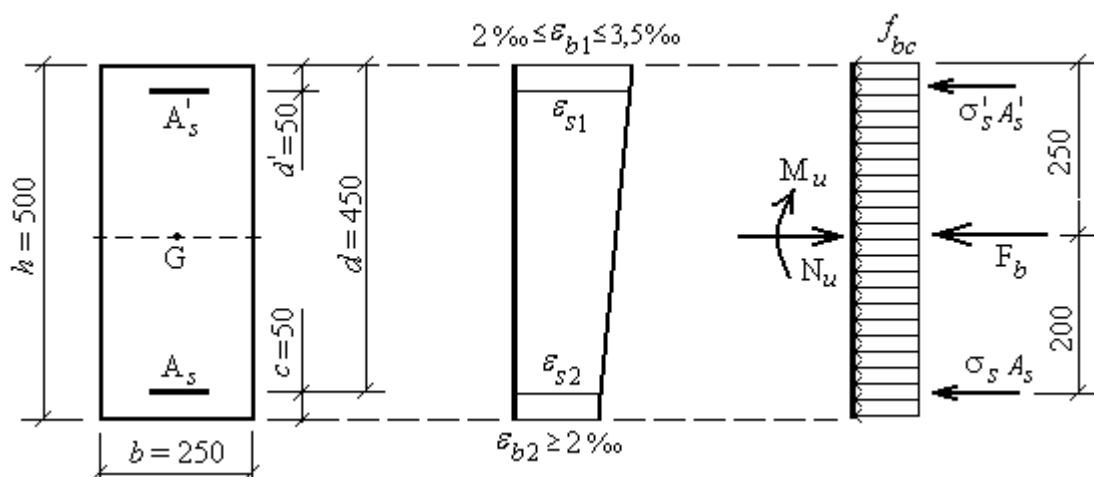


Fig. 4.10

Solution. L'excentricité d'application des efforts est égale à :

$$e = M_u / N_u = 80 / 2000 = 0,04 \text{ m.}$$

Donc le centre de pression C se trouve à l'intérieur du segment limité par des armatures. On doit vérifier si la section est entièrement comprimée (d'après la condition 4.22):

$$(0,337 h - 0,81 d') f_{bc} b h < N_u (d - d') - M_{As}$$

Le moment des efforts extérieurs rapportés au centre de l'armature inférieure:

$$M_{As} = M_u + N_u (0,5 h - c) = 80 + 2000 (0,5 \times 0,5 - 0,05) = 480 \text{ kN m.}$$

Alors la partie droite de l'inégalité 4.22 est:

$$N_u (d - d') - M_{As} = 2000 (0,45 - 0,05) - 480 = 320 \text{ kN m,}$$

et la partie gauche :

$$\begin{aligned} (0,337 h - 0,81 d') f_{bc} b h &= (0,337 \times 500 - 0,81 \times 50) 11,3 \times 250 \times 500 = \\ &= 180,8 \times 10^6 \text{ N mm} = 180,8 \text{ kN m.} \end{aligned}$$

Donc on a que la condition est satisfaite avec $180,8 \text{ kN m} < 320 \text{ kN m}$, c'est-à-dire que la section est entièrement comprimée.

Alors on fait la deuxième vérification, si on a besoin des armatures pour ferrailer la section (condition 4.22') :

$$N_u (d - d') - M_{As} > (0,5 h - d') f_{bc} b h,$$

$$(0,5 h - d') f_{bc} b h = (0,5 \times 500 - 50) 11,3 \times 250 \times 500 = 282,5 \times 10^6 \text{ N mm.}$$

Vu que la condition 4.19 est satisfaite (en effet $320 \text{ kN m} > 282,5 \text{ kN m}$), la section doit être armée par des armatures dans la zone tendue et comprimée. Dans ce cas toutes les fibres de la section ont un raccourcissement au moins égal à 2 ‰, donc pour obtenir le ferrailage économique on prend $\sigma_s' = \sigma_s = \sigma_{s2} 2‰$, soit pour simplifier $\sigma_s' = \sigma_s = \sigma_{s2}$.

Alors les sections des armatures seront obtenues par application des formules 4.17 et 4.18 :

$$\begin{aligned} A'_s &= \frac{M_{As} - (d - 0,5h) f_{bc} b h}{(d - d') \sigma_{s2}} = \\ &= \frac{480 \cdot 10^6 - (450 - 0,5 \cdot 500) 11,3 \cdot 250 \cdot 500}{(450 - 50) 204} = 2420 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

$$A_s = \frac{N_u - f_{bc} b h}{\sigma_{s2}} - A'_s = \frac{2000 \cdot 10^3 - 11,3 \cdot 250 \cdot 500}{204} - 2420 = 460 \text{ mm}^2.$$

On prend 4 \emptyset 28 avec $A'_s = 2463 \text{ mm}^2$ et 2 \emptyset 18 avec $A_s = 509 \text{ mm}^2$.

Exemple 4.6. Reprenons la même section (fig. 4.10), mais cette fois elle est soumise à un effort normal de compression $N_u = 1600 \text{ kN}$ et à un moment $M_u = 100 \text{ kNm}$. Les résistances des armatures et du béton sont les mêmes

Solution. Dans ce cas on trouve : $e = M_u / N_u = 100 / 1600 = 0,06 \text{ m}$;

$$M_{As} = M_u + N_u (0,5 h - c) = 100 + 1600 (0,5 \times 0,5 - 0,05) = 420 \text{ kNm} ;$$

$$N_u (d - d') - M_{As} = 1600 (0,45 - 0,05) - 420 = 220 \text{ kNm}.$$

D'après les calculs précédents on a :

$$(0,337 h - 0,81 d') f_{bc} b h = 180,8 \text{ kNm} ;$$

$$(0,5 h - d') f_{bc} b h = 282,5 \text{ kNm}.$$

Vu que:

$(0,337 h - 0,81 d') f_{bc} b h = 180,8 \text{ kNm} < N_u (d - d') - M_{As} = 220 \text{ kNm}$, la section est entièrement comprimée. En même temps on a que

$$(0,5 h - d') f_{bc} b h = 282,5 \text{ kNm} > N_u (d - d') - M_{As} = 220 \text{ kNm},$$

donc l'armature de la zone moins comprimée A_s sera inutile, on pose $A_s = 0$.

Pour calculer des armatures A_s' on détermine le coefficient ψ_1 à l'aide de la formule 4.20 :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{0,3571 + [N_u (d - d') - M_{As}] / f_{bc} b h^2}{0,8571 - (d' / h)} = \\ &= \frac{0,3571 + [1600 \cdot 10^3 (450 - 50) - 420 \cdot 10^6] / 11,3 \cdot 250 \cdot 500^2}{0,8571 - (50 / 500)} = 0,883. \end{aligned}$$

Le raccourcissement des armatures A_s' est calculé à l'aide de la formule 4.23 :

$$\begin{aligned} 1000 \varepsilon_s' &= 2 + (3,437 - 8,019 d' / h) \sqrt{1 - \psi_1} = \\ &= 2 + (3,473 - 8,019 \cdot 50 / 500) \sqrt{1 - 0,883} = 2,9 \end{aligned}$$

Pour $1000 \varepsilon_s' = 2,9 > 1000 \varepsilon_l = 1,022$ (tableau A.1), on prend $\sigma_s' = 204 \text{ MPa}$.

Alors la section des armatures A_s' sera égale à (formule 4.24) :

$$A_s' = \frac{N_u - \psi_1 f_{bc} b h}{\sigma_s'} = \frac{1600 \cdot 10^3 - 0,883 \cdot 11,3 \cdot 250 \cdot 500}{204} = 1729 \text{ mm}^2.$$

On prend : $2 \varnothing 12$ avec $A_s = 226 \text{ mm}^2$ (d'après les exigences constructives)

et $4 \varnothing 25$ avec $A_s' = 1964 \text{ mm}^2$.

CHAPITRE 5. CALCUL DES SECTIONS SOUMISES AUX EFFORTS TRANCHANTS

5. 1. Valeur de la contrainte tangente

Pour une poutre soumise à la flexion (fig. 5.1), l'effort tranchant V , tend à faire glisser la partie de la poutre située à gauche d'une section quelconque (S), perpendiculaire à la ligne moyenne, par rapport à la partie située à droite de cette section ; c'est le glissement transversal. Il en résulte dans (S) des contraintes de cisaillement τ , appelées également contraintes tangentes, qui forment un système en équilibre avec l'effort tranchant V .

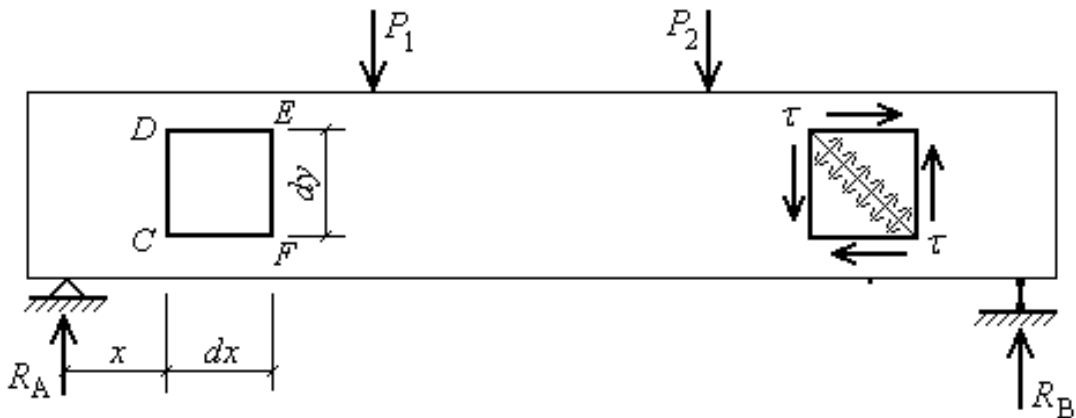


Fig.5.1

En dehors de ces contraintes transversales de cisaillement, l'effort tranchant provoque également des contraintes longitudinales de cisaillement. Pour le démontrer, on considère l'équilibre d'un petit parallélépipède $CDEF$, de côtés dx et dy (dx et dy étant très petits) et de hauteur égale à la largeur b de la poutre.

Le parallélépipède $CDEF$ (fig. 5.2,a) est en équilibre, donc le moment, par rapport à son centre de gravité G , des forces qui lui sont appliquées est nul.

Les forces appliquées sont :

- le poids propre, dont la résultante passe par G à un moment nul par rapport à ce point ;
- les contraintes normales sur CD et EF qui, étant donné que dy est petit, auront également une résultante passant par G , donc un moment nul par rapport à G ;
- les contraintes tangentielles, τ , $\tau + d\tau$, τ' , $\tau' + d\tau'$.

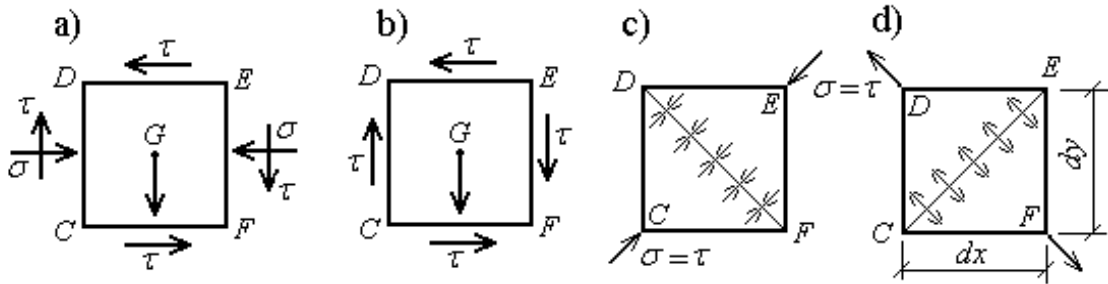


Fig. 5.2

Schémas des contraintes tangentielle agissant suivant la surface de parallélépipède $CDEF$ (fig. a, b) et celui des contraintes de traction et de compression agissant sous angle de 45° (fig. c, d)

La somme des moments par rapport à G des forces appliquées s'écrit donc :

$$\tau b dy \frac{dx}{2} + (\tau + d\tau) b dy \frac{dx}{2} - \tau' b dx \frac{dy}{2} - (\tau' + d\tau') b dx \frac{dy}{2} = 0$$

En négligeant $d\tau dy (dx/2)$ et $d\tau' dx (dy/2)$ (comme des valeurs infiniment petites), on obtient:

$$\tau = \tau'.$$

Par conséquent, sur deux surfaces rectangulaires entre eux et ayant leur origine au même point, surfaces telles que CD et CF , les contraintes tangentes ont la même valeur et ces contraintes convergent toutes deux vers C ou s'éloignent toutes deux de C (fig. 5.2,b).

En supposant que $dx = dy$, on a que deux forces concourant en C ont pour valeur $\tau b dx$ et leur résultante est $\tau b dx \sqrt{2}$. Il en sera de même pour les deux forces concourant en E . Donc le plan passant par DF sera soumis à un effort de compression $\tau b dx \sqrt{2}$, comme la surface du plan considéré, située à l'intérieur de l'élément, a pour valeur $b dx \sqrt{2}$, il en résulte que la contrainte de compression sur DF sera égale à :

$$\frac{\tau b dx \sqrt{2}}{b dx \sqrt{2}} = \tau.$$

On peut montrer de la même manière, que le plan passant par CE (fig. 5.2,d) est soumis à une contrainte de traction égale à τ . En

résumé, on a vu que, dans une poutre à ligne moyenne horizontale, l'effort tranchant provoque :

- sur des éléments verticaux et sur des éléments horizontaux ayant même origine, des contraintes égales à τ ;
- sur des éléments inclinés à 45° sur la ligne moyenne, des contraintes de compression ou de traction ayant également pour valeur τ .

Comme la résistance du béton à la traction est faible, les efforts de traction sur les plans inclinés à 45° risquent, s'ils sont assez élevés, de créer des fissures. Ces fissures se produisent là où l'effort tranchant est le plus élevé, c'est-à-dire près des appuis.

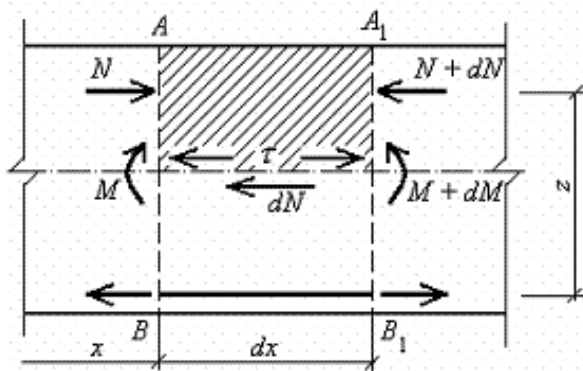


Fig.5.3

Pour déterminer la valeur de la contrainte tangente τ , on considère dans une poutre deux sections voisines AB et A_1B_1 , distantes de dx (fig.5.3).

On désigne par :

M , le moment de flexion dans la section AB ;

$M + dM$, le moment de flexion dans la section A_1B_1 ;

z , le bras de levier ;

b_o , la largeur de la nervure de la poutre.

$$\text{Alors on a : } N = M / z ; \quad N + dN = (M + dM) / z.$$

La différence donne un effort de glissement longitudinal :

$$dN = dM / z.$$

Donc une contrainte tangente (qui est uniformément distribuée suivant la surface $b_o dx$) :

$$\tau_b = \frac{dN}{b_o dx} = \frac{dM}{z b_o dx}.$$

Car $dM / dx = V$ (l'effort tranchant), on peut écrire :

$$\tau_b = V / b_o z. \quad (5.1)$$

Pour simplifier les calculs, on utilise la valeur de τ_u (dite la contrainte tangente conventionnelle) :

$$\tau_u = V_u / b_0 d. \quad (5.2)$$

On peut constater que τ_u ne représente pas la valeur réelle de la contrainte tangente, mais seulement une fraction de celle-ci, comprise entre 0,8 et 0,9. En effet, si l'on pose $z = \beta d$, avec $\beta = (0,8...0,9)$, on a : $\tau_u = (0,8...0,9) \tau_b$.

5.2. Calcul des armatures transversales

On a vu que l'effort tranchant avait pour effet de créer des fissures inclinées sensiblement à 45° sur la ligne moyenne. On peut donc dire, schématiquement, que si de telles fissures apparaissent, la partie $ABCD$ de la poutre (fig. 5.4) tendra à se détacher et à tomber. On conçoit qu'il soit nécessaire de rattacher cette partie $ABCD$ au reste de la poutre à l'aide d'armatures transversales.

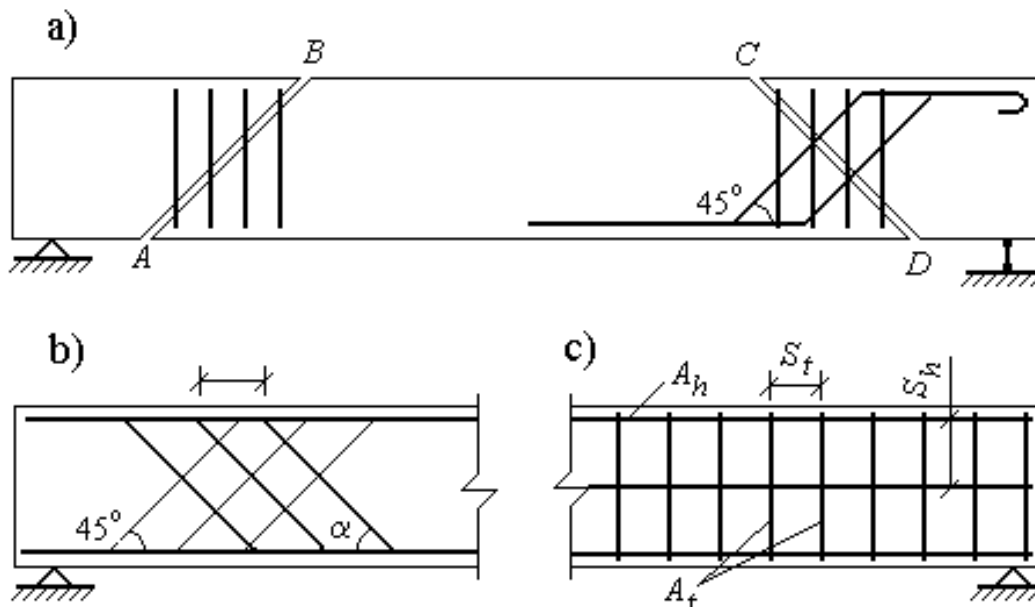


Fig. 5.4

Pour rattacher la partie *ABCD* on peut utiliser :

- des armatures perpendiculaires à la ligne moyenne de la poutre dite armatures droites, qui sont constituées par des cadres et par des étriers (fig. 5.4,a) ;
- des armatures droites associées à des barres relevées (figure 5.4,a) ;
- des armatures inclinées d'un angle α sur la ligne moyenne, $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ (fig. 5.4,b) ;
- des armatures droites associées à des armatures parallèles à l'axe de la poutre. Ces dernières doivent être réparties sur la hauteur de l'âme (fig. 5.4,c) convenablement ancrées sur les appuis et répondre à la condition :

$$\frac{A_h}{S_h} \geq \frac{A_t}{S_t} .$$

Les modes de rupture par effort tranchant conduisent à quatre états-limites ultimes qui doivent être envisagés :

- 1) Effort tranchant de compression : pour lequel, survient l'écrasement du béton comprimé des bielles limitées par les fissures ;
- 2) Effort tranchant de traction : pour lequel, l'armature d'âme atteint sa limite de résistance en traction ;
- 3) Effort tranchant et moment de flexion : pour lequel, l'armature longitudinale tendue atteint sa limite de résistance ;
- 4) Assemblages : cas qui correspond à la ruine des organes de transmission des efforts au voisinage des zones d'application des efforts.

5.2.1. Vérification du béton de l'âme

Cette vérification (etat-limite ultime par compression des bielles de béton) permet de préciser les dimensions de l'âme des pièces.

Les contraintes tangentes τ_u , si elles sont assez élevées, elles risquent de créer des efforts de compression qui peut survenir l'écrasement des bielles de béton comprimé.

Les dimensions de l'âme doivent être telles que la contrainte tangente τ_u soit limitée aux valeurs indiquées ci-après :

1) Lorsque les armatures d'âme sont des armatures droites ou des armatures droites associées à des barres relevées (on note que ces armatures transversales ne doivent pas équilibrer plus de la moitié de l'effort tranchant), la contrainte τ_u ne doit pas dépasser la plus faible des deux valeurs données par :

si la fissuration est non préjudiciable:

$$\tau_u = V_u / b_o d \leq 0,2 f_{cj} / \gamma_b \quad \text{et} \quad \tau_u \leq 5,0 \text{ MPa}; \quad (5.3)$$

si la fissuration est préjudiciable ou très préjudiciable:

$$\tau_u = V_u / b_o d \leq 0,15 f_{cj} / \gamma_b \quad \text{et} \quad \tau_u \leq 4,0 \text{ MPa}; \quad (5.4)$$

2) Lorsque les armatures d'âme sont des armatures inclinées à 45° sur l'axe de la poutre ou des armatures droites associées à des armatures parallèles à l'axe de la poutre, la contrainte τ_u ne doit pas dépasser la plus faible des deux valeurs données par (quelle que soit la fissuration) :

$$\tau_u = V_u / b_o d \leq 0,27 f_{cj} / \gamma_b \quad \text{et} \quad \tau_u \leq 7,0 \text{ MPa}; \quad (5.5)$$

3) Lorsque les armatures d'âme sont constituées uniquement par des armatures inclinées d'un angle α sur la ligne moyenne ($45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$), on détermine la valeur limite de τ_u par interpolation entre les valeurs précédentes.

4) Pour des pièces dont toutes les sections droites sont entièrement comprimées, les limites réglementaires deviennent :

$$\tau_u = V_u / b_o d \leq 0,06 f_{cj} / \gamma_b \quad \text{et} \quad \tau_u \leq 1,5 \text{ MPa}; \quad (5.6)$$

Si ces conditions sont satisfaites, les dimensions de la section des pièces sont suffisantes, dans le cas contraire les dimensions de la section doivent être augmentées.

Pour les bétons courants, on obtient pour τ_u les valeurs limites données sur le tableau 5.1.

Tableau 5.1
Valeurs limites des contraintes tangentes ultimes
 τ_u (MPa) avec $\gamma_b = 1,5$

f_{c28} MPa	Armatures droites, fissuration :		Armatures à 45° (toutes fissurations)	Pièces comprimées (toutes fissurations)
	non préjudiciable (conditions 5.3)	préjudiciable ou très préjudiciable (conditions 5.4)		
16	2,13	1,60	2,88	0,64
18	2,40	1,80	3,24	0,72
20	2,67	2,00	3,60	0,80
25	3,33	2,50	4,50	1,00
30	4,00	3,00	5,40	1,20
40	5,00	4,00	7,00	1,50
50	5,00	4,00	7,00	1,50
60	5,00	4,00	7,00	1,50

Pour vérifier le béton de l'âme (les formules 5.3 ... 5.6) on prend en considération des efforts tranchants maximaux $V_{u(o)}$, donc à la distance $x = 0$ de l'appui. Alors les contraintes tangentes correspondantes seront égales à $\tau_{u(o)} = V_{u(o)} / b_o d$. Ces contraintes ne doivent pas dépasser la valeur limite $\tau_{u \max}$ (donnée par le tableau 5.1), donc $\tau_{u(o)} \leq \tau_{u \max}$. Si cette condition n'est pas satisfaite, on doit augmenter les dimensions de la section transversale de la pièce.

5.2.2. Calcul des armatures transversales

Soit on considère une poutre dont les armatures d'âme sont constituées de barres ayant une inclinaison α sur la ligne moyenne (fig. 5.5). On admet, qu'après fissuration, la poutre se comporte comme une poutre à treillis multiple de hauteur "z", la membrure comprimée de cette poutre étant constituée par le béton de la zone comprimée, la membrure tendue par les armatures tendues, les diagonales tendues par les barres inclinées à angle α , les diagonales comprimées par des bielles de béton inclinées à 45°.

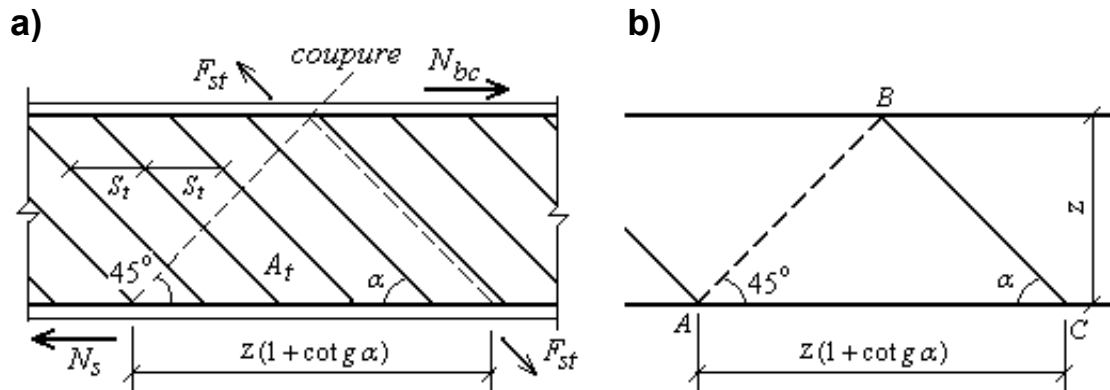


Fig. 5.5

On remplace le treillis multiple par un treillis simple (fig.5.5,b), la section de la diagonale BC étant égale à la somme des sections des barres inclinées rencontrées dans la poutre sur la longueur :

$$z(1 + \cotg \alpha).$$

D'après la théorie des poutres en treillis on a :

- l'effort de traction dans la diagonale BC est :

$$F_{st} = V_u / \sin \alpha;$$

- l'effort de compression dans la diagonale de béton comprimé, inclinée à 45° est : $V_u \sqrt{2}$.

Si A_t est la somme des sections droites des armatures inclinées situées dans un même plan et S_t l'écartement de deux plans successifs, alors le nombre de cadres coupés sur un module du treillis est :

$$n = z(1 + \cotg \alpha) / S_t,$$

et la section de la diagonale fictive a pour valeur :

$$A_t n = A_t z(1 + \cotg \alpha) / S_t.$$

La contrainte dans les armatures A_t étant égale à f_e / γ_s , alors l'effort de traction dans la diagonale fictive tendue est :

$$F_{st} = [A_t z(1 + \cotg \alpha) / S_t] (f_e / \gamma_s). \quad (5.7)$$

En projetant l'équilibre des forces sur la verticale, on a:

$$F_{st} \sin \alpha = V_u \quad \text{ou encore :}$$

$$[A_t z(1 + \cotg \alpha) / S_t] (f_e / \gamma_s) = V_u / \sin \alpha,$$

$$[A_t z(\sin \alpha + \cos \alpha) / S_t] (f_e / \gamma_s) = V_u.$$

Avec $\tau_u = V_u / b_o d$, et $\rho_t = A_t / b_o S_t$, on peut écrire:

$$\rho_t = \frac{A_t}{b_o S_t} \geq \frac{\tau_u}{(z f_e / d \gamma_s) (\sin \alpha + \cos \alpha)}, \quad (5.8)$$

où ρ_t est le coefficient de ferrailage des armatures transversales dans l'âme (coefficient fictif car les armatures transversales ne sont pas toujours orthogonales à l'aire $b_o S_t$).

Vu que $z = 0,9 d$ et $\gamma_s = 1,15$, donc $z / d \gamma_s = 0,8$, alors on a :

$$\rho_t = \frac{A_t}{b_o S_t} \geq \frac{\tau_u}{0,8 f_e (\sin \alpha + \cos \alpha)}. \quad (5.9)$$

La formule 5.9 ne tient pas compte du fait qu'une partie de l'effort tranchant est équilibrée par la membrure comprimée du treillis. Aussi les règles *B.A.E.L*, pour prendre ce fait en considération, ont introduit la valeur τ_o (ce comportement provient du fait que le béton comprimé participe également à l'équilibre de l'effort tranchant) et la formule (5.9) devient alors:

$$\rho_t = \frac{A_t}{b_o S_t} \geq \frac{\tau_u - \tau_o}{0,8 f_e (\sin \alpha + \cos \alpha)}, \quad (5.10)$$

où $\tau_o = 0,3 f_{tj}^* k$, $f_{tj} \geq f_{tj}^* \leq 3,3 \text{ MPa}$;

k est le coefficient qui varie en fonction du type de sollicitation et de la nature de la surface de reprise de bétonnage s'il en existe. La valeur de k est la plus défavorable de celles qui découlent des articles suivants :

$k = 0$ dans le cas de reprises de bétonnage n'ayant pas reçu le traitement ci-après, ou lorsque la fissuration est très préjudiciable;

$k = 1$ dans le cas de la flexion simple;

$k = 1 + 3 \sigma_{cm} / f_{cj}$ dans le cas de la flexion composée avec compression, σ_{cm} désignant la contrainte moyenne de compression de la section totale de béton sous l'effort normal de calcul;

$k = 1 - 10 \sigma_{tm} / f_{cj}$ dans le cas de la flexion composée avec traction, σ_{tm} désignant la contrainte moyenne de traction de la section totale de béton sous l'effort normal de calcul. Le coefficient k devient négatif dès

que σ_{tm} est supérieur à $0,1 f_{cj}$. Ceci tient compte du fait que la résistance des pièces tendues à l'effort tranchant est médiocre.

Les valeurs de σ_{tm} et σ_{cm} se calculent conventionnellement sur la section de béton totale supposée non fissurée et non armée.

On doit noter que sauf traitement particulier ^{*)}, une reprise de bétonnage constitue un point faible et doit donc être traitée conformément à la règle des coutures donnée plus loin, ce qui revient à prendre $k = 0$. L'attention est attirée sur le fait que lorsque la surface de reprise se situe à un niveau différent de celui de la fibre neutre, la justification doit être faite à ce niveau avec la valeur correspondante du cisaillement qui diffère de la valeur conventionnelle de τ_u .

Dans le cas particulier de la flexion simple avec armatures droites ($\alpha = 90^\circ$) on a $\sin \alpha = 1$, $\cos \alpha = 0$ et la formule (5.10) s'écrit lorsqu'il n'y a pas de reprise de bétonnage:

- si la fissuration est très préjudiciable, $k = 0$:

$$\rho_t = \frac{A_t}{b_o S_t} \geq \frac{\gamma_s \tau_u}{0,9 f_e}, \quad \text{ou encore} \quad \rho_t \geq \frac{\tau_u}{0,8 f_e}. \quad (5.11)$$

- si la fissuration n'est pas préjudiciable ou est peu préjudiciable (donc $k = 1$):

$$\rho_t = \frac{A_t}{b_o S_t} \geq \frac{\gamma_s (\tau_u - 0,3 f_{ij})}{0,9 f_e}, \quad \text{ou} \quad \rho_t \geq \frac{\tau_u - 0,3 f_{ij}^*}{0,8 f_e}. \quad (5.12)$$

En général on fixe le diamètre des armatures transversales (donc la section A_t), et on détermine leur espacement S_t . Alors on aura pour le cas envisagé de flexion simple avec armatures droites:

- si la fissuration est très préjudiciable:

$$S_t \leq \frac{0,8 f_e A_t}{b_o \tau_u}, \quad (5.13)$$

- si la fissuration n'est pas préjudiciable ou est peu préjudiciable:

$$S_t \leq \frac{0,8 f_e A_t}{b_o (\tau_u - 0,3 f_{ij}^*)}. \quad (5.13')$$

^{*)} $k = 1$ dans le cas des surfaces de reprise de bétonnage, si elles sont munies d'indentation atteignant au moins 5 mm .

On note que les armatures inclinées d'un angle α sont les plus intéressantes au point de vue de résistance des sections inclinées (la disposition la plus efficace correspond à $\alpha = 45^\circ$), mais on utilise souvent par commodité, lorsque cela est possible, $\alpha = 90^\circ$. La disposition des armatures à 45° est notamment recommandée lorsque la fissuration est préjudiciable ou très préjudiciable.

Quelle que soit la valeur donnée par le calcul, la quantité des armatures transversales ne doit pas être inférieure à la valeur minimale, déterminée d'après la condition de non-fragilité :

$$\frac{\tau_u}{2} \leq \frac{A_t f_e}{b_o S_t \sin \alpha} \geq 0,4 \text{ MPa},$$

ou encore (pour des barres verticales $\alpha = 90^\circ$):

$$\rho_{t \min} \geq 0,5 \tau_u / f_e, \quad \rho_{t \min} \geq 0,4 / f_e. \quad (5.14)$$

L'espacement entre les plans successifs d'armatures d'âme doit être au plus égal à la plus faible des deux valeurs:

$$0,9 d \quad \text{et} \quad 40 \text{ cm}.$$

Le diamètre \varnothing_t des armatures transversales d'âme doit être au moins égal à $\varnothing_l / 3$ (ici \varnothing_l est le plus grand diamètre des barres longitudinales). D'autre côté le diamètre des armatures transversales doit être au plus égal à la plus petite des trois quantités suivantes :

$$\varnothing_t \leq h / 35 \quad (h \text{ est la hauteur totale de la poutre});$$

$$\varnothing_t \leq \varnothing_l \quad (\varnothing_l, \text{ le diamètre des armatures longitudinales});$$

$$\varnothing_t \leq b_o / 10 \quad (b_o, \text{ la largeur de l'âme de la poutre}).$$

Dans la mesure du possible, il est conseillé d'éviter, pour les armatures transversales, d'utiliser des aciers de diamètre supérieur à 12 mm.

Pour calculer des armatures transversales, on prend en considération la valeur de l'effort tranchant $V_{u(h/2)}$, donc à la distance $h / 2$ de l'appui. Alors les contraintes tangentées τ_u (pour les formules 5.8 ... 5.14) sont données par : $\tau_u = \tau_{u(h/2)} = V_{u(h/2)} / b_o d$.

D'autre part dans les calculs au voisinage des appuis, lorsque des charges sont appliquées à ce voisinage, on applique les modalités suivantes :

- *charges réparties* : on ne prend pas en compte les charges s'appliquant avant une distance $h / 2$ du nu de l'appui considéré, car on estime que ces charges sont transmises directement à l'appui ;
- *charges concentrées* : l'effort tranchant développé par une charge concentrée proche d'un appui (à la distance $a \leq 0,5 h$ de l'appui) est considéré comme directement transmise à l'appui et n'est pas prise en compte. Si la distance $0,5 h < a \leq 1,5 h$ l'effort tranchant développé par cette charge doit être multiplié par un coefficient $2 a / 3 h$.

5.2.3. Dispositions pratiques des armatures transversales

Les armatures transversales sont généralement constituées par des barres de 6 à 12 *mm* de diamètre entourant les armatures supérieures et inférieures. Il est possible également d'utiliser des treillis soudés.

On calcule toujours l'écartement des armatures transversales aux appuis et dans quelques sections intermédiaires. Ensuite les armatures transversales sont réparties en fonction des valeurs trouvées en s'attachant, pour ne pas compliquer inutilement le travail de ferrailage, à garder un écartement constant sur une certaine zone. Quelle que soit la valeur donnée par le calcul, l'espacement des armatures transversales ne doit pas être supérieur à la valeur maximale indiquée ci-dessus et la section de ces armatures doit être au moins égale à la valeur minimale indiquée au même paragraphe (voir 5.2.2).

Le premier plan des armatures transversales est placé à une distance de l'appui égale à $S_t / 2$ et les armatures transversales sont prolongées sur l'appui, avec un écartement égal à S_t , afin d'assurer la couture des ancrages. Ensuite, on choisit des espacements S_t tels que le coefficient de ferrailage réel soit supérieur aux valeurs requises de ρ_t pour chaque partie de la pièce. Cette méthode longue est générale et c'est la plus "économique".

Pour les cas pratiques de répartition des armatures transversales le plus souvent on utilise les méthodes approchées : soit méthode pratique de Caquot et méthode pratique de Perchat.

Les méthodes pratiques sont applicables aux poutres de hauteur constante soumises à des charges uniformément réparties.

En utilisant la méthode de *Caquot* on calcule l'écartement des armatures transversales à l'appui, puis on adopte, pour l'écartement des cadres suivants, en centimètres, la suite des nombres :

7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 20, 25, 35, 60.

Chaque espacement étant répété autant de fois qu'il y a de mètres dans la demi-portée de la poutre (voir exemple numérique 5.1).

La méthode de *Perchat* (on peut la considérer comme dérivée de la méthode de *Caquot*) est un peu plus économique et aussi un peu plus compliquée.

Il faut noter que les méthodes de *Caquot* et *Perchat* sont plus rapides que la méthode générale, elles vont dans le sens de la sécurité, mais conduisent généralement à une plus forte densité d'armatures transversales.

5.2.4. Cas particulier des dalles et des poutres secondaires. Cas du poinçonnement

1) *Dalles*. Dans le cas des dalles aucune armature transversale n'est pas nécessaire si:

- la dalle est bétonnée sans reprise sur toute son épaisseur ;
- la contrainte tangente τ_u est inférieure à $0,07 f_{c28} / \gamma_b$.

En cas de surface de reprise de bétonnage ménagée dans l'épaisseur de la dalle considérée, on applique la règle des coutures.

Lorsque la dalle comporte des armatures d'effort tranchant, les valeurs limites de la contrainte tangente τ_u sont celles données pour les poutres à armatures droites multipliées par :

- 10 $h / 3$ si h est comprise entre 0,15 et 0,3 m (h en mètres) ;
- 1,0 si $h > 0,3$ m.

2) *Poutres secondaires*. On n'a pas à placer d'armatures transversales dans la moitié centrale des poutres secondaires de planchers ou de nervures de planchers à nervures croisées si l'utilisation des locaux ne crée pas d'effet dynamique important et si la contrainte tangente de calcul n'excède pas $0,03 f_{c28}$.

3) *Cas du poinçonnement.* Une force est localisée lorsque les dimensions de son impact sont petites par rapport aux dimensions de la dalle. Sous l'action d'une telle force, il y a lieu de vérifier la résistance des dalles au poinçonnement par effort tranchant. La condition de non-poinçonnement est vérifiée si :

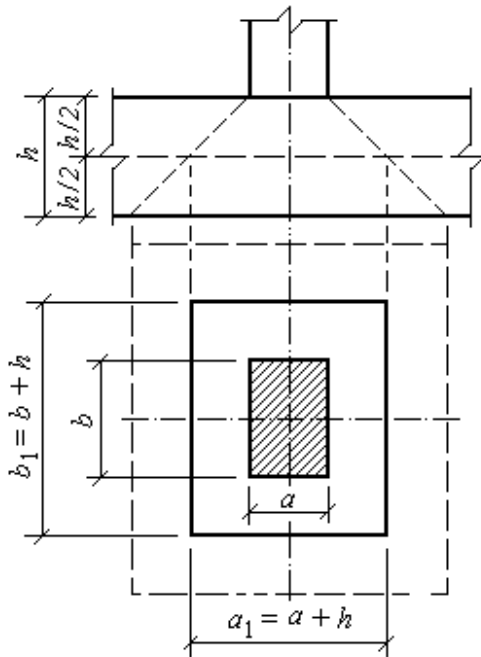


Fig.5.6

$$Q_u \leq 0,045 U_c h f_{cj} / \gamma_b \quad (5.15)$$

avec Q_u , la charge de calcul à l'état-limite ultime ;

h , l'épaisseur totale de la dalle ;

U_c , le périmètre du contour au niveau du feuillet moyen calculé comme indiqué sur la figure 5.6.

$$U_c = AB + BC + CD + DA = \\ = 2(a + b + 2h).$$

Vu que $\tau_u = Q_u / U_c d$, et en prenant $d \approx 0,9h$, on a : $\tau_u \leq 0,05 f_{cj}$.

Si la condition de non-poinçonnement n'est pas satisfaite, il faut utiliser des armatures transversales dans un périmètre U défini à partir du périmètre U_c :

$$U = U_c \tau_u / 0,05 f_{cj} \quad (5.16)$$

Exemple 5.1. Une poutre de section rectangulaire ayant $b = 300 \text{ mm}$, $h = 750 \text{ mm}$ ($d = 700 \text{ mm}$) et de la portée de calcul $l = 6,3 \text{ m}$. Cette poutre est chargée par des charges uniformément réparties : $G = 34 \text{ kN/m}$, $Q = 76 \text{ kN/m}$. Le béton a la résistance caractéristique $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$ ($f_{bc} = 17 \text{ MPa}$). Les barres transversales ($\alpha = 90^\circ$) sont en acier $Fe E 400$ ($\sigma_s = 348 \text{ MPa}$). On demande de calculer les armatures transversales de la poutre.

Solution. Les charges de calcul uniformément réparties sont :

$$1,35 G + 1,5 Q = 1,35 \times 34 + 1,5 \times 76 = 159,9 \approx 160 \text{ kN/m}.$$

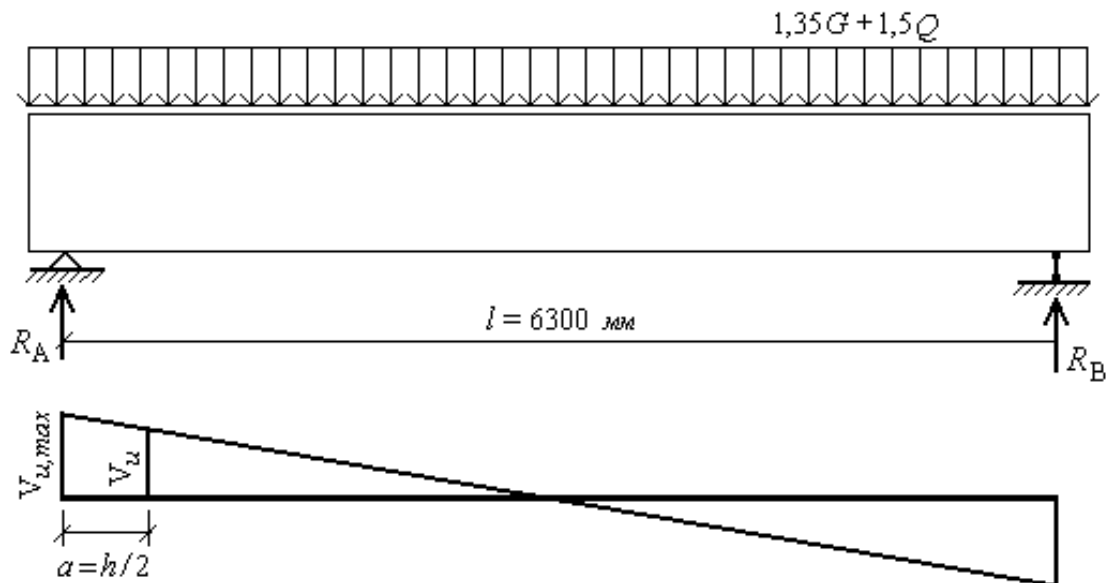


Fig. 5.7

L'effort tranchant maximal sur l'appui est égal à :

$$V_{u(\max)} = V_{u(o)} = \frac{(1,35G + 1,5Q) l}{2} = \frac{160 \cdot 6,3}{2} = 504 \text{ kN} .$$

Les dimensions de la section transversale de la poutre sont vérifiées d'après les contraintes tangentes maximales (pour une section rectangulaire $b_o = b$):

$$\tau_{u(o)} = \frac{V_{u(o)}}{bd} = \frac{504 \cdot 10^3}{300 \cdot 700} = 2,4 \text{ MPa} .$$

Pour le cas des armatures droites et quand la fissuration est non préjudiciable, il faut que les conditions suivantes soit satisfaites (conditions 5.3) :

$$\tau_{u(o)} = 2,4 \text{ MPa} < 0,2 f_{c28} / \gamma_b = 0,2 \times 30 / 1,5 = 4,0 \text{ MPa};$$

$$\tau_{u(o)} = 2,4 \text{ MPa} < 5,0 \text{ MPa} .$$

C'est-à-dire que les dimensions de la section transversale de la poutre sont suffisantes.

Pour calculer le ferrailage de la section inclinée déterminons l'effort tranchant à la distance $h/2$ de l'appui :

$$V_{u(h/2)} = V_{u(o)} - \frac{(1,35G + 1,5Q) h}{2} = 504 - \frac{160 \cdot 0,75}{2} = 444 \text{ kN} .$$

La contrainte tangente alors sera :

$$\tau_u = \frac{V_u(h/2)}{bd} = \frac{444 \cdot 10^3}{300 \cdot 700} = 2,11 \text{ MPa}.$$

Le coefficient de ferrailage de la section transversale par des barres droites est calculé à l'aide de la formule 5.12 :

$$\rho_t = \frac{A_t}{b S_t} \geq \frac{\tau_u - \tau_o}{0,8 f_e},$$

où $\tau_o = 0,3 f_{tj}^* k$; $f_{tj}^* \leq f_{tj} = f_{t28} = 2,4 \text{ MPa}$ (tableau 2.1);
 $f_{tj}^* \leq 3,3 \text{ MPa}$, donc on pose $f_{tj}^* = 2,4 \text{ MPa}$.

Pour une flexion simple (sans reprise de bétonnage) $k = 1,0$.

Alors, avec ces valeurs :

$$\rho_t = \frac{2,11 - 0,3 \cdot 2,4 \cdot 1,0}{0,8 \cdot 400} = 0,00434.$$

La valeur de ρ_t doit être supérieure aux valeurs minimales (conditions de non-fragilité, 5.14) :

$$\rho_{t,\min} = \frac{0,5 \tau_u}{f_e} = \frac{0,5 \cdot 2,11}{400} = 0,00264;$$

$$\rho_{t,\min} = \frac{0,4}{f_e} = \frac{0,4}{400} = 0,001.$$

Donc, comme une valeur définitive on prend $\rho_t = 0,00434$.

Comme armatures transversales nous prenons les barres droites de 8 mm de diamètre (d'après la condition $\varnothing_t > \varnothing_l / 3$, avec $\varnothing_l = 25 \text{ mm}$). Dans la section transversale nous avons 4 $\varnothing 8 \text{ mm}$, avec $A_t = 201 \text{ mm}^2$.

L'espacement des barres sera égal à :

$$S_t = \frac{A_t}{\rho_t b} = \frac{201}{0,00434 \cdot 300} = 154 \text{ mm}.$$

Pour déterminer la répartition des armatures transversales nous utilisons la méthode de Caquot :

- le premier cadre doit être placé entre le nu de l'appui et $S_t / 2 = 7,7 \text{ cm}$, soit on prend 6,5 cm ;

- pour l'espacement des cadres suivants, on prend $S_t = 13 \text{ cm}$ (vu que $13 \text{ cm} < S_t = 15,4 \text{ cm} < 16 \text{ cm}$, on prend comme l'écartement la plus petite valeur parmi les deux, soit 13 cm). Chaque espacement étant répété autant de fois qu'il y a de mètres dans la demi-portée de la poutre, c'est-à-dire que :

$$n = l / 2 = 6,3 / 2 = 3,15, \text{ on prend 3 fois;}$$

- ensuite on prend l'espacement $S_t = 16 \text{ cm}$, qui est répété encore 3 fois, et ainsi de suite : 3 fois $S_t = 20 \text{ cm}$, 3 fois $S_t = 25 \text{ cm}$, 3 fois $S_t = 35 \text{ cm}$.

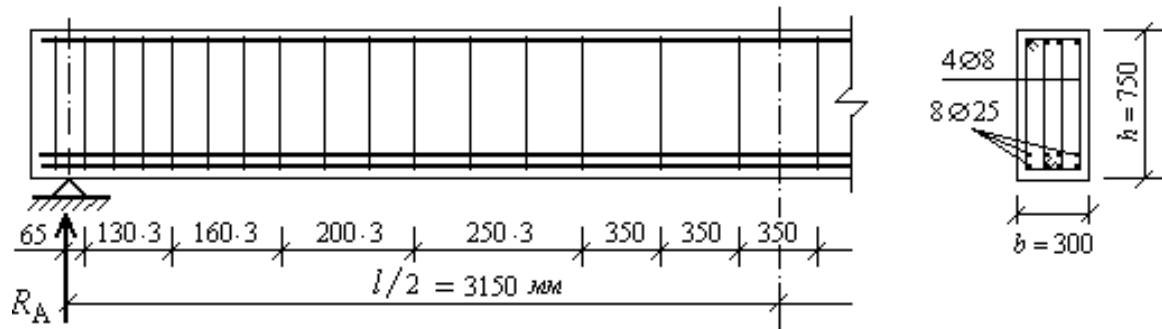


Fig.5.8
Répartition des armatures transversales suivant la longueur de la poutre

Exemple 5.2. On demande de calculer le ferrailage avec des armatures transversales (barres droites) de la poutre de section en T (les dimensions sont données par la figure 5.9). La portée calculée de la poutre est $l = 5,0 \text{ m}$. La poutre est soumise (pour le cas de l'état-limite ultime) à des charges $1,35 G + 1,5 Q = 60 \text{ kN}$. Les armatures longitudinales de la poutre sont constituées par $5 \text{ } \varnothing 25 \text{ mm}$ et des armatures transversales sont en acier $Fe E 215$ ($f_e / \gamma_s = 187 \text{ MPa}$). La poutre est faite en béton coulé sur place (sans reprise de bétonnage), dont la résistance caractéristique $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$ et la résistance de calcul $f_{bc} = 0,85 f_{c28} / \gamma_b = 11,3 \text{ MPa}$.

Solution. L'effort tranchant maximal au niveau de l'appui de la poutre est:

$$V_{u(o)} = (1,35 G + 1,5 Q) l / 2 = 60 \times 5 / 2 = 150 \text{ kN}.$$

Les dimensions de l'âme de la poutre sont vérifiées d'après les conditions 5.3 (état-limite par compression des bielles de béton). La contrainte tangente $\tau_{u(o)}$ sera égale à :

$$\tau_{u(o)} = \frac{V_{u(o)}}{b_o d} = \frac{150 \cdot 10^3}{200 \cdot 450} = 1,67 \text{ MPa}.$$

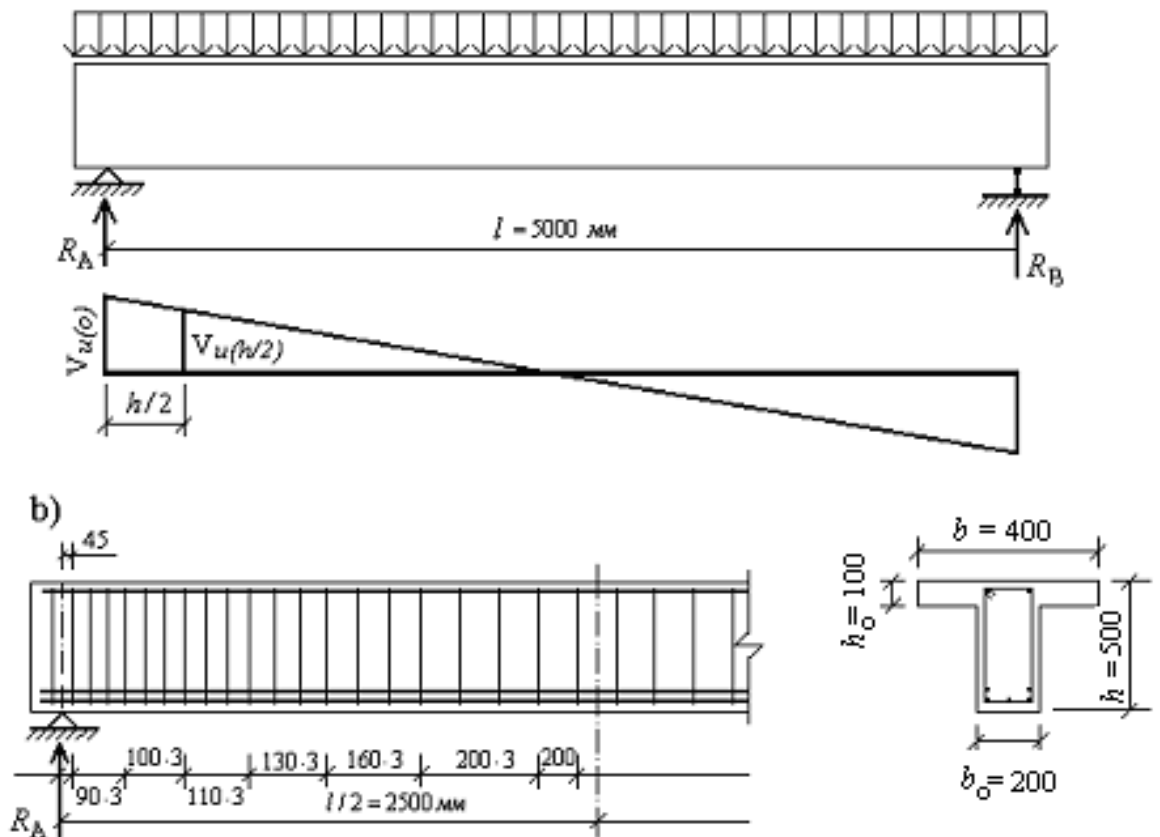


Fig. 5.9

a - schéma de calcul pour des efforts tranchants ;
 b - ferrailage de la poutre par des barres droites

Cette contrainte est inférieure aux valeurs limites:

$$\tau_{u(0)} = 1,67 \text{ MPa} < 0,2 f_{c28} / \gamma_b = 0,2 \times 20 / 1,5 = 2,67 \text{ MPa} ;$$

$$\tau_{u(0)} < 5 \text{ MPa}.$$

Donc les dimensions de la section sont suffisantes.

Pour calculer le ferrailage de la section inclinée, on prend en compte l'effort tranchant à la distance $h/2$ de l'appui:

$$V_{u(h/2)} = V_{u(0)} - (1,35 G + 1,5 Q) h / 2 = 150 - (60 \times 0,5 / 2) = 135 \text{ kN}.$$

La contrainte tangente correspondante à cet effort est:

$$\tau_{u(h/2)} = \frac{V_{u(h/2)}}{b_o d} = \frac{135 \cdot 10^3}{200 \cdot 450} = 1,5 \text{ MPa} .$$

Pour calculer le coefficient de ferrailage ρ_t on détermine la valeur de τ_o :

$$\tau_o = 0,3 f_{tj}^* k, \quad \text{avec } k = 1, \quad f_{tj}^* < f_{t28} = 1,8 \text{ MPa}; \quad f_{tj}^* < 3,3 \text{ MPa}.$$

Soit on prend $f_{tj}^* = 1,8 \text{ MPa}$, alors $\tau_o = 0,3 \times 1,8 \times 1 = 0,54 \text{ MPa}$.

Avec ces valeurs on trouve:

$$\rho_t = \frac{A_t}{b_o S_t} \geq \frac{\tau_u - \tau_o}{0,8 f_e} = \frac{1,5 - 0,54}{0,8 \cdot 215} = 0,00558 .$$

Le coefficient de ferrailage ρ_t est supérieur aux valeurs minimales:

$$\rho_{t,\min} = \frac{0,5 \tau_u}{f_e} = \frac{0,5 \cdot 1,5}{215} = 0,0035; \quad \rho_{t,\min} = \frac{0,4}{f_e} = \frac{0,4}{215} = 0,00186 .$$

Alors, on prend $\rho_t = 0,00558 > \rho_{t,\min} = 0,0035$.

Comme diamètre des barres droites on prend (d'après des exigences constructives) $\varnothing_t = \varnothing_l / 3 = 25 / 3 \approx 8 \text{ mm}$, alors la section des armatures transversales situées dans un même plan est : $A_t = 2 \times 50,3 \approx 101 \text{ mm}^2$.

L'espacement S_t exigé est calculé à l'aide de la formule :

$$S_t = \frac{A_t}{\rho_t b_o} = \frac{101}{0,00558 \cdot 200} = 90,5 \text{ mm}$$

On prend $S_t = 90 \text{ mm}$. Le premier cadre est à $4,5 \text{ cm}$ de l'appui (cette distance doit être $\leq S_t / 2 = 90 / 2 = 45 \text{ mm}$). Ensuite en utilisant la méthode de Caquot (vu que $l / 2 = 5,0 / 2 = 2,5$, soit 3), on prend 3 espacements de 10 cm , 3 de 11 cm , 3 de 13 cm , 3 de 16 cm et 3 de 20 cm (fig. 5.9).

5. 3. Influences particulières des efforts tranchants

5.3.1. Règle de coutures

L'expérience montre qu'il serait dangereux de compter sur le béton seul pour équilibrer un effort tangent s'exerçant sur un plan intérieur à un élément de structure. Il est donc nécessaire d'associer au béton des aciers d'attache appelés "coutures" qui traversent le plan considéré, et ancrés dans les régions de béton dont la fissuration ne compromet pas l'efficacité de l'ancrage.

Cette règle est destinée à déterminer les armatures d'attache pour les plans de béton sur lesquels s'exerce un effort tangent, c'est-à-dire un effort provoqué par des contraintes tangentées, et pour lesquels il n'existe pas un mode de détermination spécifique des armatures d'attache, comme c'est le cas pour les âmes des poutres. En pratique ces plans correspondent:

- aux surfaces de reprise de bétonnage ;
- aux plans d'attache de deux pièces entre elles.

Les plans considérés doivent être traversés par des armatures d'attache ou armatures de couture, convenablement ancrées de part et d'autre du plan sollicité, faisant avec lui un angle compris entre 45° et 90° . Si les armatures ne sont pas normales au plan, elles doivent être inclinées en sens inverse de la direction probable des fissures.

Si on appelle :

- A_t , la somme des aires des sections droites des armatures de couture disposées dans un même plan ;
- S_t , l'espacement des armatures de couture dans la direction parallèle au plan sollicité ;
- τ , la contrainte tangente réelle (et non conventionnelle) ;
- σ , la contrainte normale comptée positivement en compression, négativement en traction ;
- f_e , la limite d'élasticité des armatures de couture ;
- γ_s , le coefficient de sécurité relatif à l'acier ($\gamma_s = 1,15$) ;
- α , l'angle des armatures tendues avec le plan sollicité
 $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

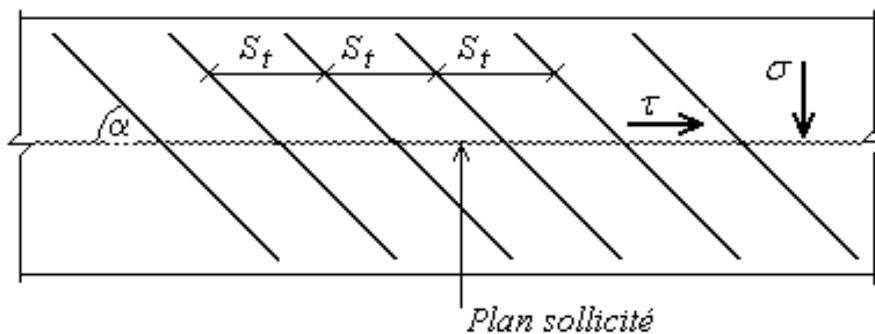


Fig. 5.10

Avec ces valeurs on peut écrire la règle des coutures généralisées:

$$\frac{A_t f_e (\cos \alpha + \sin \alpha)}{b_o S_t \gamma_s} \geq \tau - \sigma. \quad (5.17)$$

1) *Liaison de la table de compression d'une poutre avec l'âme.*

Pour une section en T les armatures de couture doivent assurer l'attache des tables avec l'âme. Soit l'aile d'une table de compression d'une poutre en T est chargée dans son plan de symétrie ; les contraintes agissant sur le plan de jonction doivent équilibrer les efforts normaux et les moments de flexion. Il se produit donc des contraintes tangentes parallèlement et perpendiculairement aux faces verticales de l'âme.

Soit, on considère deux sections d'une poutre en T , distantes de dx . Sur une tranche de hauteur du de l'aile $ABCD$ agit une contrainte σ , donnée par :

$$\sigma = (M / I_o) u.$$

On a donc pour toute la surface $ABCD$ [de largeur $(b - b_o) / 2$] une force :

$$F = \frac{M}{I_o} \int_{y_1 - h_o}^{y_1} \left(\frac{b - b_o}{2} \right) dy.$$

En tenant compte que l'intégrale représente le moment statique S_o de la surface $ABCD$ par rapport à l'axe neutre, on a :

$$F = (M / I_o) S_o.$$

De la même manière on aurait pour $A'B'C'D'$ (où le moment est égal à $M + dM$) :

$$F + dF = [(M + dM) / I_o] S_o.$$

La différence entre ces deux forces est équilibrée par la résultante des contraintes de cisaillement sur la face $CDC'D'$, en admettant que ces contraintes de cisaillement τ soient uniformément réparties, on a :

$$\tau h_o dx = (dM / I_o) S_o.$$

Et comme $dM / dx = V$, $\tau = (V S_o) / (I_o h_o)$.

Pour continuer le calcul, on désigne par S_t le moment statique par rapport à l'axe neutre de toute la table de compression [$S_t = b h_o (y - h_o / 2)$], et le moment statique S_o de la partie $ABCD$ [$S_o = 0,5 (b - b_o) h_o (y - h_o / 2)$], on aura alors :

$$S_o = [(b - b_o) / 2 b] S_t \quad \text{ou encore} \quad S_o = (b_1 / b) S_t.$$

Ici $b_1 = (b - b_o) / 2$, étant la dimension de l'aile (fig. 5.11).

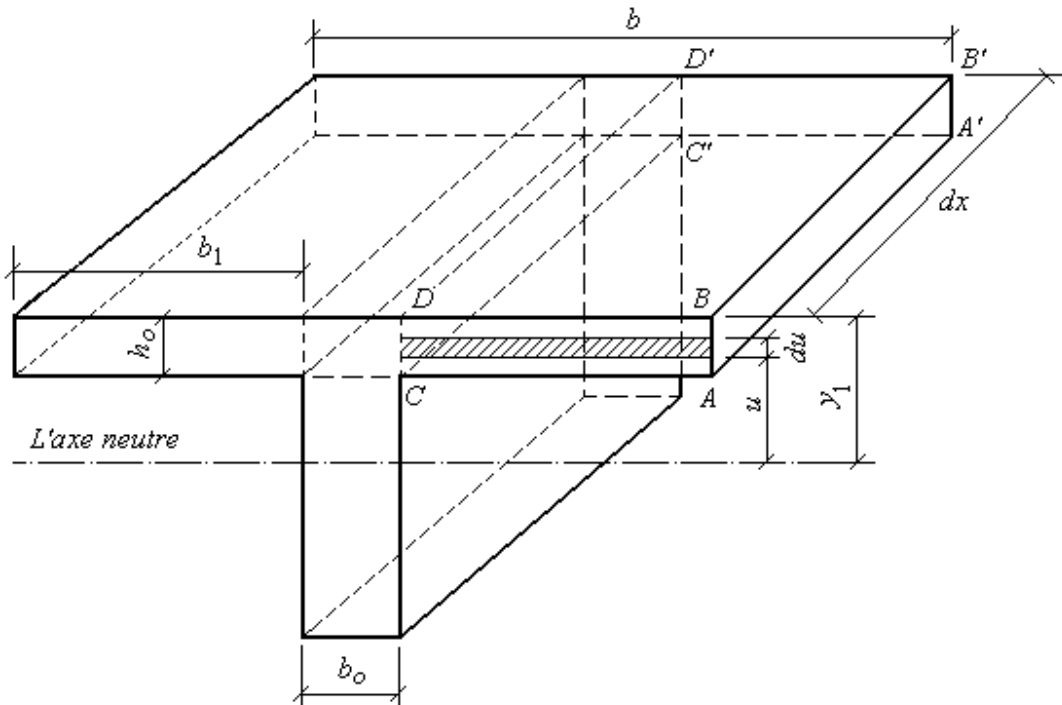


Fig. 5.11

Et si on désigne encore par S_1 le moment statique de toute la partie de la section située au-dessus de l'axe neutre, on a $S_t \leq S_1$.

D'où : $S_o \leq (b_1 / b) S_1$ et $\tau \leq (V b_1 / b) (S_1 / I_o)$.

Le rapport (S_1 / I_o) peut être déterminé de la manière suivante : la résultante des forces de compression F est égale à :

$$F = M / z \quad \text{d'autre part} \quad F = (M / I_o) S_1, \quad \text{alors on peut écrire :}$$

$$S_1 / I_o = 1 / z.$$

Par conséquent on a :

$$\tau = \frac{V}{h_o} \cdot \frac{b - b_o}{2b} \cdot \frac{1}{z} = \frac{V b_1}{h_o b z}.$$

Alors pour des états-limites ultimes on a :

$$\tau_u = \frac{V_u}{z} \cdot \frac{b_1}{b h_o}. \quad (5.18)$$

En prenant $z \approx 0,9 d$, on trouve définitivement :

$$\tau_u = \frac{V_u}{0,9 d} \cdot \frac{b_1}{b h_o}. \quad (5.19)$$

La contrainte τ_u ne doit pas dépasser les valeurs limites indiquées au tableau 5.1.

On admet que les armatures du hourdis constituant la table de compression peuvent jouer le rôle d'armatures de couture indépendamment de celui qu'elles jouent dans la résistance à la flexion du hourdis, à condition qu'elles soient convenablement ancrées de part et d'autre de la nervure. Si les armatures d'attache sont constituées par les armatures du hourdis et si $\alpha = 90^\circ$ et $\sigma_u = 0$, on a :

$$\frac{A_t f_e}{h_o S_t \gamma_s} \geq \frac{V_u b_1}{0,9 d b h_o}.$$

Ou encore avec $\gamma_s = 1,15$:

$$\frac{A_t}{S_t} \geq \frac{V_u b_1}{0,8 d b f_e} .$$

Donc, si A_{t1} est la section des armatures du hourdis par unité de longueur, on devra s'assurer que l'on a :

$$A_{t1} \geq \frac{V_u b_1}{0,8 d b f_e} . \quad (5.20)$$

2) *Liaison de la table tendue d'une poutre un T avec l'âme.*

De la même manière on peut déterminer la contrainte de cisaillement ultime dans une membrure inférieure à talon tendue :

$$\tau_u \geq \frac{V_u A_{t1}}{z A_s h_1} , \quad (5.21)$$

où A_s , la section des armatures longitudinales (fig. 5.11) ;

A_{t1} , la section des armatures transversales du talon.

Dans le cas usuel des armatures (cas des deux figures 5.11 et 5.12), la section des armatures de couture doit vérifier :

$$\frac{A_{t1} f_e}{S_t \gamma_s} \geq G_u ,$$

où G_u est l'effort de glissement unitaire égal à $\tau_u h_o$ pour la jonction hourdis-âme et à $\tau_u h_1$ pour le talon d'une poutre.

En général, les conditions précédentes (5.18 et 5.21) sont vérifiées. Si elles ne sont pas vérifiées, on doit renforcer la section des armatures résultant de calcul du hourdis à la flexion.

Les normes *B.A.E.L* précisent que l'on peut se dispenser de vérifier les armatures de couture à la liaison de la table comprimée et de la nervure, lorsque la poutre appartient à un plancher à charge d'exploitation modérée et lorsque la contrainte tangente τ_u est au plus égale à $0,025 f_{c28}$.

3) Dans certains cas, par exemple dans les poutres à talon, il peut arriver qu'une partie des armatures tendues ne soit pas entourée par les armatures transversales déterminées comme indiqué ci-dessus (calcul des sections inclinées). Il est alors nécessaire de prévoir dans le talon des cadres qui, pour des raisons pratiques de construction, sont placés dans les mêmes plans que les armatures transversales d'âme.

Soit A_s est la section totale des armatures tendues longitudinales du talon ;

A_{s1} , la section des armatures longitudinales situées dans l'une des saillies (2 barres dans le cas considéré, fig. 5.11) ;

A_{t1} , la section des armatures transversales du talon situées dans un même plan, c'est-à-dire la somme des sections des deux brins du cadre ;

A_t , la section des armatures transversales de l'âme situées dans un même plan ;

f_{et} , la limite élastique de l'acier constituant les armatures de l'âme ;

f_{et1} , la limite élastique de l'acier constituant le cadre.

Avec ces notations on devra avoir:

$$A_{t1} \geq (A_{s1} A_t f_{et}) / (A_s f_{et1}) \quad (5.22)$$

En général, l'acier constituant le cadre est le même que celui utilisé pour les armatures d'âme. Dans ces conditions on obtient :

$$A_{t1} \geq (A_{s1} \cdot A_t) / A_s.$$

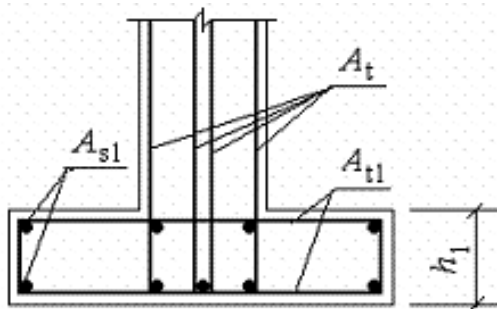


Fig.5.12

Sur la figure 5.12 les armatures du talon constituées par 9 barres de 20 mm de diamètre et les cadres formant les armatures d'âme par $\varnothing 8$ mm. L'acier du cadre étant de même nuance que celui des armatures d'âme. On aura donc :

$$A_s = 2828 \text{ mm}^2 \quad (9\varnothing 20 \text{ mm}),$$

$$A_{s1} = 628 \text{ mm}^2 \quad (2\varnothing 20 \text{ mm}), \quad A_t = 201 \text{ mm}^2 \quad (4\varnothing 8 \text{ mm}).$$

Avec ces valeurs on trouve:

$$A_{t1} > (628 \times 201) / 2828 = 44,6 \text{ mm}^2.$$

La section d'un brin de cadre étant $44,6 / 2 = 22,3 \text{ mm}^2$, prenons $\varnothing 6 \text{ mm}$ avec $28,3 \text{ mm}^2$. Les cadres en $\varnothing 6 \text{ mm}$ seront placés dans les mêmes plans que les armatures transversales d'âme.

5.3.2. Influence de l'effort tranchant au voisinage des appuis

Comme on a vu, au paragraphe 5.2, qu'il existe, dans les bielles de béton inclinées à 45° , des efforts de compression égaux à $V_u \sqrt{2}$, Il faut alors examiner ce qui se passe aux appuis.

1) Vérification de la compression du béton.

Soit, on pose que "a" étant la longueur d'appui de la bielle d'about (la valeur de "a" sera précisée par la suite) et b_o , la largeur de la nervure de la poutre. Alors la section droite de la bielle est :

$$S = a \cdot b_o / \sqrt{2},$$

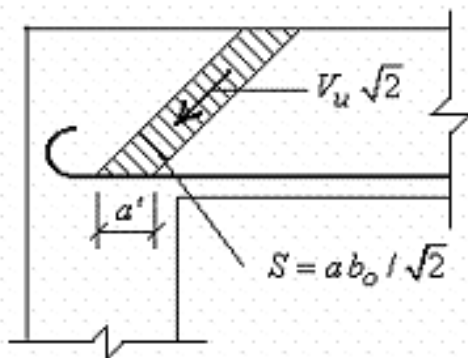


Fig.5.13

d'où la contrainte de la bielle :

$$\sigma_{bc} = V_u \sqrt{2} / S = 2 \cdot V_u / a \cdot b_o. \quad (5.23)$$

On doit avoir : $\sigma_{bc} \leq f_{cj} / \gamma_b$, mais pour tenir compte du fait que la bielle peut avoir une inclinaison légèrement différente de 45° , les règles D.A.E.L. considèrent que l'on doit avoir (en introduisant le coefficient 0,8) : $\sigma_{bc} \leq 0,8 f_{cj} / \gamma_b$.

Alors d'après (5.23) on a : $2 V_u \leq 0,8 a b_o f_{cj} / \gamma_b$,

d'où (avec $\gamma_b = 1,15$) :

$$V_u \leq 0,4 a b_o f_{cj} / \gamma_b = 0,267 a b_o f_{cj}. \quad (5.24)$$

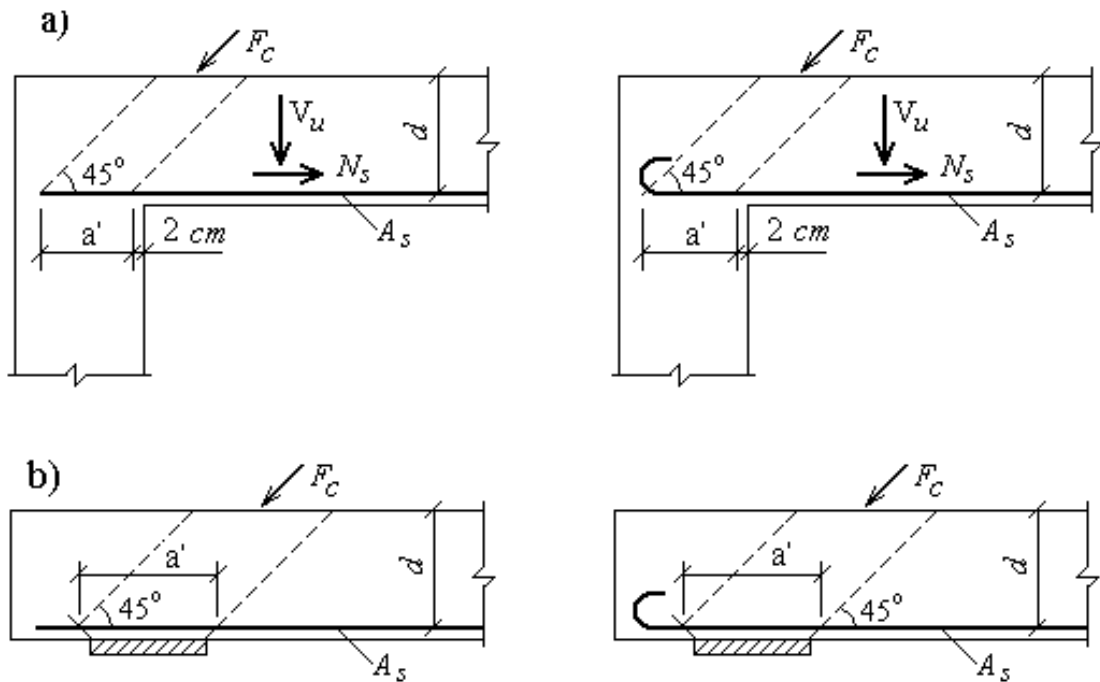


Fig. 5.14

- a - poutre à nervure rectangulaire reposant sur un poteau ou sur un mur;
 b - poutre à nervure rectangulaire reposant sur un appareil d'appui

Les valeurs à considérer pour a sont indiquées sur la fig. 5.14, avec au maximum, $a = 0,9 d$.

Sur un appui intermédiaire d'une poutre continue on vérifie, pour chacune des travées adjacentes, la condition:

$$V_u \leq 0,267 a b_o f_{cj}$$

En outre, on doit avoir la contrainte moyenne de compression de l'aire d'appui, σ_{bc} (contrainte déterminée en considérant la valeur de calcul ultime de la réaction) :

$$\sigma_{bc} \leq 1,3 f_{cj} / \gamma_b \quad \text{ou avec } \gamma_b = 1,5, \quad \sigma_{bc} \leq 0,867 f_{cj}$$

2) Vérification des armatures longitudinales.

L'influence de l'effort tranchant sur les armatures longitudinales inférieures peut être examiner de la manière suivante. Soit au nu d'un appui simple l'effort tranchant a une valeur V_u . A la force de

compression $V_u \sqrt{2}$, existant dans la bielle de béton à 45° , va s'opposer une réaction $V_u \sqrt{2}$ qui peut être décomposée en une force verticale V_u , équilibrée par les armatures transversales, et une force horizontale V_u qui devra être équilibrée par les armatures longitudinales.

Par conséquent, si dans la section située au nu de l'appui on n'a pas besoin d'armature longitudinale vis-à-vis du moment de flexion, par contre, la prise en compte de l'effort tranchant impose que l'on ait dans cette section des armatures longitudinales d'aire A_s , telle que :

$$A_s f_e / \gamma_s \geq V_u \quad \text{ou avec } \gamma_s = 1,15, \quad A_s \geq 1,15 V_u / f_e.$$

Ces armatures doivent être ancrées au-delà du nu de l'appui pour pouvoir équilibrer un effort égal à V_u .

S'il y a la force horizontale H éventuellement transmise par l'appui, on doit la prendre en compte, alors on aura :

$$A_s \geq 1,15 (V_u + H) / f_e \quad (5.25)$$

Quelle que soit la valeur de V_u , il est de bonne construction d'ancrer la nappe inférieure des armatures longitudinales avec sa longueur de scellement droit l_s , s'il s'agit d'un ancrage rectiligne, et avec une longueur de scellement équivalente, s'il s'agit d'un ancrage courbe.

Dans le cas d'un appui, au nu duquel existe un moment M_u (moment de continuité ou moment d'encastrement), la force $V_u \sqrt{2}$ aura toujours une composante horizontale V_u , mais à V_u s'opposera la résultante des compressions $F' = -M_u / z$ (vu que M_u est négatif). Pour mesure de simplification on prend $z = 0,9 d$, alors on a :

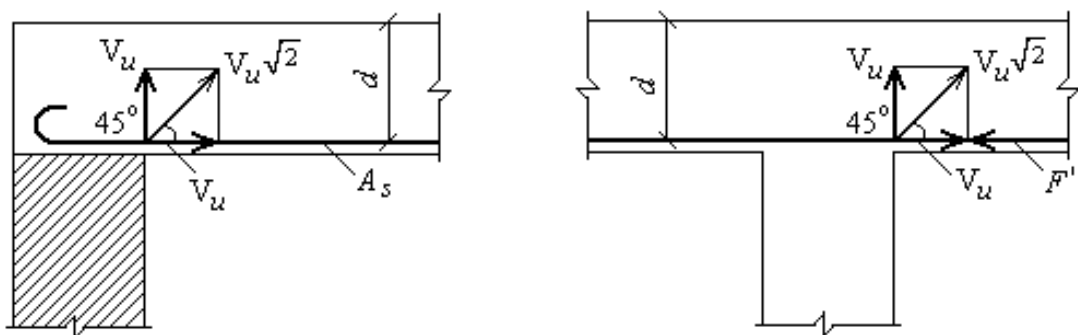


Fig. 5.15

- si $M_u / 0,9 d \geq V_u$, c'est-à-dire si $V_u - (M_u / 0,9 d) \leq 0$, les armatures longitudinales ne sont soumises à aucun effort de traction;

- si $M_u / 0,9 d < V_u$, c'est-à-dire si $V_u - (M_u / 0,9 d) > 0$, les armatures longitudinales inférieures sont soumises à un effort de traction : $V_u - (M_u / 0,9 d)$ et leur section A_s doit être telle que l'on ait :

$$A_s f_e / \gamma_s \geq V_u - (M_u / 0,9 d) \quad \text{ou avec } \gamma_s = 1,15 :$$

$$A_s \geq \frac{1,15}{f_e} \left(V_u - \frac{M_u}{0,9 d} \right). \quad (5.26)$$

5.3.3. Arrêt des armatures principales

Parfois afin d'économiser l'acier, on arrête les barres principales là où elles ne sont plus indispensables pour résister aux moments de flexion.

Soit une section d'abscisse x d'une poutre est soumise à l'action du moment de flexion M_1 et de l'effort tranchant V_1 (fig. 5.16).

Si le moment de flexion agissait seul, la force de traction sur les armatures tendues aurait pour valeur $N_s = M_1 / z$ (z est le bras de levier), mais on a vu (paragraphe 5.3.2), que l'effort tranchant avait pour effet d'ajouter une force de traction égale à V_1 . Alors on a donc :

$$N_s = (M_1 / z) + V_1 = (M_1 + V_1 z) / z. \quad (5.27)$$

Si on appelle M_2 le moment de flexion dans la section située à la distance " z " de la section d'abscisse x , alors on a que:

$$M_2 = M_1 + V_1 z \quad \text{et} \quad N_s = M_2 / z.$$

Par mesure de simplification on prend $z = 0,8 h$ (avec h , la hauteur total de la poutre).

Donc le moment M_2 remplace l'action simultanée du moment M_1 et de l'effort tranchant V_1 . Par conséquent, pour déterminer l'effort agissant sur les armatures tendues d'une section (soit section 1-1), il faut considérer le moment de flexion agissant dans une section située à $0,8 h$ de la section

considérée (soit section 2 - 2), cette distance étant mesurée dans la direction où le moment augmente en valeur absolue. Ainsi, pour déterminer des points d'arrêt des armatures longitudinales, on doit décaler la courbe enveloppe réelle des moments (courbe 1) de $0,8 h$ (courbe 2) vers le côté où les moments s'annulent. Cela est valable pour les armatures tendues ou comprimées.

Pour déterminer les moments résistants des sections on peut admettre, pour simplifier, que $z = 0,8 h$; alors ces moments résistants seront (soit les moments M_{r1}, M_{r2}, M_{r3} , fig. 5.17) :

$$M_{r1} = 0,8 h A_{s1} \sigma_s ;$$

$$M_{r2} = 0,8 h (A_{s1} + A_{s2}) \sigma_s ;$$

$$M_{r3} = 0,8 h (A_{s1} + A_{s2} + A_{s3}) \sigma_s.$$

Ensuite on trace, sur un graphique, la courbe enveloppe des moments de flexion et, à la même échelle, les droites horizontales correspondant aux valeurs obtenues pour M_{r1}, M_{r2} et M_{r3} .

On considère que les barres tendues se mettent progressivement en charge à partir de leur extrémité et que leur contrainte croît linéairement, de zéro à la valeur σ_s , sur une longueur égale à la longueur de scellement droit l_s , si les extrémités des barres ne sont pas munies de crochets, et sur une longueur égale à $0,6 l_s$ ou $0,4 l_s$, si les barres sont munies de crochets.

Le diagramme des moments résistants devant se trouver à l'extérieur de la courbe enveloppe réelle, on en déduit les points d'arrêt des armatures comme indiqué sur la figure 5.17.

Aux longueurs ainsi déterminées on ajoute, à chaque extrémité de la barre, si celle-ci ne s'étend pas jusqu'aux appuis, une longueur égale à $0,8 h$. Cette méthode revient à décaler de $0,8 h$ la courbe enveloppe des moments.

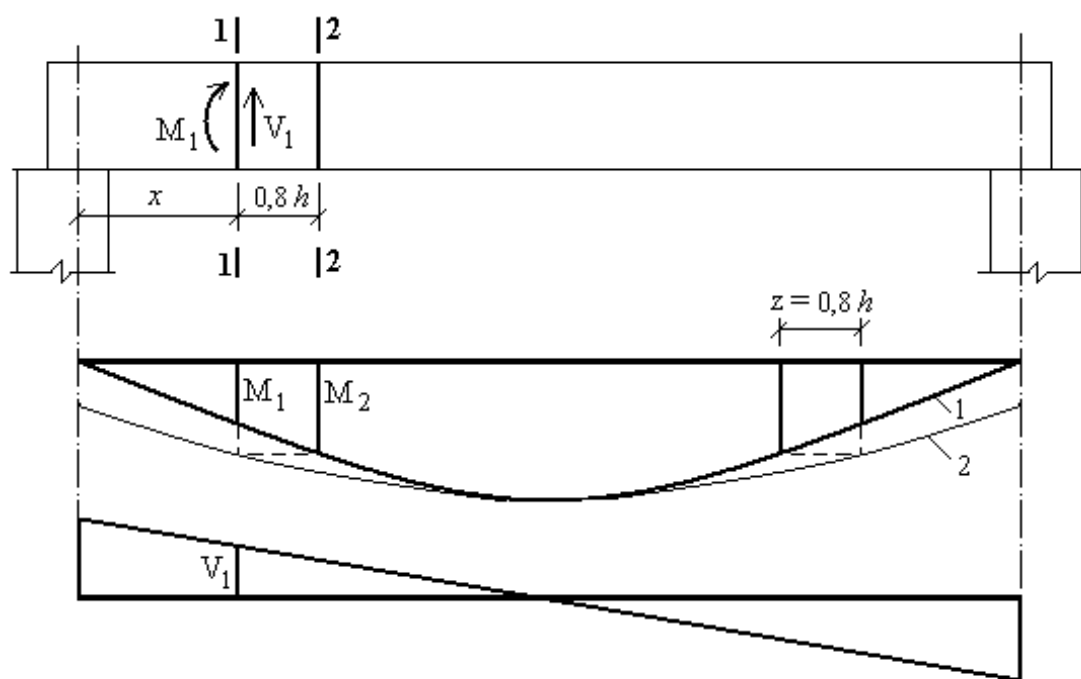


Fig.5.16

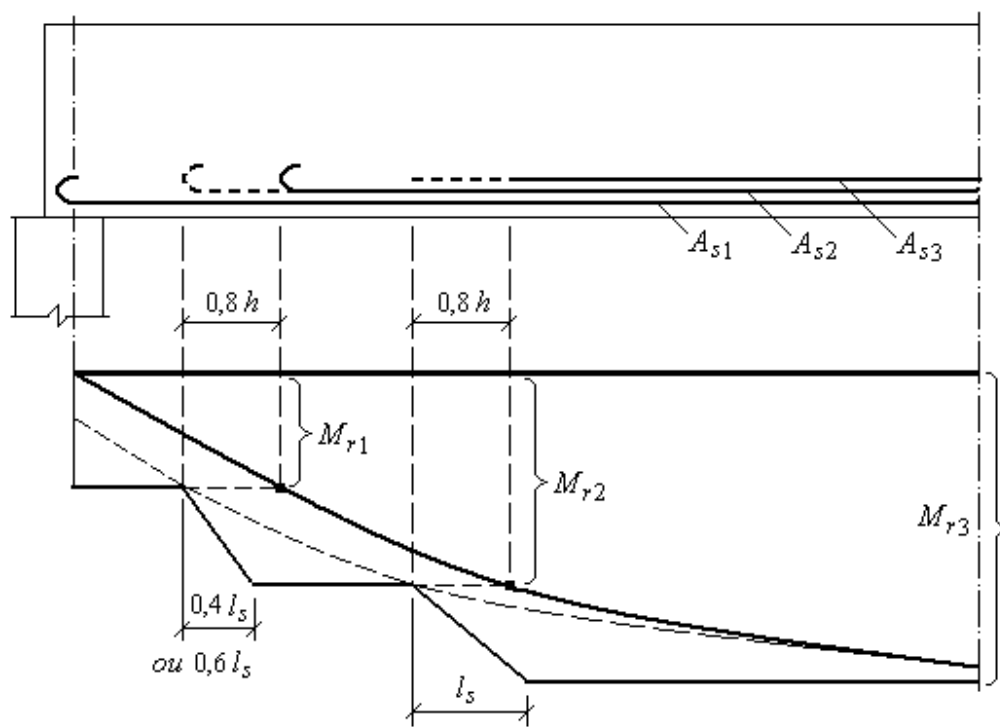


Fig.5.17

Comme indiqué au paragraphe 5.3.2, il est nécessaire de prolonger jusqu'aux appuis, et de les y ancrer, des armatures susceptibles d'équilibrer un effort égal à $V_u + M_u / 0,9 d$ (M_u est pris avec son signe).

En ce qui concerne les armatures tendues situées à la partie supérieure de la poutre, on procédera de la même manière que pour les armatures inférieures. Les longueurs des barres, déterminées par les points d'arrêt théorique, doivent également être prolongées de $0,8 h$.

Pour les poutres de planchers à charge d'exploitation modérées, (lorsque cette charge est uniformément répartie et inférieure à la charge permanente, et lorsque les longueurs des travées successives sont dans un rapport compris entre 0,8 et 1,25), les chapeaux sur appuis doivent avoir une longueur telle que le débord par rapport au nu de l'appui soit supérieur :

- au cinquième de la longueur de la plus grande travée voisine si l'appui n'appartient pas à une travée de rive ;
- au quart de la longueur de la plus grande travée voisine si l'appui appartient à une travée de rive.

Dans la pratique, en raison des coûts de façonnage, les crochets terminant ces chapeaux sont fréquemment remplacés par des sur-longueurs droites.

Pour les armatures inférieures, la moitié au moins de leur section nécessaire en travée, doit être prolongée jusqu'aux appuis et les armatures de second lit peut être arrêtées à une distance des appuis au plus égale au dixième de la longueur de la travée considérée (fig. 5.18).

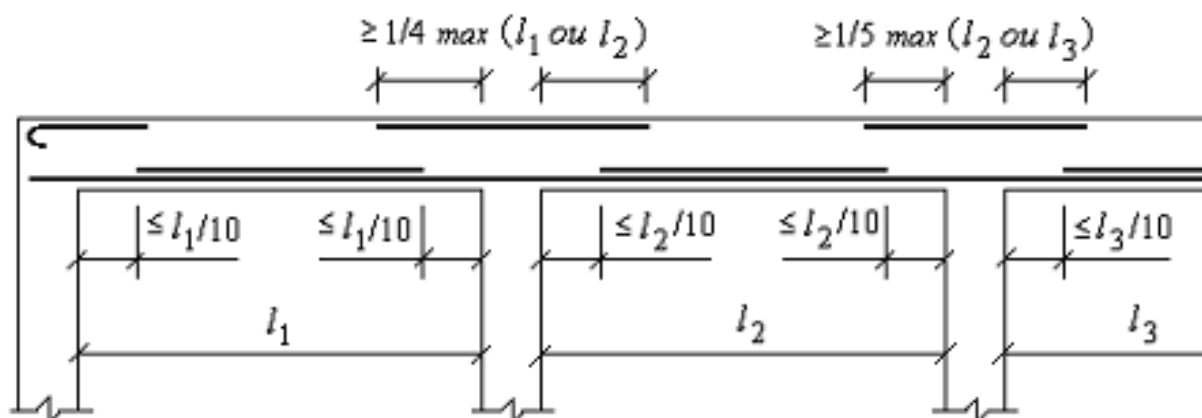
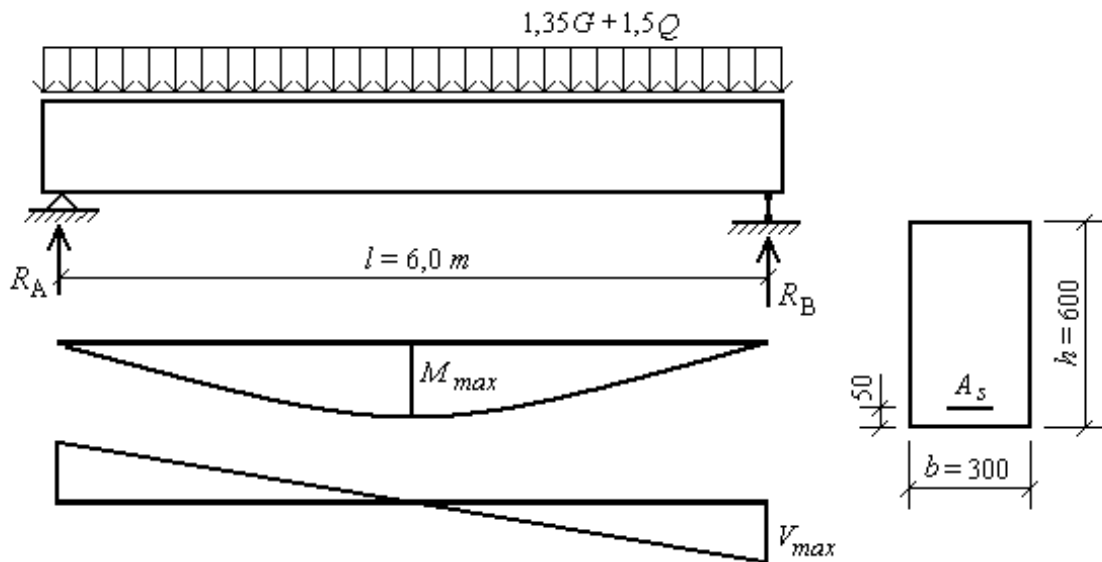


Fig. 5.18. Règle forfaitaire de disposition des armatures

Exemple 5.3.

Une poutre de section rectangulaire de dimensions $b \times h = 300 \times 600 \text{ mm}$ et de la portée $l = 6 \text{ m}$ est soumise à l'action des charges uniformément réparties: permanentes $G = 26,6 \text{ kN/m}$, utiles $Q = 24 \text{ kN/m}$ (les valeurs caractéristiques des charges). La poutre est armée par des armatures longitudinales en acier $Fe E 400$ et par des armatures transversales en acier $Fe E 215$. Le béton a la résistance caractéristique $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$ ($f_{bc} = 0,85 f_{c28} / \gamma_b = 11,3 \text{ MPa}$). On demande de calculer des armatures longitudinales et transversales de la poutre.

**Fig. 5.19****Solution.**

1) *Calcul des armatures longitudinales.* Les charges de calcul sont:

$$1,35 G + 1,5 Q = 1,35 \times 26,6 + 1,5 \times 24 = 71,9 \text{ kN/m.}$$

Le moment de flexion de la poutre (au milieu de la travée) :

$$M_u = (1,35 G + 1,5 Q) l^2 / 8 = 71,9 \times 6^2 / 8 = 323,55 \text{ kN m.}$$

En supposant que la poutre est armée par des armatures dans la zone tendue seulement, et que le béton comprimé atteint les contraintes limites f_{bc} , on détermine la valeur :

$$\mu = \frac{M_u}{f_{bc} b d^2} = \frac{323,55 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 300 \cdot 550^2} = 0,315.$$

Vu que $\mu = 0,315 < \mu_l = 0,392$ (tableau A.1), la poutre est armée par des armatures de calcul dans la zone tendue seulement. De plus, on a que $0,186 < \mu = 0,315 < \mu_l$, donc le diagramme des déformations passe par le point B (domaine 2) et les contraintes des armatures tendues est prises égales à la valeur limite :

$$\sigma_s = f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa.}$$

Le tableau A.3 nous donne $\beta = 0,804$; $\alpha = 0,49$.

La section exigée des armatures longitudinales de la zone tendue sera :

$$A_s = \frac{M_u}{\beta d \sigma_s} = \frac{323,55 \cdot 10^6}{0,804 \cdot 550 \cdot 348} = 2102 \text{ mm}^2$$

On prend $3 \text{ } \emptyset 20 + 3 \text{ } \emptyset 22$ avec $A_s = 2082 \text{ mm}^2$.

On a que la section des armatures réelle (2082 mm^2) est un peu inférieure à celle exigée (2102 mm^2). Cette différence est égale à :

$$\frac{2082 - 2102}{2102} 100\% = -0,95\%$$

ce qui est admissible. Pour créer les carcasses spatiales, nous disposons dans la zone comprimée $3 \text{ } \emptyset 12$ avec $A'_s = 339 \text{ mm}^2$ (fig. 5.20).

2) *Calcul des armatures transversales.* L'effort tranchant maximal est égal à :

$$V_{max} = V_{u(o)} = (1,35 G + 1,5 Q) l / 2 = 71,9 \times 6 / 2 = 215,7 \text{ kN.}$$

Les dimensions de la section transversale de la poutre sont vérifiées d'après la résistance à l'écrasement des bielles de béton comprimé. Cette résistance (pour des poutres avec armatures verticales, donc quand $\alpha = 90^\circ$, et la fissuration est non préjudiciable) est suffisante, si les conditions suivantes sont satisfaites:

$$\tau_u = V_{u(o)} / b_o d \leq 0,2 f_{cj} / \gamma_b = 0,2 \times 20 / 1,5 = 2,67 \text{ MPa} ;$$

$$\tau_u = V_{u(o)} / b_o d \leq 5 \text{ MPa.}$$

Dans le cas considéré la contrainte tangente est égale à:

$$\tau_u = V_{u(o)} / b_o d = 215,7 \cdot 10^3 / 300 \times 550 = 1,31 \text{ MPa.}$$

Donc nous avons que les conditions sont satisfaites, en effet :

$$2,67 \text{ MPa} > \tau_u = 1,31 \text{ MPa} < 5 \text{ MPa,}$$

c'est-à-dire que les dimensions de la section transversale de la poutre sont suffisantes.

Les armatures transversales de la poutre sont calculées d'après l'effort tranchant $V_{u(h/2)}$ (à la distance $h/2$ de l'appui) :

$$V_{u(h/2)} = V_{max} - (1,35 G + 1,5 Q) 0,5 h = 215,7 - 71,9 \times 0,5 \times 0,6 = 194,1 \text{ kN.}$$

Le coefficient de ferrailage de la section inclinée est calculé à l'aide de la formule 5.12 (en y remplaçant $0,8 f_e$ par $0,9 f_e / \gamma_s$) :

$$\rho_t = \frac{A_t}{b_o S_t} \geq \frac{\tau_u - 0,3 f_{tj}^*}{0,9 f_e / \gamma_s}$$

avec $f_{tj}^* \leq 3,3 \text{ MPa}$ et $f_{tj}^* \leq f_{t28} = 1,8 \text{ MPa}$ (tableau 1.1).

Donc on prend $0,3 f_{tj}^* = 0,3 \times 1,8 = 0,54 \text{ MPa}$.

La contrainte tangente à la distance $h/2$ de l'appui est égale à :

$$\tau_u = V_u(h/2) / b_o d = 194,1 \times 10^3 / 300 \times 550 = 1,176 \text{ MPa}.$$

Comme armature transversale on utilise des étriers en acier de nuance $Fe E 215$ (acier lisse), $f_e = 215 \text{ MPa}$.

Alors, on trouve :

$$\rho_t = \frac{1,176 - 0,54}{0,9 \cdot 215 / 1,15} = 0,00378.$$

Cette valeur de ρ_t doit être au moins égale aux valeurs minimales :

$$\rho_{t,min} = 0,5 \tau_u / f_e = 0,5 \times 1,176 / 215 = 0,00273 ;$$

$$\rho_{t,min} = 0,4 / f_e = 0,4 / 215 = 0,00186.$$

Donc on prend $\rho_t = 0,00378$.

Comme armature transversale nous prenons des étriers en acier de $\varnothing 8 \text{ mm}$ de diamètre (d'après la condition $\varnothing_t > \varnothing_l / 3 = 22 / 3 = 7,3 \text{ mm}$). Vu que dans une section transversale on a 3 barres verticales, on trouve : $A_t = 151 \text{ mm}^2$.

Alors, l'espacement des étriers est égal à :

$$S_t = A_t / \rho_t b_o = 151 / (0,00378 \times 300) = 133 \text{ mm}.$$

Cet espacement ne dépasse pas des valeurs maximales :

$$S_t \leq 0,9 d = 495 \text{ mm}, \quad S_t \leq 400 \text{ mm}.$$

Donc nous prenons $S_t = 130 \text{ mm}$.

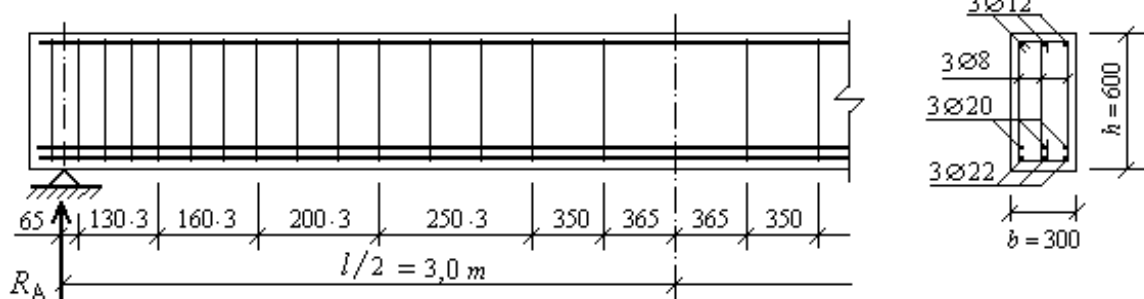


Fig.5.20

La répartition des étriers suivant la longueur de la poutre est prise d'après la méthode pratique de Caquot. Le premier cadre doit être placé entre le nu de l'appui et $S_f / 2 = 13 / 2 = 6,5 \text{ cm}$. Les cadres suivants sont disposés à la distance 13 cm de l'un à l'autre, cet espacement doit être répété de 3 fois (vu que la moitié de la portée de la poutre $l / 2 = 6 / 2 = 3 \text{ m}$). L'espacement des cadres suivants est 16 cm (3 fois), ensuite 20 cm (3 fois), 25 cm (3 fois).

3) *Arrêt des armatures principales.* Pour diminuer la consommation des aciers, on peut arrêter une partie des armatures en travée là où on n'a pas besoin de ces armatures pour assurer la résistance aux moments de flexion.

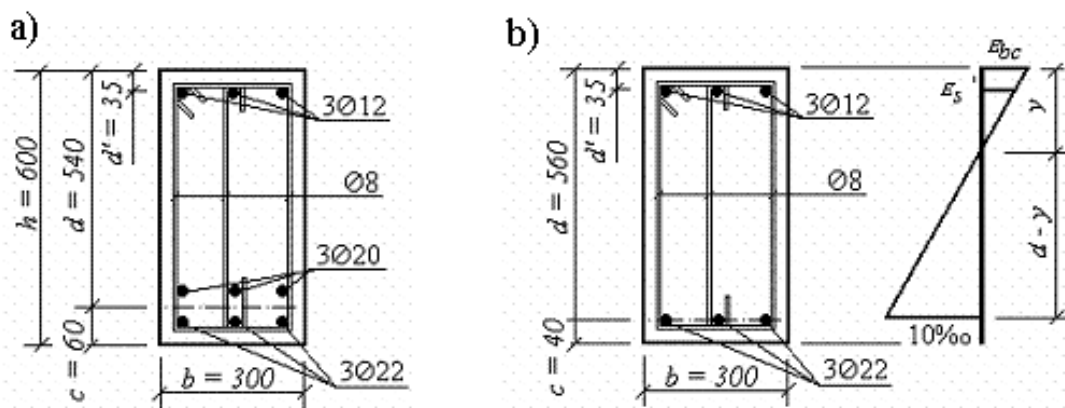


Fig.5.21

Dans notre cas la poutre est armée dans la zone tendue par 6 barres (3 $\text{Ø} 22 \text{ mm}$ et 3 $\text{Ø} 20 \text{ mm}$). On a décidé d'arrêter 3 $\text{Ø} 20 \text{ mm}$ (3 $\text{Ø} 22 \text{ mm}$ sont prolongée jusqu'à l'appui). Calculons le moment M_{r1} (repris par la section avec des armatures totales) et le moment M_{r2} (repris par la section avec 3 $\text{Ø} 22 \text{ mm}$). Précisons la distance « c » (fig.5.21) : $c = 25 + 22 + 25 / 2 = 59,5 \text{ mm}$, soit, on prend $c = 60 \text{ mm}$.

Calcul du moment M_{r1} . Pour une section considérée on peut écrire :

$$N_b + N_s' - N_s = 0.$$

Si on pose $\sigma_s = \sigma_s' = 348 \text{ MPa}$; $f_{bc} = 11,3 \text{ MPa}$ et $d = h - c = 540 \text{ mm}$, on peut déterminer la hauteur de la zone comprimée du béton :

$$f_{bc} b 0,8 y + \sigma_s' A_s' - \sigma_s A_s = 0, \text{ d'où}$$

$$y = \frac{\sigma_s A_s - \sigma_s' A_s'}{0,8 f_{bc} b} = \frac{348 \cdot 2082 - 348 \cdot 339}{0,8 \cdot 11,3 \cdot 300} = 223 \text{ mm} .$$

La hauteur relative de la zone comprimée du béton est :

$$\alpha = y/d = 223 / 540 = 0,413.$$

$$\mu = 0,8 \alpha (1 - 0,4 \alpha) = 0,8 \times 0,413 (1 - 0,4 \times 0,413) = 0,276.$$

On a que $\mu = 0,276 < \mu_l = 0,392$, donc on est dans le domaine 2, alors $1000 \varepsilon_s > 1000 \varepsilon_l$ et $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 348 \text{ MPa}$. D'autre côté on a que $\varepsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$ (on est dans le domaine 2), alors on peut déterminer les déformations des armatures de la zone comprimée :

$$\frac{3,5}{1000 \varepsilon'_s} = \frac{y}{y - d'}; \quad \text{d'où : } 1000 \varepsilon'_s = \frac{3,5(y - d')}{y} = \frac{3,5(223 - 35)}{223} = 2,95.$$

Pour $1000 \varepsilon'_s = 2,95 > 1000 \varepsilon_l = 1,739$, on prend $\sigma'_s = f_e / \gamma_s = 348 \text{ MPa}$.

Avec ces valeurs on peut calculer le moment M_{r1} (repris par la section avec des armatures totales $A_s = 2081 \text{ mm}^2$ dans la zone tendue, et $A'_s = 339 \text{ mm}^2$ dans la zone comprimée) :

$$\begin{aligned} M_{r1} &= 0,8 y b f_{bc} (d - 0,4 y) + \sigma'_s A'_s (d - d') = \\ &= 0,8 \times 223 \times 300 \times 11,3 (540 - 0,4 \times 223) + 348 \times 339 (540 - 35) = \\ &= 332,2 \times 10^6 \text{ N mm} = 332,2 \text{ kN m}. \end{aligned}$$

Donc on a que $M_{r1} = 332,2 \text{ kN m} > M_u = 323,55 \text{ kN m}$.

Calcul du moment M_{r2} . La distance $c = 40 \text{ mm}$. La section est armée par 3 $\varnothing 22 \text{ mm}$ dans la zone tendue avec la section $A_{s1} = 1140 \text{ mm}^2$, et par 3 $\varnothing 12 \text{ mm}$ dans la zone comprimée avec $A'_s = 339 \text{ mm}^2$. Dans ce cas on calcule (avec $d = h - c = 600 - 40 = 560 \text{ mm}$) :

$$y = \frac{\sigma_s A_s - \sigma'_s A'_s}{0,8 f_{bc} b} = \frac{348 \cdot 1140 - 348 \cdot 339}{0,8 \cdot 11,3 \cdot 300} = 102,8 \text{ mm},$$

$$\alpha = y/d = 102,8/560 = 0,183, \quad \text{alors, } \mu = 0,136 \text{ (tableau A.3)}$$

Vu que : $\mu = 0,136 < \mu_l = 0,392$ et que : $\mu = 0,136 < 0,186$, il se trouve dans le domaine 1, alors : $\varepsilon_s = 10 \text{ ‰}$ et $\varepsilon_{bc} < 3,5 \text{ ‰}$. La contrainte des armatures de la zone tendue est prise égale à : $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 348 \text{ MPa}$. Les déformations du béton comprimé peuvent être déterminées à l'aide du diagramme (fig.5.21) :

$$\frac{\varepsilon_{bc}}{10} = \frac{y}{d-y};$$

$$\varepsilon_{bc} = 10 y / (d-y) = (10 \times 102,8) / (560 - 102,8) = 2,24 \text{ ‰}.$$

Vu que $\varepsilon_{bc} = 2,24 \text{ ‰} > 2 \text{ ‰}$, on prend $f_{bc} = 0,85 f_{c28} / \gamma_b = 11,3 \text{ MPa}$.

Pour déterminer la contrainte des armatures de la zone comprimée on calcule les déformations de ces armatures :

$$1000 \varepsilon_s' = \varepsilon_{bc} (y - d') / y = 2,24 (102,8 - 35) / 102,8 = 1,477.$$

On a que $1000 \varepsilon_s' = 1,477 < 1000 \varepsilon_l = 1,739$, alors la contrainte est égale à :

$$\sigma_s' = \varepsilon_s' E_s = 1,477 (2 \times 10^5) / 1000 = 295 \text{ MPa}.$$

Avec ces valeurs on a :

$$\begin{aligned} M_{r2} &= 0,8 y b f_{bc} (d - 0,4 y) + \sigma_s' A_s' (d - d') = \\ &= 0,8 \times 102,8 \times 300 \times 11,3 (560 - 0,4 \times 102,8) + 295 \times 339 (560 - 35) = \\ &= 197,16 \times 10^6 \text{ Nmm} = 197,16 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

Le point d'intersection de la ligne droite correspondante à M_{r2} avec le diagramme des moments dû aux charges appliquées, donne le point d'arrêt théorique des armatures, c'est-à-dire l'endroit où théoriquement on peut arrêter des armatures dont on n'a plus besoin.

La distance de l'appui au point d'arrêt théorique peut être déterminée graphiquement (fig. 5.22) ou elle peut être calculée de la manière suivante.

Le moment fléchissant à la distance "x" de l'appui est exprimé par:

$$M_x = V_{max} x - (1,35 G + 1,5 Q) x^2 / 2.$$

En remplaçant M_x par le moment de section M_{r2} et l'effort tranchant V_{max} par $V_{max} = (1,35 G + 1,5 Q) l / 2$, on peut écrire :

$$M_{r2} = \frac{(1,35 G + 1,5 Q) l x}{2} - \frac{(1,35 G + 1,5 Q) x^2}{2},$$

$$\text{d'où } x^2 - l x + \frac{2 M_{r2}}{(1,35 G + 1,5 Q)} = 0;$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{2 M_{r2}}{(1,35 G + 1,5 Q)}} = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - \frac{2 \cdot 197,16}{71,9}} = \\ &= 3 \pm 1,87. \quad \text{Alors } x_1 = 1,13 \text{ m}; \quad x_2 = 4,87 \text{ m}. \end{aligned}$$

Pour tenir compte de l'influence des efforts tranchants on doit déplacer le point d'arrêt théorique à la distance $0,8 h = 0,8 \times 0,6 = 0,48 m$ vers l'appui.

Donc le point d'arrêt pratique des barres se trouve à des distances:

- de l'appui gauche $x_1 - 0,8 h = 1,13 - 0,48 = 0,65 m$;

- de l'appui droit $l - x_1 + 0,8 h = 6,0 - 4,87 + 0,48 = 0,65 m$.

On doit également vérifier la longueur de scellement des barres qu'on va arrêter :

$$l_s = 40 \varnothing = 40 \times 0,02 = 0,8 m.$$

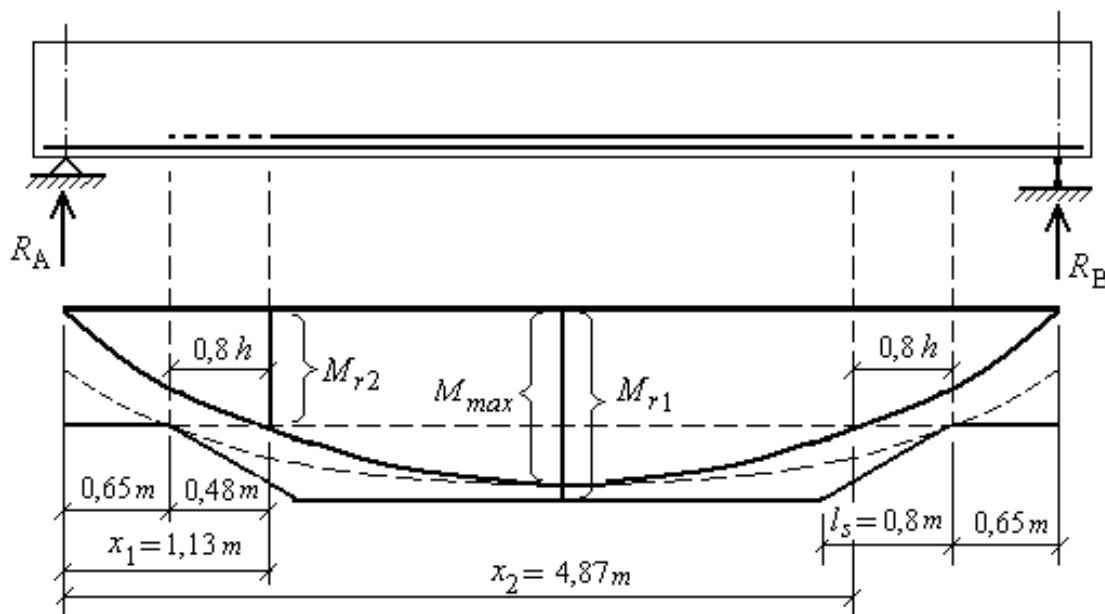


Fig. 5.22

CHAPITRE 6. JUSTIFICATION DES SECTIONS AUX ETATS - LIMITES DE SERVICE

Généralités

Les états-limites de service sont des états au-delà desquels la structure (ou un élément de la structure) est mise hors service, c'est-à-dire qu'elle n'est plus satisfaite les conditions normales d'exploitation. Concernant ces états-limites de service, les vérifications portent sur :

- un état-limite de compression du béton ;
- un état-limite d'ouverture des fissures ;
- un état-limite de déformation.

Dans les calculs relatifs aux états-limites de service (les sollicitations étant obtenues à l'aide de la combinaison d'action correspondant à l'état-limite de service), on admet les hypothèses suivantes :

1) Les sections droites, planes avant déformation, restent planes après déformation. On a vu qu'il résultait de cette hypothèse, que le diagramme des déformations était représenté par une droite et que la déformation d'une fibre était proportionnelle à sa distance à l'axe neutre.

2) Il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures et le béton.

3) Le béton tendu est négligé.

4) Le béton et l'acier sont considérés comme des matériaux linéairement élastiques, c'est-à-dire que la contrainte est proportionnelle à la déformation, donc $\sigma = E \varepsilon$.

5) Par convention, le rapport entre les coefficients d'élasticité longitudinale de l'acier et du béton ou coefficient d'équivalence, est pris égal à $n = E_s / E_b = 15$.

6) On ne déduit pas dans les calculs les aires des aciers de l'aire du béton comprimé. On suppose en outre que la section d'acier est concentrée en son centre de gravité, pourvu que l'erreur ainsi commise sur les déformations unitaires ne dépasse pas 15 %.

Les hypothèses indiquées ci dessus sont celles qui étaient admises dans les règlements ayant précédé les règles *B.A.E.L*, et en particulier, dans les règles *CCBA-68*. Elles permettent d'appliquer au béton armé les formules de la résistance des matériaux établies pour les corps homogènes, il suffit pour cela d'homogénéiser les sections de béton armé. Cette homogénéisation s'obtient:

- en remplaçant une section d'acier d'aire A_s par une section de béton d'aire $n A_s = 15 A_s$, ayant même centre de gravité que la section d'acier considérée ;

- en admettant que chaque élément d'aire de béton conserve sa valeur géométrique dans la zone comprimée de la section et a une valeur nulle dans la zone tendue.

Dans ces conditions, on désigne par :

S , l'aire de la section homogénéisée ;

B_c , l'aire de la section du béton comprimé ;

B , l'aire de la section totale du béton ;

A_s' , la section totale des armatures comprimées ;

A_s , la section totale des armatures tendues.

Alors on a :

- dans le cas d'une section entièrement comprimée (fig. 6.1,a) :

$$S = B + 15 A_s' ;$$

- dans le cas d'une section partiellement comprimée (fig. 6.1,b) :

$$S = B_c + 15 A_s' + 15 A_s.$$

Sur la figure 6.2 soit $a_1 b_1$ est le diagramme des déformations pour la section considérée. Ce diagramme des déformations était constitué par une droite et par conséquent, la déformation $m m_1$ d'une fibre située à la distance y de l'axe neutre était proportionnelle à y , donc $m m_1 = k y$.

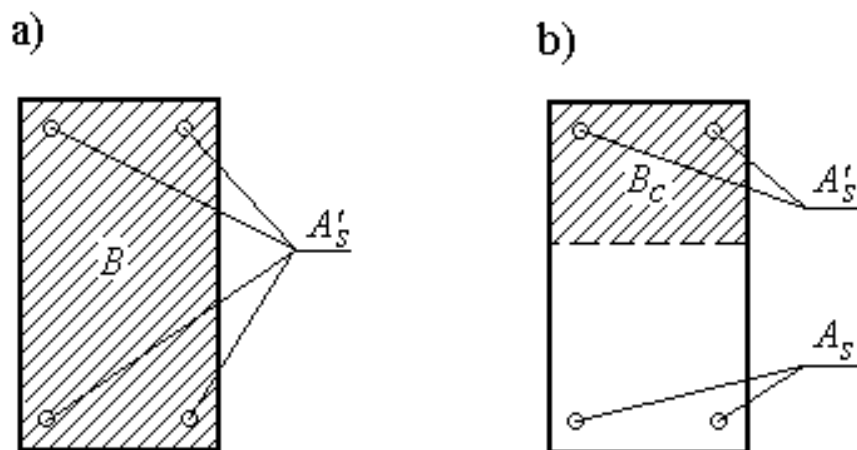


Fig. 6.1

Alors, dans cette fibre, en supposant d'abord qu'il s'agisse d'une fibre de béton, on a :

$$\sigma_b = E_b \varepsilon = E_b m m_1 = k y E_b = K y. \quad (6.1)$$

Donc, avec les hypothèses considérées, la contrainte dans une fibre est également proportionnelle à la distance de cette fibre à l'axe neutre et, par conséquent, le diagramme des contraintes, comme le diagramme des déformations, est représenté par une droite (ligne $a_2 b_2$). Si on suppose qu'en m on a une fibre d'acier, on aura alors :

$$\begin{aligned} \sigma_s &= E_s \varepsilon_s = E_s m m_1, \text{ d'où :} \\ \sigma_s &= E_s m m_1 = (E_s / E_b) E_b m m_1 = n k y E_b = n \sigma_b. \end{aligned} \quad (6.2)$$

D'après les hypothèses de calcul $n = 15$, donc $\sigma_s = 15 \sigma_b$.

Donc la contrainte dans une fibre d'acier est égale à 15 fois la contrainte qui existerait dans la fibre de béton qui aurait le même centre de gravité. Si on suppose que la droite $a_2 b_2$ représente la contrainte des fibres de béton, c'est-à-dire que, pour une fibre quelconque, on a $m m_2 = \sigma_b$. Dans ces conditions on obtient :

- en $a a_2$, la contrainte σ_b de la fibre la plus comprimée ;
- en $c c_2$, la contrainte $\sigma_s' / 15$, σ_s' étant la contrainte de compression des armatures comprimées lorsqu'elles existent ;
- en $b b_2$, la valeur de $\sigma_s / 15$, σ_s étant la contrainte de traction des armatures tendues.

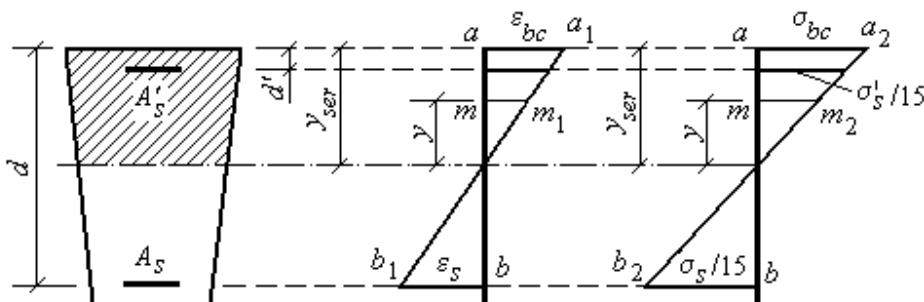


Fig. 6.2

6.1. Calcul des contraintes à l'état-limite de service

6.1.1. Principe du calcul des contraintes dans le cas général

Les contraintes de compression du béton et de traction des armatures tendues pour état-limite de service ne doivent pas dépasser les valeurs limites. Ces valeurs limites sont prises égales

$$\sigma_{bc} = \bar{\sigma}_{bc} = 0,6 f_{bc} \text{ pour le béton comprimé ;}$$

$$\sigma_s = \bar{\sigma}_s \text{ pour les armatures tendues (les valeurs limites de } \bar{\sigma}_s \text{ sont données au paragraphe 6.3).}$$

La limitation de la compression du béton correspond à un état-limite de formation de fissures parallèles à la direction des contraintes de compression. Cette règle est susceptible d'être prépondérante pour les sections rectangulaires fléchies, surtout si elles comportent des pourcentages d'armatures élevées (à titre indicatif : $A_s / b d \approx 0,015$).

Pour les poutres à section rectangulaire soumises à la flexion simple dont les armatures sont en acier de classe *Fe E 400*, il peut être admis de ne procéder à la vérification de la contrainte de compression du béton lorsque la hauteur relative de l'axe neutre (y_u / d) à l'état-limite ultime est au plus égale à $(\gamma - 1) / 2 + 0,01 f_{cj}$, où γ désigne le rapport du moment agissant ultime au moment agissant de service ($\gamma = M_u / M_{ser}$) et f_{cj} la résistance caractéristique du béton exprimée en mégapascals.

Les contraintes des armatures tendues sont limitées pour éviter la probabilité d'apparition de fissures d'une largeur supérieure à celle qui est tolérable en raison du rôle et de la situation de l'ouvrage. Dans tous les cas, il convient de bien répartir les armatures ; il faut avoir recours à des pourcentages suffisants d'armatures tendues et proportionner leur diamètre aux dimensions transversales des pièces; en général, il faut utiliser le plus petit diamètre, c'est-à-dire le plus grand nombre de barres, compatible avec une mise en place correcte du béton, sans nécessiter d'accroissement injustifié des dimensions transversales des pièces.

Lorsque la section étudiée sera *entièrement comprimée* ou *entièrement tendue*, c'est-à-dire lorsque l'axe neutre se trouvera à

l'extérieur de la section il suffira d'appliquer directement les formules de la Résistance des Matériaux à :

- la section homogénéisée si elle est entièrement comprimée ;
- la section donnée si elle est entièrement tendue puisque, dans ce cas, on se trouve déjà en présence d'une section homogène étant donné que le béton tendu est négligé.

Lorsque la section donnée sera *partiellement comprimée*, c'est-à-dire lorsque l'axe neutre se trouvera à l'intérieur de la section, on appliquera les formules qui ne sont que l'expression de la forme pratique des formules de la résistance des matériaux, appliquées à la section homogène dont le béton tendu est négligé.

Ces formules sont basées sur les conditions suivantes. Si on appelle α l'angle de $a_2 b_2$ avec $a b$ (fig.6.2), $K = \text{tg } \alpha$ on a :

$$\sigma_{bc} = K y; \quad \sigma_s' = 15 K (y - d'); \quad \sigma_s = 15 K (d - y). \quad (6.3)$$

Donc on peut calculer : σ_{bc} , σ_s' , et σ_s dès que K et y seront connus. Pour déterminer K et y , on considère les sections bien déterminées (rectangulaires, en T ou autres) soumises à la flexion simple ou composée, traction simple ou compression simple.

6.1.2. Détermination des contraintes en cas de flexion simple

1) *Pour une section rectangulaire* soumise à la flexion simple sous l'effet d'un moment M_{ser} , on peut déterminer les valeurs K et y_{ser} (soit y_{ser} la hauteur du béton de la zone comprimée pour état limite de service) d'après les conditions d'équilibre statique :

$$\Sigma x = 0, \quad \Sigma M = 0.$$

Les efforts agissants dans la section (fig. 6.3) à l'état-limite de service sont :

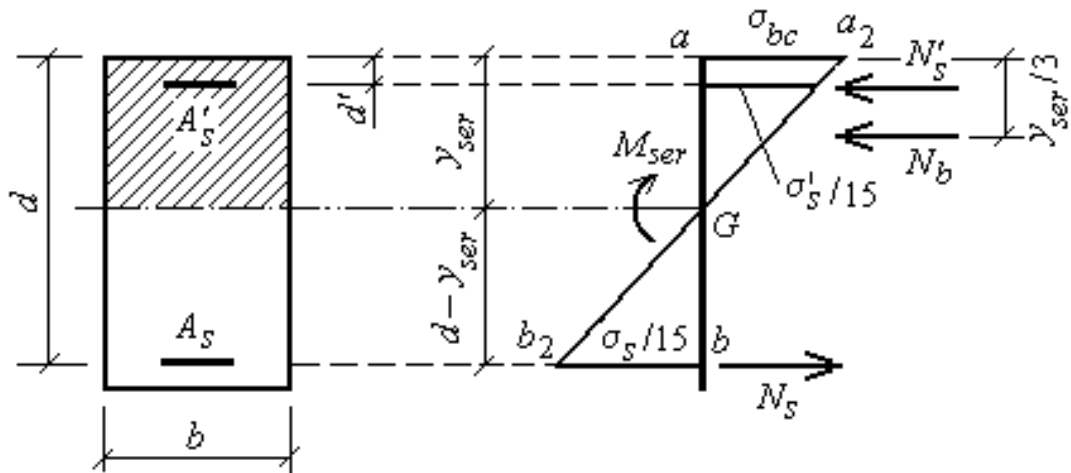


Fig. 6.3

$$\begin{aligned}
 N_b &= b y_{ser} \sigma_{bc} / 2 = K b y_{ser}^2 / 2 ; \\
 N'_S &= A'_S \sigma'_S = 15 A'_S K (y_{ser} - d') ; \\
 N_S &= A_S \sigma_S = 15 A_S K (d - y_{ser}).
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Alors, $\Sigma x = 0$, $N_S - N_b - N'_S = 0$ ou encore

$$\begin{aligned}
 15 A_S K (d - y_{ser}) - K b y_{ser}^2 / 2 - 15 A'_S K (y_{ser} - d') &= 0 ; \\
 b y_{ser}^2 + 30 (A'_S + A_S) y_{ser} - 30 (d' A'_S + d A_S) &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

D'après cette équation (6.5) on trouve y_{ser} (la racine positive de cette équation).

En prenant la somme des moments par rapport au point G on a:

$$\Sigma M = 0 ; \quad M_{ser} - N_b (2 y_{ser} / 3) - N'_S (y_{ser} - d') - N_S (d - y_{ser}) = 0.$$

En remplaçant N_b , N'_S et N_S par leurs valeurs, on obtient :

$$M_{ser} / K = b y_{ser}^3 / 3 + 15 A'_S (y_{ser} - d')^2 + 15 A_S (d - y_{ser})^2.$$

On pose :

$$I = b y_{ser}^3 / 3 + 15 A'_S (y_{ser} - d')^2 + 15 A_S (d - y_{ser})^2. \tag{6.6}$$

Donc I est le moment d'inertie de la section homogène réduite (qui est composée du béton comprimé et des armatures).

Alors on peut écrire :
$$K = M_{ser} / I, \quad (6.7)$$

où I est le moment d'inertie, par rapport à l'axe neutre, de la section rendue homogène, c'est-à-dire de la section obtenue en négligeant le béton tendu et en amplifiant 15 fois la section des armatures.

On pourrait faire un raisonnement analogue pour les autres types de section et pour la flexion composée.

Notons que pour les états-limites de service les sollicitations à envisager sont différentes de celles considérées pour les états-limites ultimes, puisque les combinaisons d'actions à retenir ne sont pas les mêmes dans les deux cas (formules 2.1 et 2.3).

2) Pour une section en T, il faut distinguer deux cas selon que l'axe neutre tombe dans la table ou dans la nervure.

a) l'axe neutre tombera dans la table si :

$$b h_o^2 + 30 A_s' (h_o - d') - 30 A_s (d - h_o) \geq 0. \quad (6.8)$$

Dans ce cas on utilise, pour la détermination de y_{ser} et de K , les formules pour la section rectangulaire de largeur b et de hauteur utile d , la largeur b_o de la nervure n'intervient plus puisque cette nervure se trouve dans la zone tendue.

b) L'axe neutre tombera dans la nervure si :

$$b h_o^2 + 30 A_s' (h_o - d') - 30 A_s (d - h_o) < 0.$$

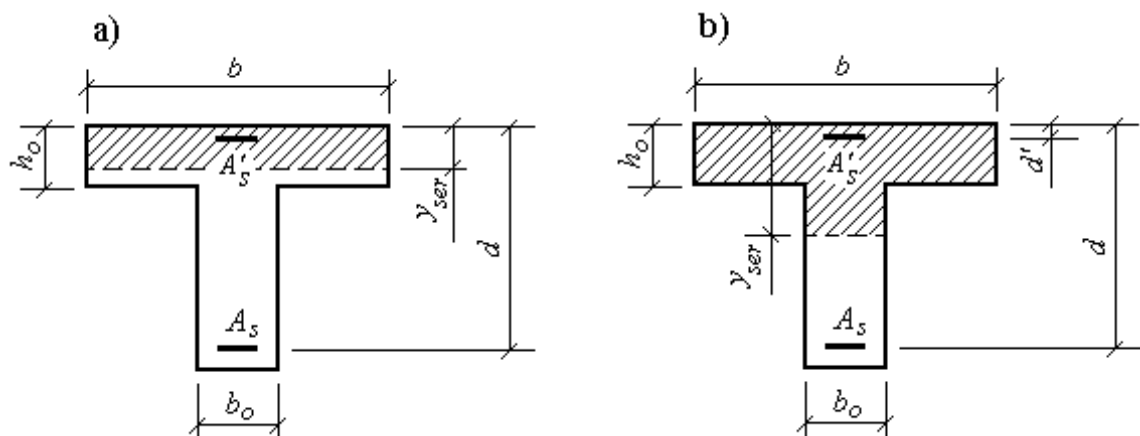


Fig.6.4

Les valeurs de y_{ser} et de K seront alors déterminés par :

$$b_o y_{ser}^2 + [2 (b - b_o) h_o + 30 (A_s' + A_s)] y_{ser} - (b - b_o) h_o^2 - 30 (A_s' d' + A_s d) = 0 ;$$

$$I = b y_{ser}^3 / 3 - [(b - b_o) (y_{ser} - h_o)^3] / 3 + 15 A_s' (y_{ser} - d')^2 + 15 A_s (d - y_{ser})^2 , \quad (6.9)$$

$$K = M_{ser} / I.$$

6.1.3. Détermination des contraintes en cas de flexion composée

1) *La section est entièrement tendue.* Une section sera entièrement tendue si l'effort normal est un effort de traction et si le centre de pression C (point de passage de la résultante des forces situées à gauche de la section) se trouve entre les armatures.

On aura alors avec les notations indiquées sur la figure 6.5, où e_{a2} représente la distance du centre de pression C à l'armature inférieure et e_{a1} , la distance à l'armature supérieure (en écrivant successivement le moment par rapport à A_1 et A_2) :

$$\sigma_{s1} = N_{ser} e_{a2} / z_s A_1, \quad \sigma_{s2} = N_{ser} e_{a1} / z_s A_2. \quad (6.10)$$

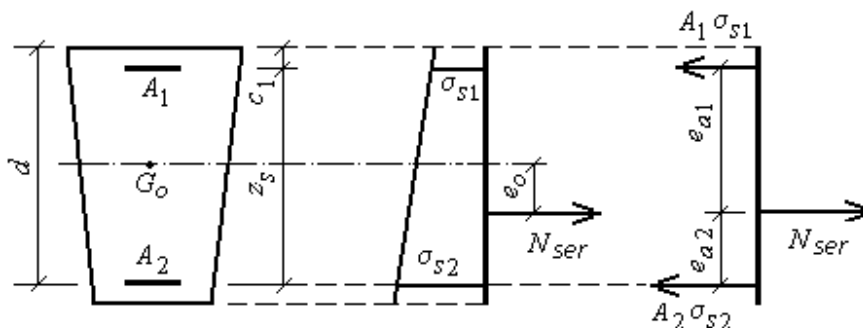


Fig. 6.5

2) *La section est partiellement comprimée.*

Une section sera partiellement comprimée si :

- l'effort normal étant un effort de traction, le centre de pression se trouve en dehors de la zone comprise entre les armatures;
- l'effort normal étant un effort de compression on a :

$$M_{G,ser} / N_{ser} > I / S v_1. \quad (6.11)$$

Avec $M_{G,ser}$ le moment par rapport au centre de gravité G des forces extérieures situées à gauche de la section ;

N_{ser} , l'effort normal de compression ;

S , l'aire de la section homogène ;

I , le moment d'inertie de la section homogène par rapport à l'axe xx' passant par G ;

v_1 , la distance de G à la fibre la moins comprimée (fig. 6.7).

Soit " c " est la distance entre le point C et l'arête la plus comprimée de la section. La valeur de " c " sera affectée des signes suivants :

- si N_{ser} est un effort de compression ($N_{ser} > 0$) :

" c " sera considéré comme positif si C tombe à l'intérieur de la section, c'est-à-dire que $c > 0$ si $e_A < d$ (fig. 6.6, a) :

" c " sera considéré comme négatif si C tombe à l'extérieur de la section, c'est-à-dire que $c < 0$ si $e_A > d$ (fig. 6.6, b) ;

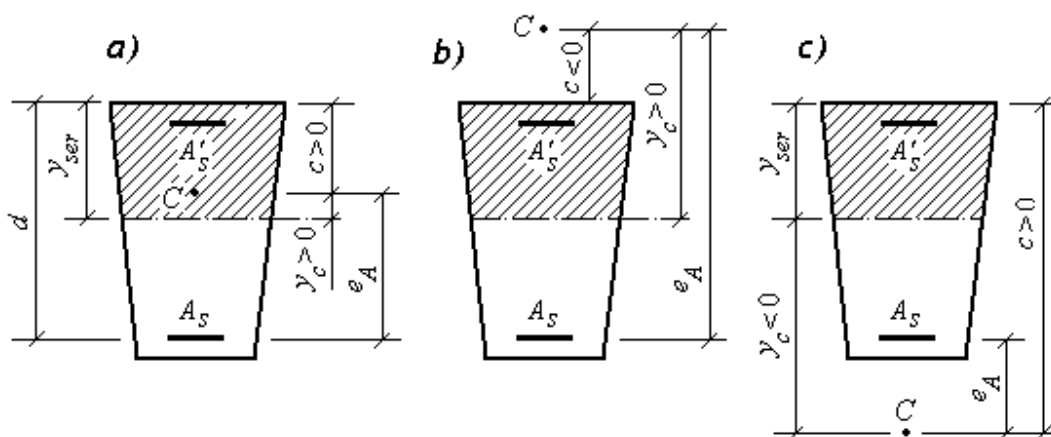


Fig. 6.6

- si N_{ser} est un effort de traction ($N_{ser} < 0$) :

"c" sera considéré toujours comme positif (fig. 6.6, c).

Les distances sont : $y_{ser} = y_c + c$ (c avec son signe) ;

$$e_A = M_{ser} / N_{ser} + (d - h / 2).$$

En écrivant le bilan des efforts appliqués à la section, on montre que y_c est solution de l'équation :

$$(y_c)^3 + p y_c + q = 0. \quad (6.12)$$

Pour résoudre cette équation on pourra : ou procéder par approximations successives, ou utiliser des abaques. La solution de l'équation (6.12) du troisième degré est obtenu par la méthode suivante : on calcule

$$\Delta = q^2 + (4 p^3 / 27). \quad (6.13)$$

Si $\Delta < 0$ l'équation a trois racines réelles :

$$y_1 = a \cos (\varphi / 3);$$

$$y_2 = a \cos (\varphi / 3 + 120^\circ);$$

$$y_3 = a \cos (\varphi / 3 + 240^\circ).$$

Avec $\cos \varphi = (3 q / 2 p) \sqrt{-3 / p}$, $a = 2 \sqrt{-p / 3}$.

Si $\Delta \geq 0$ l'équation n'a qu'une racine réelle, cette racine est positive si q est négatif, et négative si q est positif. On pose :

$$t = 0,5 (\sqrt{\Delta} - q), \quad z = \sqrt[3]{t}, \quad y_c = z - (p / 3 z).$$

Les contraintes seront déterminées, comme dans le cas de la flexion simple, par :

$$\sigma_{bc} = K y_{ser} ;$$

$$\sigma_s' = 15 K (y_{ser} - d') ;$$

$$\sigma_s = 15 K (d - y_{ser}),$$

avec $K = N_{ser} y_c / I$.

Pour une section rectangulaire, les valeurs p , q et I seront données par :

$$p = -3 c^2 - [6 n A_s' (c - d')] / b + [6 n A_s (d - c)] / b ;$$

$$q = -2 c^3 - [6 n A_s' (c - d')^2] / b + [6 n A_s (d - c)^2] / b ;$$

$$I = b(y_{ser})^3 / 3 + 15 [A_s (d - y_{ser})^2 + A_s' (y_{ser} - d')^2].$$

Ou avec $n = 15$:

$$p = -3 c^2 - [90 A_s' (c - d')] / b + [90 A_s (d - c)] / b ;$$

$$q = -2 c^3 - [90 A_s' (c - d')^2] / b + [90 A_s (d - c)^2] / b.$$

Pour une section en T il est nécessaire de savoir si l'axe neutre tombe dans la table ou dans la nervure. Pour cela on considère les deux expressions suivantes dans lesquelles les notations utilisées sont celles définies sur la figure 6.4 et où "c" a la valeur et le signe indiqués ci-dessus :

$$E_1 = (b - b_o) (3 c - 2 h_o) h_o^2 + 90 [A_s' (c - d') d' - A_s (d - c) d] ;$$

$$E_2 = b h_o^2 (h_o - 3 c) + 90 [A_s' (c - d') (2 c - h_o - d') - A_s (d - c) (d - h_o)].$$

Si E_1 et E_2 sont de signes contraires, l'axe neutre tombe dans la table et on utilisera pour le calcul de p , q et I , les formules données pour la section rectangulaire.

Si E_1 et E_2 sont de même signe, l'axe neutre tombe dans la table et on calculera p , q et I par :

$$p = -3 b c^2 / b_o + 3 [(b / b_o) - 1] (c - h_o)^2 - [90 A_s' (c - d')] / b_o + [90 A_s (d - c)] / b_o ;$$

$$q = -2 b c^3 / b_o + 2 [(b / b_o) - 1] (c - h_o)^3 - [90 A_s' (c - d')^2] / b_o - [90 A_s (d - c)^2] / b_o ;$$

$$I = b (y_{ser})^3 / 3 - [(b - b_o) (y_{ser} - h_o)^3] / 3 + 15 A_s' (y_{ser} - d')^2 + 15 A_s (d - y_{ser})^2 ;$$

3) *La section est entièrement comprimée.* Pour qu'une section soit entièrement comprimée il faut que l'effort normal soit un effort de compression et que l'on ait, avec les notations définies ci-dessus :

$$M_{G,ser} / N_{ser} \leq I / S v_1.$$

Avec les notations indiquées sur la figure 6.7, on a :

$$\sigma_{bc, max} = N_{ser} / S + M_{ser} v_2 / I ; \quad (6.14)$$

$$\sigma_{bc, min} = N_{ser} / S - M_{ser} v_1 / I. \quad (6.15)$$

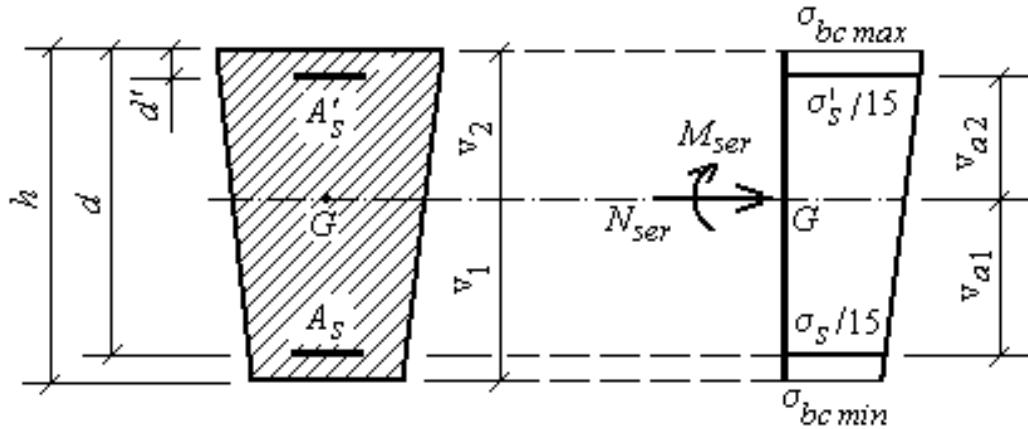


Fig. 6.7

On doit vérifier la condition $\sigma_{bc,max} \leq 0,6 f_{c28}$. Pour que la section soit entièrement comprimée, il faut que $\sigma_{bc,min} \geq 0$.

Les contraintes des armatures seront déterminées à l'aide des formules :

$$\sigma'_s = 15 [N_{ser} / S + M_{ser} (v_2 - d') / I]; \quad (6.16)$$

$$\sigma_s = 15 [N_{ser} / S - M_{ser} (d - v_1) / I]. \quad (6.17)$$

Pour une section rectangulaire on a (fig. 6.8,a) :

$$S = b h + 15 (A'_s + A_s),$$

$$v_2 = (1 / S) [b h^2 / 2 + 15 (A'_s d' + A_s d)], \quad v_1 = h - v_2,$$

$$I = [b (v_1^3 + v_2^3)] / 3 + 15 [A'_s (v_2 - d')^2 + A_s (d - v_2)^2]. \quad (6.17')$$

Donc pour une section entièrement comprimée on prend le moment d'inertie de la section totale homogène.

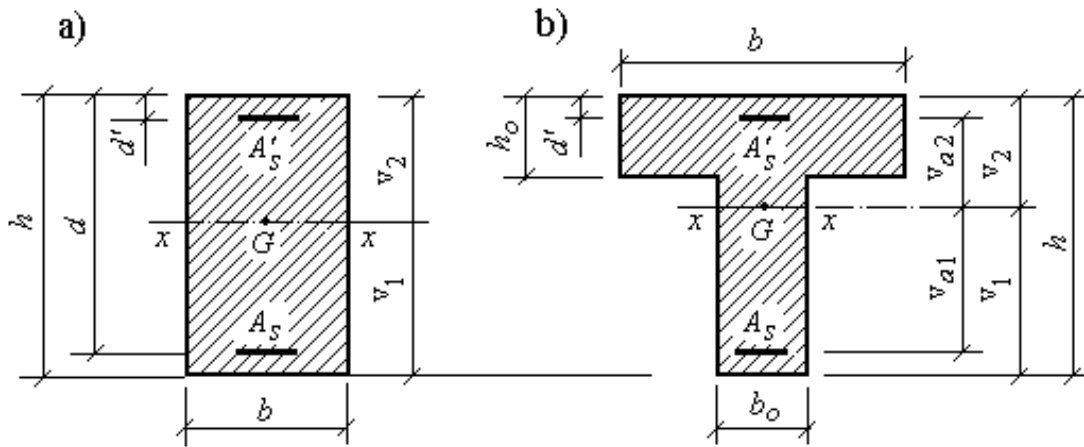


Fig. 6.8

Pour une section en T, avec les notations indiquées sur la figure 6.8, b, on a :

$$\begin{aligned}
 S &= b_o h + (b - b_o) h_o + 15 (A'_s + A_s) ; \\
 v_2 &= 1 / S [b_o h^2 / 2 + (b - b_o) h_o^2 / 2 + 15 (A'_s d' + A_s d) ; \\
 v_1 &= h - v_2 ; \\
 I &= [b_o (v_1^3 + v_2^3)] / 3 + (b - b_o) h_o [h_o^2 / 12 + (v_2 - h_o / 2)^2] + \\
 &\quad + 15 [A'_s (v_2 - d')^2 + A_s (d - v_2)^2].
 \end{aligned}$$

4) Pour une compression simple (quelle que soit la forme de la section) on pose :

B , l'aire de la section totale de béton ;

A_s , la section totale des armatures ;

N_{ser} , l'effort normal de compression.

Alors on a :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{bc} &= N_{ser} / S = N_{ser} / (B + 15 A_s), \quad (6.18) \\
 \sigma_s &= 15 \sigma_{bc}.
 \end{aligned}$$

En pratique, la compression simple se rencontre rarement puisqu'on a vu qu'il fallait tenir compte d'une excentricité additionnelle de la charge centrée.

Comme on a vu ci-dessus, la vérification des contraintes à l'état-limite de service est assez compliquée. D'autre côté cette vérification (surtout

la limitation de la compression du béton correspondant à un état-limite de formation de fissures parallèles à la direction des contraintes de compression), n'est pas toujours nécessaire, vu qu'elle est respectée automatiquement.

En général, la condition précédente (c'est-à-dire, la vérification que $\sigma_{bc} \leq 0,6 f_{cj}$) n'est pas déterminante pour les sections en T , car, en raison de la présence de la table de compression, la contrainte du béton demeure modérée.

Il en est de même pour les sections rectangulaires fléchies lorsque le pourcentage d'armature n'est pas trop élevé et, le plus souvent, la vérification n'est pas nécessaire si le pourcentage d'armatures est inférieur à 2 % ($A_s < 0,02 b d$). Par contre, la condition peut être déterminante pour les sections rectangulaires fléchies dans lesquelles on a $A_s \geq 0,02 b d$.

Pour les sections rectangulaires soumises à la flexion simple et dont les armatures sont en acier de la classe $Fe E 400$, on admet qu'il n'est pas nécessaire de procéder à la vérification de la contrainte du béton si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\alpha = \frac{y_u}{d} \leq \frac{(M_u / M_{ser}) - 1}{2} + \frac{f_{cj}}{100} .$$

où y_u , la distance de l'axe neutre à la fibre la plus comprimée pour l'état-limite ultime ;

d , la hauteur utile de la section ;

M_u , le moment de flexion dans la section pour l'état-limite ultime ;

M_{ser} , le moment de flexion dans la section pour l'état-limite de service ;

f_{cj} , la contrainte caractéristique du béton, en MPa .

Il n'y a naturellement aucune vérification à effectuer, en ce qui concerne la contrainte de compression du béton, si, dans l'état-limite de service, la section étudiée est soumise à la traction simple ou si la section est soumise à la flexion composée et elle est entièrement tendue.

6.2. Dimensionnement des sections à l'état-limite de service

Les formules données au paragraphe 6.1, ci-dessus, permettent de calculer, pour les états-limites de service, les contraintes dans une section pour laquelle les armatures ont été déterminées lors des calculs aux états-limites ultimes. Par contre, elles ne permettent pas, si les contraintes obtenues sont supérieures aux contraintes limites, de déterminer les nouvelles valeurs des armatures. Dans ces conditions, on indiquera, ci-après, l'essentiel des méthodes destinées à calculer les armatures, compte tenu des hypothèses indiquées au début du paragraphe 6..

Il y a lieu de noter que, pour les vérifications à effectuer concernant les états-limites de service, au lieu de calculer les contraintes dans la section à l'aide des formules données au 6.1 (sauf pour une section entièrement comprimée), il est souvent plus simple de déterminer les armatures sous les efforts des sollicitations de service et de les comparer à celles trouvées lors des calculs aux états-limites ultimes. Il suffira alors de retenir la plus grande des deux valeurs trouvées.

6.2.1. Dimensionnement des sections rectangulaires soumises à la flexion simple

Comme pour les états-limites ultimes on distinguera deux cas, suivant que la section peut être armée uniquement par des armatures tendues ou qu'il est nécessaire de prévoir des armatures tendues et des armatures comprimées.

1) *La section ne comporte que des armatures tendues.*

Pour le schéma considéré (fig. 6.9) on a :

$$\Sigma x = 0, \quad N_b - N_s = 0.$$

Ou avec $N_b = b y_{ser} \sigma_{bc} / 2$, et $N_s = A_s \bar{\sigma}_s$, on peut écrire :

$$b y_{ser} \sigma_{bc} / 2 - A_s \bar{\sigma}_s = 0.$$
$$\Sigma M = 0, \quad M_{ser} - N_b (d - y_{ser} / 3) = 0.$$

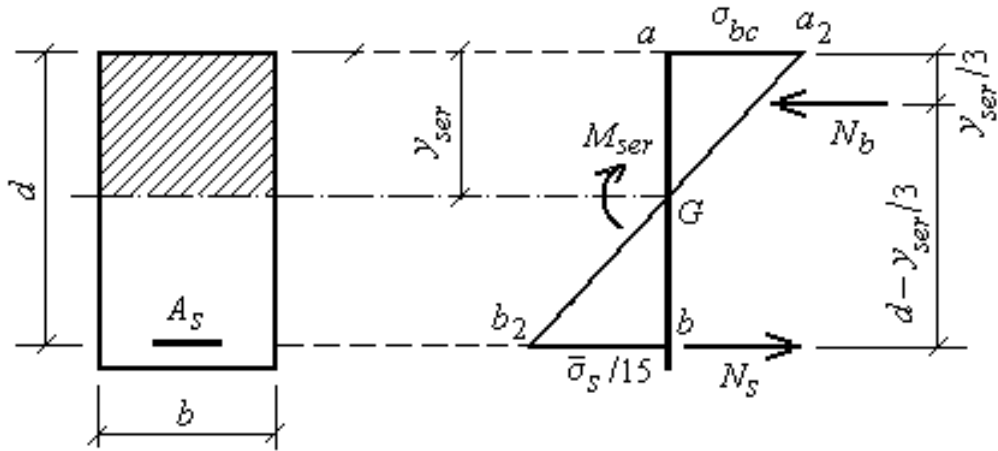


Fig. 6.9

On pose : $\alpha_1 = y_{ser} / d$ ou $y_{ser} = \alpha_1 d$,
 et $\beta_1 = 1 - \alpha_1 / 3$.

D'après les triangles semblables on trouve :

$$\sigma_{bc} / (\bar{\sigma}_s / 15) = y_{ser} / (d - y_{ser}),$$

d'où, en remplaçant y_{ser} par $\alpha_1 d$:

$$\sigma_{bc} = [\alpha_1 / 15 (1 - \alpha_1)] \bar{\sigma}_s, \quad (6.19)$$

et en posant $k = \alpha_1 / 15 (1 - \alpha_1)$, on a $\sigma_{bc} = k \bar{\sigma}_s$.

Avec ces valeurs on peut trouver :

$$M_{ser} - N_b (d - y_{ser} / 3) = M_{ser} - (b y_{ser} / 2) \sigma_{bc} d (1 - \alpha_1 / 3) = 0.$$

Ou encore, en remplaçant σ_{bc} par $k \bar{\sigma}_s$:

$$\begin{aligned} M_{ser} - b d^2 \bar{\sigma}_s (k \alpha_1 \beta_1 / 2) &= 0 ; \\ M_{ser} - b d^2 \bar{\sigma}_s [\alpha_1^2 \beta_1 / 30 (1 - \alpha_1)] &= 0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

On pose $\mu_1 = M_{ser} / b d^2 \bar{\sigma}_s$, alors on obtient :

$$\mu_1 = \alpha_1^2 \beta_1 / 30 (1 - \alpha_1). \quad (6.21)$$

Courbes $\alpha = f(u)$
pour le dimensionnement en flexion simple à l'E.L.S.

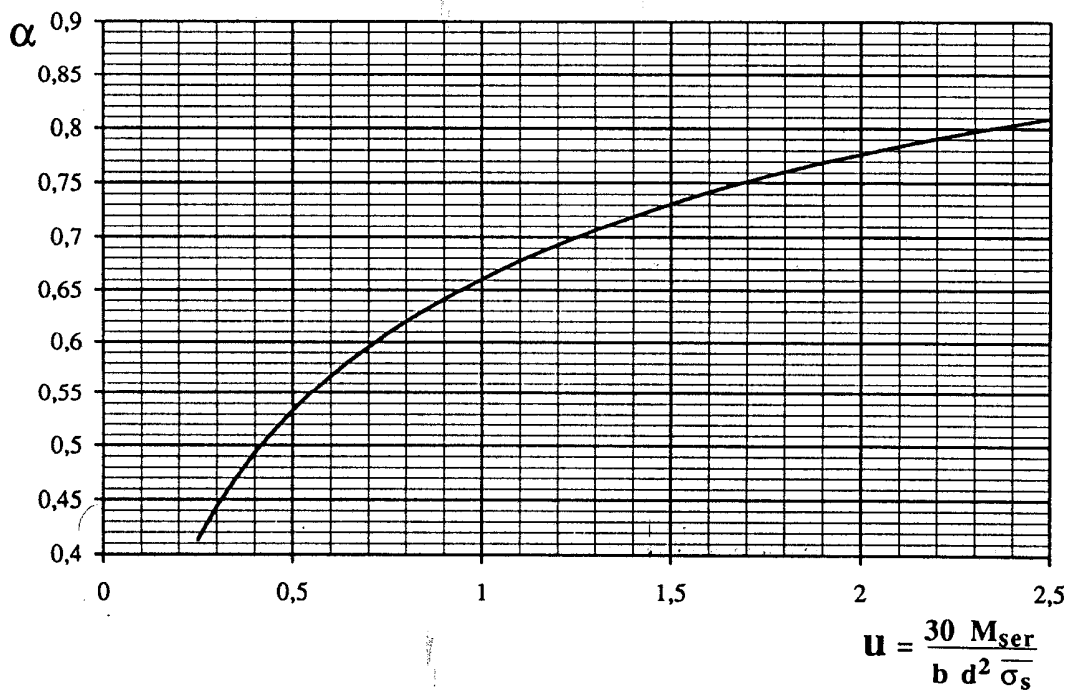
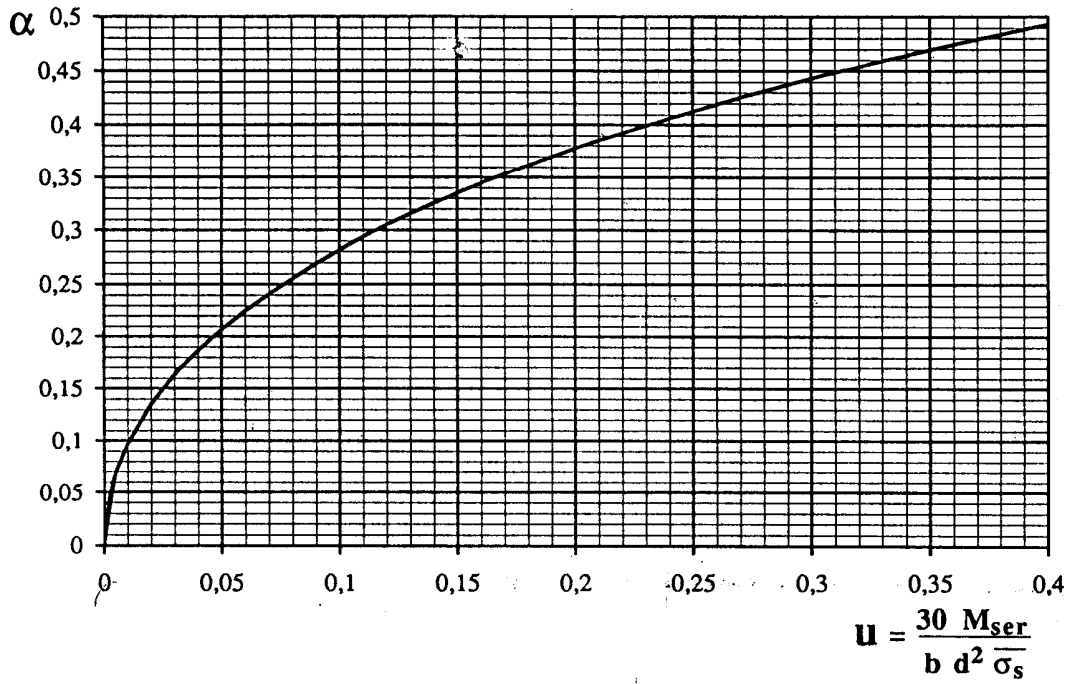


Fig. 6.10

Pour calculer les armatures A_s , on utilise l'équation :

$$M_{ser} = N_b (d - y_{ser} / 3).$$

Comme $N_b = (b y_{ser} / 2) \sigma_{bc}$ et $A_s \bar{\sigma}_s = N_b = (b y_{ser} / 2) \sigma_{bc}$,

$$M_{ser} = (b y_{ser} / 2) \sigma_{bc} (d - y_{ser} / 3), \text{ ou encore :}$$

$$M_{ser} = A_s \bar{\sigma}_s d (1 - \alpha_1 / 3) = A_s \bar{\sigma}_s d \beta_1, \text{ d'où}$$

$$A_s = M_{ser} / (\beta_1 d \bar{\sigma}_s). \quad (6.22)$$

Les valeurs des β_1 et k ainsi que ρ_1 en fonction de μ_1 sont données au tableau A.6. Le coefficient ρ_1 , figurant dans le tableau, représente le pourcentage de ferrailage de la section :

$$\rho_1 = 100 A_s / b d.$$

Ce coefficient permet de calculer les contraintes dans les sections soumises à la flexion simple. Son emploi est particulièrement intéressant pour les sections rectangulaires ne comportant pas d'armatures comprimées. Dans ce cas, pour calculer A_s , on détermine le coefficient :

$$\mu_1 = M_{ser} / b d^2 \bar{\sigma}_s.$$

Sur le tableau A.6 on prend les valeurs de β_1 et k (par interpolation si nécessaire), et on calcule : $\sigma_{bc} = k \bar{\sigma}_s$.

Si la condition $\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc}$ est satisfaite, on détermine la section des armatures :

$$A_s = M_{ser} / (\beta_1 d \bar{\sigma}_s). \quad (6.23)$$

Donc avec l'utilisation de coefficient ρ_1 , on n'a pas besoin de calculer les caractéristiques géométriques de la section y_1, I (pour des pièces fléchies armées par des armatures tendues seulement). Pour les autres cas (pièces doublement armées) on utilise le coefficient ρ_1 pour déterminer la distance y_1 . Ainsi on calcule :

$$\rho_1 = 100 A_{s1} / b d_1, \text{ avec } A_{s1} = A_s + A_s' \text{ et}$$

$$d_1 = (A_s' d' + A_s d) / (A_s + A_s').$$

Ensuite on prend β_1 (tableau A.6) et on détermine : $y_1 = 3 (1 - \beta_1) d_1$.

Le coefficient α_1 (d'après les règles *B.A.E.L* 91 on désigne ce coefficient par α , mais nous désignons aussi par α_1 pour le distinguer de celui de l'états-limites ultimes) peut être également déterminé de la manière suivante (sans utilisation de tableau A.6) :

$$\alpha_1 = 1 + 2 \sqrt{\lambda} \cos (240^\circ + \varphi / 3), \quad (6.24)$$

avec $\lambda = 1 + (30 M_{ser} / b d^2 \sigma_s)$; $\varphi = 1 / \sqrt{\lambda^3}$ (φ en degrés).

Ce coefficient peut être déterminé également à l'aide de diagramme (fig. 6.10).

Ayant obtenu α_1 , on calcule : $\sigma_{bc} = \alpha_1 \bar{\sigma}_s / 15 (1 - \alpha_1)$. (6.25)

On vérifie que $\sigma_{bc} \leq 0,6 f_{cj}$,

puis on obtient

$$A_s = \alpha_1 b d \sigma_{bc} / 2 \bar{\sigma}_s = b d \alpha_1^2 / 30 (1 - \alpha_1). \quad (6.26)$$

Exemple 6.1.

Déterminer les armatures de la section rectangulaire représentée sur la figure 6.11 et soumise à un moment $M_{ser} = 120 \text{ kNm}$. Le béton a la résistance caractéristique $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$, alors la contrainte de service est $\bar{\sigma}_{bc} = 0,6 f_{c28} = 0,6 \times 25 = 15 \text{ MPa}$.

L'acier est de nuance *Fe E 400*, alors la contrainte de traction de l'acier à l'état-limite de service est prise d'après les conditions :

$$\bar{\sigma}_s \leq \text{Max} (0,5 f_e; 110 \sqrt{\eta f_{tj}}); \quad \bar{\sigma}_s \leq 2 f_e / 3. \quad \text{Donc :}$$

$$\bar{\sigma}_s \leq \text{Max} (0,5 \times 400 = 200 \text{ MPa}; 110 \sqrt{1,6 \cdot 2,1} = 202 \text{ MPa}).$$

$$\text{Et encore } \bar{\sigma}_s \leq 2 f_e / 3 = 2 \times 400 / 3 = 267 \text{ MPa}.$$

On prend la contrainte $\bar{\sigma}_s = 202 \text{ MPa}$. (Voir le tableau 2.1).

(Ici $f_{tj} = 2,1 \text{ MPa}$, est la résistance caractéristique du béton à la traction; $\eta = 1,6$, le coefficient de fissuration pour les armatures à haute adhérence).

Solution. En supposant que la section ne comporte que des armatures tendues, on détermine le coefficient de tableau (avec $\bar{\sigma}_s = 202 \text{ MPa}$) :

$$\mu_1 = M_{ser} / b d^2 \bar{\sigma}_s = 120 \times 10^6 / 250 \times 450^2 \times 202 = 0,0117.$$

Pour $\mu_1 = 0,0117$, on lit sur le tableau A.6 : $k = 0,059$, $\beta_1 = 0,844$. La contrainte du béton de la fibre la plus comprimée est égale à :

$$\sigma_{bc} = k \bar{\sigma}_s = 0,059 \cdot 202 = 11,9 \text{ MPa}; \quad \sigma_{bc} = 11,9 \text{ MPa} < \bar{\sigma}_{bc} = 15 \text{ MPa}.$$

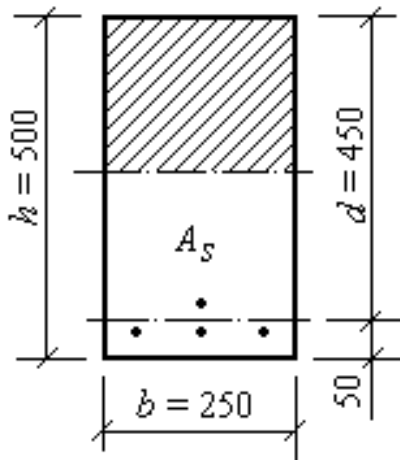


Fig.6.11

Donc l'armature comprimée n'est pas nécessaire.

La section de l'armature tendue alors sera égale à :

$$A_s = M_{ser} / \beta_1 d \bar{\sigma}_s =$$

$$= 120 \cdot 10^6 / (0,844 \cdot 450 \cdot 202) = 1564 \text{ mm}^2.$$

Soit on prend 4 $\varnothing 22$ mm avec la section :

$$A_s = 1520 \text{ mm}^2.$$

Le même calcul peut être fait à l'aide des formules 6.24 et 6.26.

$$\lambda = 1 + [(30 M_{ser}) / (b d^2 \bar{\sigma}_s)] =$$

$$= 1 + [(30 \times 120 \times 10^6) / (250 \times 450^2 \times 202)] = 1,352.$$

$$\cos \varphi = 1 / \sqrt{\lambda^3} = 1 / \sqrt{1,352^3} = 0,635, \text{ d'où } \varphi = 50^\circ 36';$$

$$\alpha_1 = 1 + 2\sqrt{\lambda} \cos(240^\circ + \varphi/3) = 1 + 2\sqrt{1,352} \cos(240^\circ + 50^\circ 36'/3) =$$

$$= 1 + 2,325 \cos(256^\circ 52') = 1 + 2,325 (-\cos 76^\circ 52') = 0,471.$$

La même valeur est trouvée d'après le diagramme (fig. 6.10). En effet pour $U = (30 M_{ser}) / (b d^2 \bar{\sigma}_s) = (30 \times 120 \times 10^6) / (250 \times 450^2 \times 202) = 0,352$, on a $\alpha_1 = 0,47$ (donc la même valeur).

Après avoir déterminé le coefficient α_1 , on vérifie la contrainte du béton :

$$\sigma_{bc} = (\bar{\sigma}_s \alpha_1) / [15 (1 - \alpha_1)] = (202 \times 0,471) / [15 (1 - 0,471)] = 12 \text{ MPa}.$$

Donc la contrainte ne dépasse pas la valeur limite $\bar{\sigma}_{bc} = 15 \text{ MPa}$.

Alors, la section des armatures exigée sera :

$$A_s = (b d \alpha_1^2) / [30 (1 - \alpha_1)] = (250 \times 450 \times 0,471^2) / [30 \times (1 - 0,471)] =$$

$$= 1572 \text{ mm}^2.$$

Donc les résultats des deux calculs sont tout à fait proches.

Si la condition de compression du béton n'est pas assurée, donc $\sigma_{bc} > 0,6 f_{cj}$, on peut soit redimensionner la section du béton, soit introduire des armatures comprimées (ou augmenter leur section s'il y en a déjà).

2) *Redimensionnement de la section de béton.*

Pour aboutir aux dimensions minimales de la section, on fait travailler les deux matériaux à leurs limites $\bar{\sigma}_s$ et $\bar{\sigma}_{bc} = 0,6 f_{cj}$.

La position de l'axe neutre peut être déterminée d'après les triangles semblables (fig. 6.9) :

$$\bar{\sigma}_{bc} / (\bar{\sigma}_s / n) = (0,6 f_{cj}) / (\bar{\sigma}_s / n),$$

ou encore (d'après la formule 6.25) :

$$(0,6 f_{cj}) / (\bar{\sigma}_s / n) = \alpha_1 / (1 - \alpha_1),$$

d'où on trouve :

$$\alpha_1 = 0,6 f_{cj} / (0,6 f_{cj} + \bar{\sigma}_s / n).$$

Avec $n = 15$, on a définitivement :

$$\alpha_1 = 9 f_{cj} / (9 f_{cj} + \bar{\sigma}_s). \quad (6.27)$$

L'équilibre de la section (sans armatures comprimées) s'écrit :

$$M_{ser} = [b y_{ser} \bar{\sigma}_{bc} (d - y_{ser} / 3)] / 2, \text{ ou encore avec } y_{ser} = \alpha_1 d,$$

$$M_{ser} = 0,5 b \alpha_1 d 0,6 f_{cj} d (1 - \alpha_1 / 3) = 0,1 b d^2 f_{cj} \alpha_1 (3 - \alpha_1).$$

$$\text{D'où : } b d^2 = 10 M_{ser} / [\alpha_1 (3 - \alpha_1) f_{cj}], \text{ ou encore :}$$

$$b d^2 = 10 M_{ser} (9 f_{cj} + \bar{\sigma}_s)^2 / 27 f_{cj}^2 (6 f_{cj} + \bar{\sigma}_s). \quad (6.28)$$

D'après cette équation on précise les dimensions b et d , ensuite on détermine la section des armatures tendues :

$$A_s = 0,3 \alpha_1 b d f_{cj} / \bar{\sigma}_s. \quad (6.29)$$

3) *La section comporte des armatures tendues et des armatures comprimées.*

Si par application de la méthode pour une section qui ne comporte que des armatures tendues, on trouve $\sigma_{bc} > \bar{\sigma}_{bc}$, il est nécessaire de prévoir des armatures comprimées (ou d'augmenter les dimensions de la section du béton).

Si on décide d'introduire des armatures comprimées, on prend la contrainte de service $\bar{\sigma}_s$ et $\bar{\sigma}_{bc}$ et on fait le calcul par la méthode suivante. On calcule le coefficient α_1 :

$$\alpha_1 = 15 \bar{\sigma}_{bc} / (15 \bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_s) = 9 f_{cj} / (9 f_{cj} + \bar{\sigma}_s).$$

Ensuite on détermine : $y_{ser} = \alpha_1 d$, et la contrainte de l'armature comprimée :

$$\sigma_s' = [15(y_{ser} - d') \bar{\sigma}_{bc}] / y_{ser} = 9 f_{bc} [1 - d' / (\alpha_1 d)].$$

Les sections des armatures seront obtenues par :

$$A_s' = \frac{M_{ser} - N_b (d - y_{ser} / 3)}{\sigma_s' (d - d')} = \frac{M_{ser} - M_{bc}}{\sigma_s' (d - d')} ; \quad (6.30)$$

$$A_s = \frac{A_s' \sigma_s' + N_b}{\bar{\sigma}_s} = \frac{A_s' \sigma_s' + 0,3 \alpha_1 b d f_{bc}}{\bar{\sigma}_s} . \quad (6.31)$$

Ici M_{bc} et N_b , le moment et l'effort repris par le béton comprimé

$$M_{bc} = 0,5 \bar{\sigma}_{bc} b d \alpha_1 d (1 - \alpha_1 / 3) = 0,1 f_{bc} \alpha_1 (3 - \alpha_1) b d^2 ;$$

$$N_b = 0,5 \bar{\sigma}_{bc} y_{ser} b = 0,3 \alpha_1 b d f_{bc} .$$

6.2.2. Dimensionnement des sections en T soumises à la flexion simple

Pour les sections en T il faut rechercher si l'axe neutre tombe dans la table ou dans la nervure. Pour cela, on comparera le moment équilibré par la table, M_t au moment donné M_{ser} . Avec les notations indiquées sur la figure 6.4 on a :

$$M_t = \left[\bar{\sigma}_s (d - h_o / 3) b h_o^2 \right] / [30(d - h_o)]. \quad (6.32)$$

Si $M_t \geq M_{ser}$, l'axe neutre tombe dans la table et la section en T est à calculer comme une section rectangulaire de largeur b et de hauteur utile d . Les armatures seront donc déterminées comme indiqué ci-dessus.

Si $M_t < M_{ser}$, l'axe neutre tombe dans la nervure. On distinguera alors deux cas :

1) *La section en T ne comporte que des armatures tendues.*

Le calcul peut être conduit à l'aide des équations d'équilibre, mais il est assez complexe et on préfère utiliser une méthode approchée en supposant que l'effort interne de compression se trouve à une distance des armatures tendues égale à $d - h_o / 2$ (au milieu de la hauteur de la table). Donc dans ce cas le bras de levier est peu différent de $d - h_o / 2$ et on aura :

$$A_s = M_{ser} / [(d - h_o / 2) \bar{\sigma}_s]. \quad (6.33)$$

La section des armatures étant connue, la contrainte dans le béton σ_{bc} pourra être calculée à l'aide des formules données au-dessus (paragraphe 6.1.2), en posant dans ces formules $A_s' = 0$.

Pour que la section ne comporte que des armatures tendues on devra avoir : $\sigma_{bc} \leq \bar{\sigma}_{bc}$.

On note que la plupart du temps, il ne sera pas nécessaire de calculer la valeur exacte de la contrainte maximale dans le béton car, en raison de la présence de la table de compression, cette contrainte sera généralement faible. Très souvent, on pourra se limiter à calculer une valeur par excès de σ_{bc} par la formule approchée obtenue en négligeant la partie de béton comprimée située entre la table et l'axe neutre :

$$\sigma_{bc} = \frac{\bar{\sigma}_s}{2d - h_o} \cdot \left[\frac{2A_s d}{bh_o} + \frac{h_o}{15} \right]. \quad (6.34)$$

2) *La section comporte des armatures comprimées et des armatures tendues.* Si par application de la méthode indiquée ci-dessus, on trouve $\sigma_{bc} > \bar{\sigma}_{bc}$, des armatures comprimées sont nécessaires. Dans ce cas on calcule :

$$\alpha_1 = 15 \bar{\sigma}_{bc} / (15 \bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_s) = 9f_{cj} / (9f_{cj} + \bar{\sigma}_s). \quad (6.35)$$

Ensuite on détermine : $y_{ser} = \alpha_1 d$, et la contrainte de l'armature comprimée :

$$\sigma_s' = [15(y_{ser} - d')\bar{\sigma}_{bc}] / y_{ser} = 9f_{bc} [1 - d' / (\alpha_1 d)]$$

L'effort de compression repris par le béton sera égal à :

$$N_b = 0,5 \bar{\sigma}_{bc} \{b_o y_{ser} + (b - b_o)[2 - (h_o / y_{ser})] h_o\}.$$

Le bras de levier est :

$$z = d - \frac{h_o}{2} + \frac{b h_o^3 - b_o (y_{ser} - h_o)^2 (2 y_{ser} + h_o)}{6 [b (y_{ser})^2 - (b - b_o) (y_{ser} - h_o)^2]}.$$

La section des armatures sera obtenue par :

$$A_s' = \frac{M_{ser} - N_b z}{\sigma_s' (d - d')} ; \quad A_s = \frac{N_b + A_s' \sigma_s'}{\bar{\sigma}_s}. \quad (6.36)$$

6.2.3. Dimensionnement des sections soumises à la flexion composée

1) *La section est entièrement tendue.* Dans ce cas l'effort normal N_{ser} est un effort de traction et le centre de pression C se trouve entre des armatures. On aura alors, avec les notations déjà utilisées et définies sur la figure 6.5 :

$$A_1 = N_{ser} e_{a2} / z_s \bar{\sigma}_s ; \quad A_2 = N_{ser} e_{a1} / z_s \bar{\sigma}_s. \quad (6.37)$$

Lorsque la section est soumise à la traction simple, donc la force de traction N_{ser} passe par le centre de gravité, on a :

$$A_1 = A_2 = N_{ser} / 2 \bar{\sigma}_s.$$

2) *La section est partiellement comprimée.* Une section est partiellement comprimée, si :

- le centre de pression C de l'effort normal de traction se trouve en dehors de la zone comprise entre les armatures ;
- le centre de pression C de l'effort normal de compression se trouve en dehors de la zone comprise entre les armatures ou bien le centre de

pression se trouve entre les armatures, mais la condition suivante est satisfaite :

$$M_{G,ser} / N_{ser} \geq I / S v.$$

(Les valeurs de cette formule sont données dans le paragraphe 6.1.3 et sur la figure 6.7).

Au début du calcul, les armatures n'étant pas connues, il n'est pas possible de s'assurer que l'inégalité précédente est satisfaite. On devra donc se contenter d'une approximation et vérifier, par la suite, que la section est bien partiellement comprimée. Par exemple, dans le cas d'une section rectangulaire, pour laquelle on a, en négligeant les armatures, $I / S v_1 = h / 6$, on vérifiera que l'excentricité "e" est sensiblement supérieur à $h / 6$.

Soit la figure 6.12 représente une section rectangulaire partiellement comprimée. Les conditions d'équilibre de la section sont :

$$N_{ser} + A_s \bar{\sigma}_s = A_s' \sigma_s' + 0,5 \alpha_1 b d \bar{\sigma}_{bc} ;$$

$$M_{ser} + N_{ser} (d - h/2) = 0,5 \alpha_1 (1 - \alpha_1) b d^2 \bar{\sigma}_{bc} + A_s' \sigma_s' (d - d').$$

Si on pose : $A_{s1} \bar{\sigma}_s = N_{ser} + A_s \bar{\sigma}_s ;$

$$M_{As} = M_{ser} + N_{ser} (d - h/2),$$

alors on aura les mêmes équations que dans une section en flexion simple de moment M_{As} :

$$A_{s1} \sigma_s = A_s' \sigma_s' + 0,5 \alpha_1 b d \bar{\sigma}_{bc} ; \quad (6.38)$$

$$M_{As} = 0,5 \alpha_1 (1 - \alpha_1) b d^2 \bar{\sigma}_{bc} + A_s' \sigma_s' (d - d'). \quad (6.39)$$

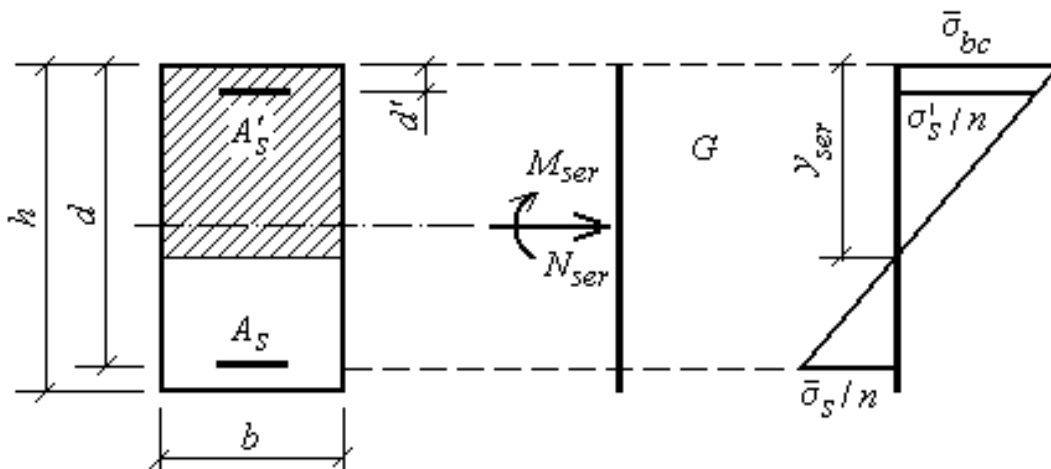


Fig. 6.12

Alors le calcul de la section s'effectuera en utilisant les résultats de la flexion simple. On calcule :

$$\alpha_1 = 9 f_{cj} / (9 f_{cj} + \bar{\sigma}_s);$$

$$M_s' = M_{As} - 0,1 f_{cj} \alpha_1 (3 - \alpha_1) b d^2 .$$

Si $M_s' \leq 0$, il n'y a pas besoin d'armatures comprimées et on recalcule α_1 puis A_{s1} par les formules :

$$\mu_1 = M_{As} / b d^2 \bar{\sigma}_s ; \quad A_{s1} = M_{As} / \beta_1 d \bar{\sigma}_s .$$

(Les coefficients : μ_1 , α_1 , β_1 sont donnés par le tableau A.6).

Si $M_s' > 0$, on peut redimensionner la section ou introduire des armatures comprimées et calculer A'_s et A_{s1} :

$$\sigma_s' = 9 f_{cj} / [1 - d' / (\alpha_1 d)] ;$$

$$A_s' = \frac{M_{ser} - M_{bc}}{\sigma_s' (d - d')} ; \quad A_{s1} = \frac{A_s' \sigma_s' - 0,5 \alpha_1 b d \sigma_{bc}}{\bar{\sigma}_s} .$$

Dans tous les cas on calcule ensuite : $A_s = A_{s1} - N_{ser} / \bar{\sigma}_s$.

3) *La section est entièrement comprimée.* Une section sera entièrement comprimée si l'effort normal est un effort de compression et si l'on a :

$$M_{G,ser} / N_{ser} < I / S v_1,$$

La valeur $I / S v_1$ ne pouvant être déterminée au début du calcul. Dans le cas général, les armatures A'_s et A_s ne peuvent être déterminées que par approximations successives. On se fixera A'_s et A_s et on calculera les contraintes à l'aide des formules données au paragraphe 6.1.3, p.3. Si l'on obtient $\sigma_{bc} > \bar{\sigma}_{bc}$ ou $\sigma_s > \bar{\sigma}_s$, on modifiera les valeurs initiales de A'_s et de A_s et on recommencera les calculs.

On peut également calculer les armatures d'après les conditions d'équilibres. Dans ce cas on a trois inconnues pour deux équations.

On choisit généralement de faire travailler le béton au maximum (donc avec $\bar{\sigma}_{bc}$), et on a alors :

$$N_{ser} = b h \bar{\sigma}_{bc} + (A_s + A_s') n \bar{\sigma}_{bc} ;$$

$$M_{ser} + N_{ser} (d - h/2) = b h \bar{\sigma}_{bc} (d - h/2) + n \bar{\sigma}_{bc} A_s' (d - d').$$

D'où on trouve la section des armatures :

$$A_s' = \frac{M_{ser} + (N_{ser} - b h \bar{\sigma}_{bc})(d - h/2)}{n \bar{\sigma}_{bc} (d - d')} ; \quad (6.40)$$

$$A_s = \frac{N_{ser} - b h \bar{\sigma}_{bc}}{n \bar{\sigma}_{bc}} - A_s' . \quad (6.41)$$

Il faut noter que dans le cas fréquent des sections rectangulaires afin d'éviter les calculs précédents, on peut utiliser des abaques.

Pour la compression simple on a :

$$A_s = \frac{N_{ser} - b h \bar{\sigma}_{bc}}{n \bar{\sigma}_{bc}} ; \quad (6.42)$$

$$\sigma_s = n \bar{\sigma}_{bc} = 15 \bar{\sigma}_{bc}, \quad \text{avec toujours } \sigma_s \leq \bar{\sigma}_s.$$

Exemple 6.2. Déterminer les armatures d'une poutre de section rectangulaire de dimensions 250 x 500 mm soumise à l'action des charges uniformément réparties, les charges permanentes $G = 20 \text{ kN/m}$ et les charges utiles $Q = 22 \text{ kN/m}$. La portée calculée de la poutre $l = 6,0 \text{ m}$. Les armatures longitudinales de la poutre sont en acier Fe E 400, type 1. Le béton a la résistance caractéristique à la compression $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$ et à la traction $f_{t28} = 1,8 \text{ MPa}$.

Solution.

1) *Calcul pour l'état-limite ultime.* Les charges de calcul et le moment de flexion sont :

$$1,35 G + 1,5 Q = 1,35 \times 20 + 1,5 \times 22 = 60 \text{ kN/m}.$$

$$M_u = (1,35 G + 1,5 Q) l^2 / 8 = 60 \times 6^2 / 8 = 270 \text{ kN m}.$$

Au début de calcul on prend comme contraintes de calcul des armatures tendues et du béton :

$$\sigma_s = f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa} ;$$

$$f_{bc} = 0,85 f_{c28} / \gamma_b = 0,85 \times 20 / 1,5 = 11,3 \text{ MPa}.$$

On prend la hauteur utile de la section $d = h - 60 = 500 - 60 = 440 \text{ mm}$.

Alors on peut calculer le coefficient μ :

$$\mu = \frac{M_u}{f_{bc} b d^2} = \frac{270 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 250 \cdot 440^2} = 0,493.$$

Donc on a que $\mu = 0,493 > \mu_l = 0,392$ (tableau A.2). D'après le même tableau $\alpha_l = 0,668$, $\beta_l = 0,733$.

Donc l'armature comprimée est nécessaire.

Pour calculer l'armature comprimée on pose $\mu = \mu_l = 0,392$, alors on peut prendre la contrainte du béton $f_{bc} = 11,3 \text{ MPa}$ et la contrainte d'armature comprimée

$$\sigma'_s = f_e / \gamma_s = 348 \text{ MPa}.$$

La section de cette armature A'_s est calculée à l'aide de la formule :

$$A'_s = \frac{M_u - \mu_l f_{bc} b d^2}{\sigma'_s (d - d')} = \frac{270 \cdot 10^6 - 0,392 \cdot 11,3 \cdot 250 \cdot 440^2}{348(440 - 40)} = 399,5 \text{ mm}^2$$

Et la section de l'armature tendue alors sera égale à :

$$A_s = \frac{0,8 \alpha_l b d f_{bc} + \sigma'_s A'_s}{\sigma_s} = \frac{0,8 \cdot 0,668 \cdot 250 \cdot 440 \cdot 11,3 + 399,5 \cdot 348}{348} = 2308 \text{ mm}^2 .$$

On prend 3 $\varnothing 14$, $A'_s = 462 \text{ mm}^2$ et 3 $\varnothing 20$ et 3 $\varnothing 25$, $A_s = 2414 \text{ mm}^2$.

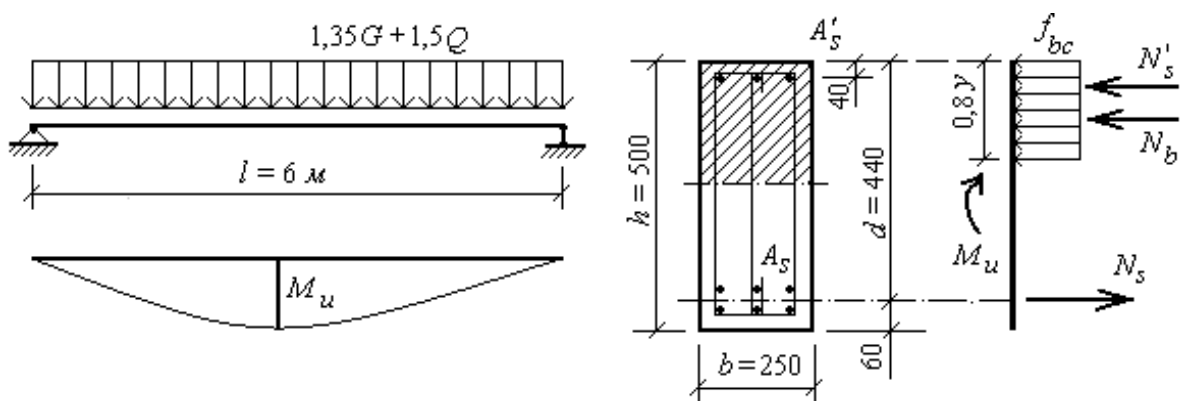


Fig. 6.13

2) Vérification des contraintes pour l'état-limite de service.

Les efforts et le moment de flexion dans ce cas sont pris égaux :

$$G + Q = 20 + 22 = 42 \text{ kN/m};$$

$$M_{ser} = (G + Q) l^2 / 8 = 42 \times 6^2 / 8 = 189 \text{ kN m}.$$

Le pourcentage de ferrailage de la section (d'après le calcul à l'état-limite ultime) est égal à :

$$100 (A_s / b d) = 100 (2414 / 250 \times 440) = 2,2 \% > 2 \%.$$

Donc, pour une section rectangulaire il faut vérifier les contraintes de compression du béton σ_{bc} .

Les contraintes du béton et des armatures sont déterminées à l'aide des expressions :

$$\sigma_{bc} = K y_{ser}; \quad \sigma_s' = 15 K (y_{ser} - d'); \quad \sigma_s = 15 K (d - y_{ser}).$$

Le coefficient K est calculé à l'aide de la formule : $K = M_{ser} / I$, avec

$$I = b(y_{ser})^3 / 3 + 15 A_s'(y_{ser} - d')^2 + 15 A_s(d - y_{ser})^2.$$

La valeur de y_{ser} est déterminée par :

$$b(y_{ser})^2 + 30(A_s' + A_s)y_{ser} - 30(A_s'd' + A_s d) = 0;$$

$$250(y_{ser})^2 + 30(462 + 2414)y_{ser} - 30(462 \cdot 40 + 2414 \cdot 440) = 0;$$

D'où : $(y_{ser})^2 + 345,12 y_{ser} - 129676,8 = 0$. Alors on peut calculer :

$$(y_{ser})_{1,2} = -(345,12/2) \pm \sqrt{(345,12/2)^2 + 129676,8}; \quad y_{ser} = 226,7 \text{ mm}.$$

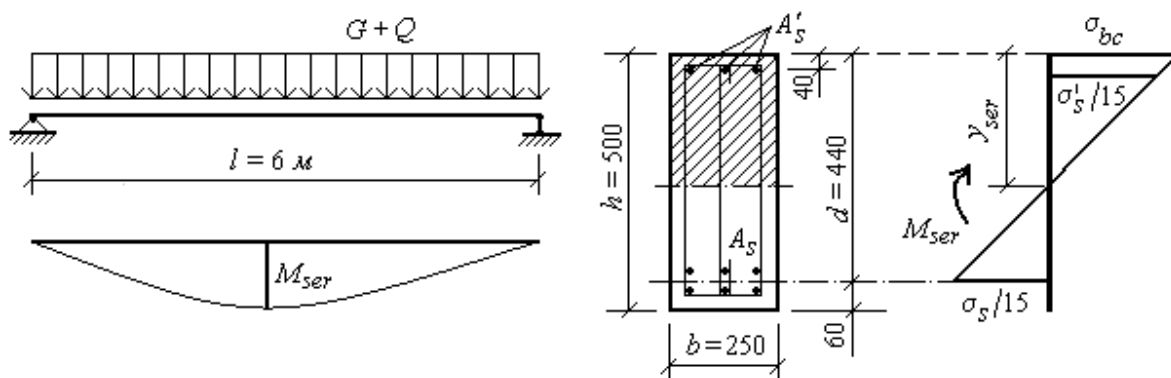


Fig. 6.14

Le moment d'inertie de la section homogène réduite est :

$$I = (250 \times 226,7^3 / 3) + 15 \times 462 (226,7 - 40)^2 + 15 \times 2414 (440 - 226,7)^2 = 28,598 \times 10^8 \text{ mm}^4 ;$$

$$K = M_{ser} / I = (189 \times 10^6) / (28,598 \times 10^8) = 0,066.$$

Donc les contraintes seront :

$$\sigma_{bc} = K y_{ser} = 0,066 \times 226,7 = 14,96 \text{ MPa} \approx 15 \text{ MPa} ;$$

$$\sigma'_s = 15 K (y_{ser} - d') = 15 \times 0,066 (226,7 - 40) = 184,8 \text{ MPa} ;$$

$$\sigma_s = 15 K (d - y_{ser}) = 15 \times 0,066 (440 - 226,7) = 211,2 \text{ MPa}.$$

Alors on a que $\sigma_{bc} = 15 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_{bc} = 0,6 f_{c28} = 0,6 \times 20 = 12 \text{ MPa}$, c'est-à-dire qu'il faut modifier le ferrailage de la section.

On peut faire la même vérification en utilisant les valeurs du tableau A.6. D'après le calcul à l'état-limite ultime on a : $A'_s = 462 \text{ mm}^2$, $A_s = 2414 \text{ mm}^2$. Pour une section doublement armée le coefficient ρ_1 est calculé à partir de la section totale des armatures et de la distance d_1 .

$$d_1 = \frac{A'_s d' + A_s d}{A'_s + A_s} = \frac{462 \cdot 40 + 2414 \cdot 440}{462 + 2414} = 375,7 \text{ mm} ;$$

$$\rho_1 = 100(A'_s + A_s) / b d_1 = 100(462 + 2414) / (250 \cdot 375,7) = 3,062 .$$

Pour $\rho_1 = 3,062$ nous lisons sur le tableau A.6 $\beta_1 = 0,799$.

Alors : $y_{ser} = 3 (1 - \beta_1) d_1 = 3 (1 - 0,799) 375,7 = 226,5 \text{ mm} ;$

Donc on a que y_{ser} est la même que d'après le calcul précédent, c'est-à-dire que $I = 28,598 \times 10^8 \text{ mm}^2$, $K = 0,066$, $\sigma_{bc} = 15 \text{ MPa} > 12 \text{ MPa}$.

3) Calcul des armatures pour l'état-limite de service.

Pour calculer les armatures, nous supposons que la fissuration de la poutre est considérée comme préjudiciable, alors la contrainte maximale admissible pour les armatures tendues est prise d'après les conditions (paragraphe 6.3) :

$$\bar{\sigma}_s \leq 2 f_e / 3 = 2 \cdot 400 / 3 = 266,6 \text{ MPa} ;$$

$$\bar{\sigma}_s \leq \text{Max} (0,5 \sigma_s = 200 \text{ MPa}; 110 \sqrt{1,6 \cdot 1,8} = 187 \text{ MPa}).$$

Alors on prend $\bar{\sigma}_s = 200 \text{ MPa}$. Avec cette valeur on calcule :

$$\mu_1 = M_{ser} / (b d^2 \bar{\sigma}_s) = (189 \cdot 10^6) / (250 \cdot 440^2 \cdot 200) = 0,0195.$$

Pour $\mu_1 = 0,0195$, on trouve sur le tableau A.6 : $k = 0,0853$, $\beta_1 = 0,8127$.

La contrainte du béton correspondante à la contrainte de l'armature tendue alors sera égale à :

$$\sigma_b = k \bar{\sigma}_s = 0,0853 \times 200 = 17,06 \text{ MPa} > 12 \text{ MPa}.$$

Donc, la section doit être armée par des armatures tendues et comprimées. Calculons le coefficient de tableau :

$$\alpha_1 = \frac{15 \bar{\sigma}_{bc}}{15 \bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_s} = \frac{15 \cdot 12}{(15 \cdot 12) + 200} = 0,4737$$

$$y_{ser} = \alpha_1 d = 0,4737 \times 440 = 208,4 \text{ mm}.$$

L'effort de compression repris par le béton ayant la contrainte $\bar{\sigma}_{bc} = 12 \text{ MPa}$:

$$N_b = (b y_{ser} \bar{\sigma}_{bc}) / 2 = (250 \cdot 208,4 \cdot 12) / 2 = 312600 \text{ N}.$$

La contrainte de l'armature comprimée est égale à :

$$\sigma_s' = \frac{15 (y_{ser} - d') \bar{\sigma}_{bc}}{y_{ser}} = \frac{15 (208,4 - 40) 12}{208,4} = 145,5 \text{ MPa}.$$

La section exigée des armatures comprimées et tendues sera :

$$A_s' = \frac{M_{ser} - N_b (d - y_{ser} / 3)}{\sigma_s' (d - d')} = \frac{189 \cdot 10^6 - 312600 (440 - 208,4 / 3)}{145,5 (440 - 40)} = 1257,26 \text{ mm}^2;$$

$$A_s = \frac{N_b + A_s' \sigma_s'}{\bar{\sigma}_s} = \frac{312600 + 1257,26 \cdot 145,5}{200} = 2477,6 \text{ mm}^2$$

Donc, pour satisfaire la condition de limitation des contraintes dans le béton comprimé à l'état-limite de service, on doit augmenter la section des armatures comprimées et tendues. Ainsi dans le cas considéré le ferrailage de la poutre doit être pris d'après le calcul à l'état-limite de service où on a trouvé la plus grande valeur. Alors nous prenons comme ferrailage :

2 \emptyset 22 et 1 \emptyset 25 avec $A_s' = 1251 \text{ mm}^2$ dans la zone comprimée ;

3 \emptyset 22 et 3 \emptyset 25 avec $A_s = 2613 \text{ mm}^2$ dans la zone tendue.

Vérifions la contrainte du béton σ_{bc} avec le ferrailage adopté.

$$d_1 = \frac{A_s' d' + A_s d}{A_s' + A_s} = \frac{1251 \cdot 40 + 2613 \cdot 440}{1251 + 2613} = 310,5 \text{ mm} ;$$

$$\rho_1 = 100 (A_s' + A_s) / b d_1 = (100 \cdot 3864) / (250 \cdot 310,5) = 4,98 .$$

D'après le tableau A.6 on trouve $\beta_1 = 0,771$, alors on calcule :

$$y_1 = 3 (1 - \beta_1) d_1 = 3 (1 - 0,771) 310,5 = 213,3 \text{ mm} ;$$

$$I = 250 \times 213,3^3 / 3 + 15 \times 1251 (213,3 - 40)^2 + 15 \times 2613 (440 - 213,3)^2 =$$

$$= 33,866 \times 10^8 \text{ mm}^4 ;$$

$$K = M_{ser} / I = (189 \times 10^6) / (33,866 \times 10^8) = 0,0558 ;$$

Alors la contrainte du béton : $\sigma_{bc} = K y_1 = 0,0558 \times 213,3 = 11,9 \text{ MPa}$.

Donc la condition $\sigma_{bc} = 11,9 \text{ MPa} \approx \bar{\sigma}_{bc} = 12 \text{ MPa}$ est satisfaite.

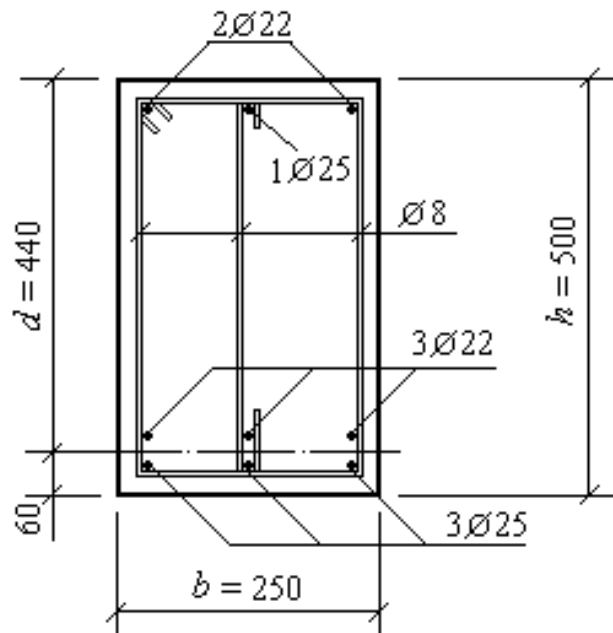


Fig.6.15

6.3. Etat-limite d'ouverture des fissures

Les formes des divers éléments et les dispositions des armatures sont conçues de manière à limiter la probabilité d'apparition de fissures d'une largeur supérieure à celle qui est tolérable en raison du rôle et de la situation de l'ouvrage. Il est nécessaire de limiter l'ouverture des fissures car, si cette ouverture devient trop importante, elle risquerait d'entraîner la corrosion des armatures, de diminuer l'étanchéité des parois, en outre, on obtiendrait un effet désagréable à l'oeil.

D'une manière générale, on parvient à limiter l'ouverture des fissures : en utilisant un pourcentage suffisant d'armatures tendues, en évitant d'employer des barres de trop gros diamètre (donc il faut utiliser le plus petit diamètre, en d'autre terme le plus grand nombre de barres) et en répartissant convenablement les armatures. C'est-à-dire qu'il faut proportionner les diamètres des barres aux dimensions transversales des pièces, compatible avec une mise en place correcte du béton.

Les Règles *B.A.E.L* précisent qu'il n'est pas possible de fixer à priori une largeur de fissure à respecter, vu la très grande variabilité des facteurs influents, tels que :

- les environnements agressifs (les produits nocifs, le sel contre le verglas) ;
- la nature de la structure (présence de pièces minces et la multiplication des surfaces de reprise).

D'autre côté ces Règles précisent que la durabilité de la structure dépend surtout du respect des enrobages et de la qualité du béton en place, en particulier de sa compacité. Il est aussi rappelé que les surfaces de reprise peuvent constituer un point faible si elles sont mal exécutées.

En ce qui concerne la fissuration on distingue trois cas.

1) *La fissuration est considérée comme peu nuisible* lorsque :

- cet élément est situé dans des locaux couverts et clos et n'est pas soumis à des condensations (sauf exceptionnellement et pour de courtes durées) ;
- les parements de cet élément susceptibles d'être fissurés ne sont pas visibles ou sont peu visibles.

Dans ce cas il n'y a aucune vérification particulière à effectuer, il suffit de respecter les règles générales, qui ne sont, d'ailleurs, que des règles de bonne construction (condition de non-fragilité, prescriptions générales et dispositions particulières de certains éléments). Pour éviter les fissurations abusives dans les pièces relativement sollicitées,

il convient de concevoir des éléments non fragiles pour les parties ne comportant pas de joint de dilatation, et de prévoir des armatures de peau (voir les parties suivantes).

Certains éléments font l'objet de règles forfaitaires consacrées par l'expérience (des dalles sur appuis continus, des poutres et de certaines parties des bâtiments courants). Lorsque la membrure d'une poutre est constituée de barres de diamètre supérieur à 20 mm, leur écartement horizontal ne doit pas dépasser quatre fois leur diamètre.

2) *La fissuration est considérée comme préjudiciable* lorsque l'élément est exposé aux intempéries ou à des condensations ou peut être alternativement noyé ou émerger en eau douce.

Il est alors nécessaire d'observer les règles suivantes:

- la contrainte de traction des armatures tendues est limitée à la plus faible des deux valeurs:

$$\sigma_s \leq (2/3) f_e \quad \text{et} \quad \sigma_s \leq \text{Max}(0,5 f_e; 110 \sqrt{\eta f_{tj}}) \quad (6.43)$$

où f_e , la limite élastique de l'acier utilisé ;

η , le coefficient de fissuration ayant pour valeur :

$\eta = 1,0$ pour les ronds lisses et les treillis soudés formés de fils tréfilés lisses ;

$\eta = 1,6$, pour les armatures à haute adhérence ;

$\eta = 1,3$, pour les armatures à haute adhérence formées de fils de diamètre inférieur à 6 mm ;

- le diamètre des armatures est au moins égal à 6 mm ;

- dans les poutres de grande hauteur on dispose des armatures de peau, ces armatures sont placées le long de chaque parement, parallèlement à la fibre moyenne et leur section est au moins 3 cm² par mètre de linéaire de parement ;

- lorsque la membrure tendue d'une poutre est constituée de barres d'un diamètre supérieur à 20 mm, la distance horizontale entre axes de deux barres consécutives doit être inférieure ou égale à quatre fois leur diamètre ;

- pour les dalles et les voiles d'une épaisseur totale h inférieure à 40 cm, la distance entre axes des armatures d'une même nappe ne doit pas dépasser la plus faible des deux valeurs 25 cm et 2 h .

3) *La fissuration d'un élément est considérée comme très préjudiciable* lorsque cet élément est exposé à un milieu agressif ou doit assurer une étanchéité. Les conditions considérées comme très préjudiciables donnent lieu à l'appréciation de la part du maître de l'ouvrage ; parmi les milieux agressifs, on range l'eau de mer ou

l'atmosphère marine (embruns, brouillards salins), l'eau très pure, les gaz ou sols particulièrement corrosifs.

Il est alors nécessaire d'observer les règles suivantes:

- la contrainte de traction des armatures tendues est limitée à la plus faible des deux valeurs :

$$\sigma_s \leq 0,5 f_e \quad \text{et} \quad \sigma_s \leq \text{Max}(0,4 f_e; 90 \sqrt{\eta f_{tj}}) \quad (6.44)$$

(Ou encore on prend contrainte σ_s égale à celle donnée par la formule

6.43 multipliée par 0,8)

- le diamètre des armatures est au moins égal à 8 mm ;
- dans les poutres de grande hauteur on dispose des armatures de peau, ces armatures sont placées le long de chaque parement, parallèlement à la fibre moyenne et leur section est d'au moins 5 cm^2 par mètre de longueur de parement ;
- lorsque les armatures tendues d'une poutre comportent des barres d'un diamètre supérieur à 20 mm , la distance entre axes de ces barres ne doit pas excéder *trois* fois de leur diamètre;
- dans le cas des dalles et des voiles faisant au plus 40 cm d'épaisseur, l'écartement des armatures d'une même nappe est au plus égal à la plus petite des deux valeurs 20 cm et $1,5 h$, où h est l'épaisseur totale de l'élément.

Les contraintes de traction admissibles dans les armatures déterminées d'après les conditions 6.43 et 6.44 sont données par le tableau 2.1.

Lorsque la fissuration est considérée comme préjudiciable ou comme très préjudiciable, il y a lieu de vérifier que les contraintes des armatures tendues (armatures qui ont été déterminées lors des calculs aux états-limites ultimes), sous l'effet des sollicitations relatives aux états-limites de service, sont inférieures aux contraintes limites indiquées ci-dessus. S'il n'en était pas ainsi, il serait nécessaire d'augmenter la section des armatures tendues.

Pour effectuer cette vérification, on pourra :

- calculer la contrainte des armatures tendues par application des méthodes données au paragraphe 6.1 ;
- déterminer les armatures nécessaires pour la sollicitation considérée. On utilise alors les méthodes données au paragraphe 6.2, en prenant pour σ_s la contrainte limite dans le cas de fissuration. Si la valeur des armatures ainsi calculées est supérieure à celle des armatures de la section, c'est cette nouvelle valeur qu'il faudra retenir.

Exemple 6.3. La poutre présentée sur la figure 6.13 (exemple 6.2) avec les dimensions de la section $b \times h = 250 \times 600 \text{ mm}$ et la hauteur utile $600 - 60 = 540 \text{ mm}$. On demande de déterminer le ferrailage de la poutre pour état-limite ultime et de faire la vérification de ce ferrailage pour état-limite de service.

Solution. 1) *Calcul pour l'état-limite ultime.*

Le moment fléchissant $M_u = 270 \text{ kN m}$, le béton a comme la résistance caractéristique $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$ et les armatures longitudinales sont en acier de nuance $Fe E 400$. Pour commencer le calcul on admet que le béton de la zone comprimé atteint le raccourcissement limite $\varepsilon_{bc} = 3,5 \text{ ‰}$, alors la contrainte du béton est : $f_{bc} = 0,85 f_{c28} / \gamma_b = 0,85 \times 20 / 1,5 = 11,3 \text{ MPa}$.

Le coefficient du tableau μ sera égal à :

$$\mu = M_u / b d^2 f_{bc} = 270 \times 10^6 / (250 \times 540^2 \times 11,3) = 0,328.$$

D'après les tableaux A.1 et A.2 on trouve $\mu_l = 0,392$, $\beta = 0,793$.

Vu que $\mu = 0,328 < \mu_l = 392$, on a le domaine 2, alors la contrainte de l'armature est $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa}$ et la section doit être armée par des armatures à calculer dans la zone tendue seulement. De plus, on a que $\mu = 0,328 > 0,186$, donc la contrainte du béton en réalité est égale à sa valeur limite de calcul $f_{bc} = 11,3 \text{ MPa}$.

Alors, la section des armatures sera égale à :

$$A_s = M_u / \beta \sigma_s d = 270 \times 10^6 / (0,793 \times 348 \times 540) = 1811,8 \text{ mm}^2.$$

On prend 6 $\emptyset 20 \text{ mm}$ avec $A_s = 1885 \text{ mm}^2$.

2) *Calcul pour l'état-limite de service.* On considère le cas où la fissuration est **peu préjudiciable**.

Le moment de service $M_{ser} = 189 \text{ kN m}$ (exemple 6.2). La contrainte admissible du béton $\bar{\sigma}_{bc} = 0,6 f_{c28} = 0,6 \times 20 = 12 \text{ MPa}$.

Pour vérifier la contrainte du béton on peut utiliser les valeurs du tableau A.6. La section étant simplement armée (dans la zone tendue seulement), alors on a :

$$\rho_1 = 100 A_s / (b d) = 100 \times 1885 / (250 \times 540) = 1,4 .$$

Vu que pour le cas où la fissuration est peu préjudiciable, on ne limite pas la contrainte des armatures tendues (certainement cette contrainte ne doit pas dépasser la contrainte de calcul pour l'état-limite ultime), on fait le calcul de la contrainte du béton à l'aide de la méthode générale.

D'après le tableau A.6 (pour $\rho_1 = 1,4$), on a $\beta_1 = 0,843$, alors les caractéristiques géométriques de la section réduite seront :

$$y_{ser} = 3(1 - \beta_1) d = 3(1 - 0,843) 540 = 254 \text{ mm.}$$

Vu que la section des armatures $A'_s = 0$, le moment d'inertie est déterminé:

$$I = (b y_{ser}^3 / 3) + 15 A_s (d - y_{ser})^2 =$$

$$= (250 \times 254^3 / 3) + 15 \times 1885 (540 - 254)^2 = 36,7837 \times 10^8 \text{ mm}^4 .$$

$$K = M_{ser} / I = (189 \times 10^6) / (36,7837 \times 10^8) = 0,0514 .$$

Alors, on a: $\sigma_{bc} = K y_{ser} = 0,0514 \times 254 = 13 \text{ MPa} > \bar{\sigma}_{bc} = 12 \text{ MPa}$.

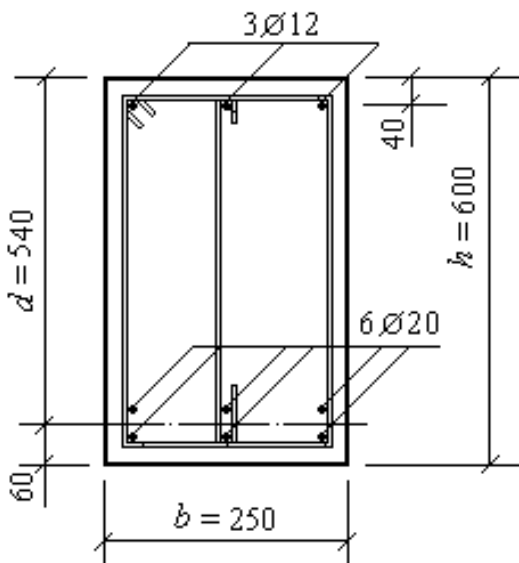


Fig.6.16

Donc la zone comprimée doit être renforcée par des armatures. Vu que la contrainte des armatures n'est pas connue, on peut procéder par approximation successive. Soit on prend en première approximation pour la zone comprimée :

$$3\text{Ø}12 \text{ mm, avec } A'_s = 339 \text{ mm}^2 .$$

Dans ce cas on calcule :

$$\rho_1 = 100 A_{s1} / b d_1 =$$

$$= 100 \cdot 2224 / 250 \cdot 463,8 = 1,92 .$$

$$\text{Avec } A_{s1} = A'_s + A_s =$$

$$= 339 + 1885 = 2224 \text{ mm}^2 .$$

$$d_1 = (A'_s d' + A_s d) / A_{s1} = (339 \times 40 + 1885 \times 540) / 2224 = 463,8 \text{ mm.}$$

D'après le tableau A.6 on a $\beta_1 = 0,826$, alors, la hauteur de la zone comprimée : $y_{ser} = 3(1 - \beta_1) d_1 = 3(1 - 0,826) 463,8 = 242 \text{ mm}$;

$$I = (b y_{ser}^3 / 3) + 15 A_s (d - y_{ser})^2 + 15 A'_s (y_{ser} - d')^2 =$$

$$= (250 \times 242^3 / 3) + 15 \times 1885 (540 - 242)^2 + 15 \times 339 (242 - 40)^2 =$$

$$= 38,994 \times 10^8 \text{ mm}^4 .$$

$$K = M_{ser} / I = (189 \times 10^6) / (38,994 \times 10^8) = 0,0484 .$$

$$\sigma_{bc} = K y_{ser} = 0,0484 \times 242 = 11,7 \text{ MPa} < 12 \text{ MPa} .$$

Donc on a que la condition est satisfaite.

On peut également déterminer la contrainte des armatures tendues:

$$\sigma_s = 15 K (d - y_{ser}) = 15 \times 0,0484 (540 - 242) = 216 \text{ MPa} .$$

Cette valeur n'est pas limitée. Le ferrailage de la poutre pour le cas considéré est donné par la figure 6.16.

3) *Calcul pour l'état-limite de service. On considère le cas où la fissuration est préjudiciable.*

La contrainte admissible du béton est $\bar{\sigma}_{bc} = 12 \text{ MPa}$ et la contrainte des armatures tendues est prise d'après le tableau 2.1 : $\bar{\sigma}_s = 200 \text{ MPa}$.

Pour une section simplement armée on trouve

$$\mu_1 = M_{ser} / b d^2 \bar{\sigma}_s = 189 \times 10^6 / (250 \times 540^2 \times 200) = 0,013.$$

D'après le tableau A.6 on a: $\beta_1 = 0,837$, $k = 0,064$.

Alors, la contrainte du béton $\sigma_{bc} = k \bar{\sigma}_s = 0,064 \times 200 = 12,8 \text{ MPa}$.

Donc la contrainte du béton dépasse la valeur admissible $\bar{\sigma}_{bc} = 12 \text{ MPa}$, c'est-à-dire que la zone comprimée doit être renforcée par des armatures. Pour aboutir au ferrailage minimal, on fait travailler les deux matériaux à leurs limites $\bar{\sigma}_s$ et $\bar{\sigma}_{bc}$. Alors on calcule le coefficient de tableau :

$$\alpha_1 = 15 \bar{\sigma}_{bc} / (15 \bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_s) = 15 \times 12 / (15 \times 12 + 200) = 0,474.$$

On détermine $y_{ser} = \alpha_1 d = 0,474 \times 540 = 256 \text{ mm}$.

La contrainte des armatures comprimées sera :

$$\sigma'_s = [15 (y_{ser} - d') \bar{\sigma}_{bc}] / y_{ser} = [15 (256 - 40) 12] / 256 = 151,9 \text{ MPa}.$$

La section des armatures comprimées sera alors égale à :

$$\begin{aligned} A'_s &= \frac{M_{ser} - N_b (d - y_{ser} / 3)}{\sigma'_s (d - d')} = \frac{M_{ser} - 0,5 y_{ser} b \bar{\sigma}_{bc} (d - y_{ser} / 3)}{\sigma'_s (d - d')} = \\ &= \frac{189 \cdot 10^6 - 0,5 \cdot 256 \cdot 250 \cdot 12 (540 - 256 / 3)}{151,9 (540 - 40)} = 189,7 \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

La section des armatures tendues :

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{N_b + A'_s \sigma'_s}{\bar{\sigma}_s} = \frac{0,5 y_{ser} b \bar{\sigma}_{bc} + A'_s \sigma'_s}{\bar{\sigma}_s} = \\ &= \frac{0,5 \cdot 250 \cdot 256 \cdot 12 + 189,7 \cdot 151,9}{200} = 2064 \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour satisfaire la condition de limitation des contraintes dans le béton comprimé et dans l'armature tendue (cette dernière limite la largeur des fissures), il faut renforcer la zone comprimée par l'armature A'_s et augmenter la section de l'armature A_s (par rapport au calcul pour l'état-limite ultime).

Pour s'assurer que la contrainte du béton en réalité ne dépasse pas la valeur limite, on peut la calculer :

$$\rho_1 = 100 A_{s1} / b d_1 = 100 \times 2253,7 / 250 \times 497,9 = 1,81,$$

où $A_{s1} = A_s + A'_s = 2064 + 189,7 = 2253,7 \text{ mm}^2$;

$$d_1 = (A_s' d' + A_s d) / A_{s1} =$$

$$= (189,7 \times 40 + 2064 \times 540) / 2253,7 = 497,9 \text{ mm}.$$

D'après le tableau A.6 on a: $\beta_1 = 0,8287$, et on calcule la distance :

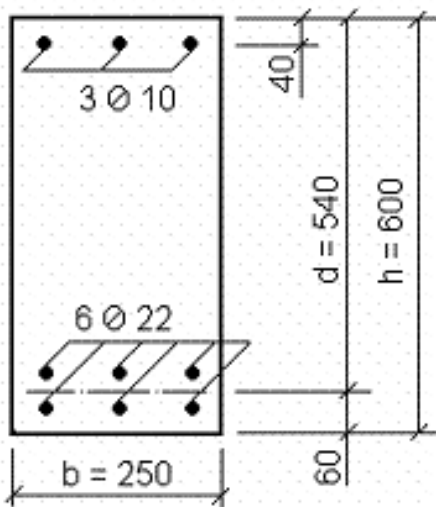
$$y_{ser} = 3 (1 - \beta_1) d_1 = 3 (1 - 0,8287) 497,9 = 255,9 \text{ mm}.$$

$$I = (250 \times 255,9^3 / 3) + 15 [189,7 (255,9 - 40)^2 + 2064 (540 - 255,9)^2] =$$

$$= 40,28 \times 10^8 \text{ mm}^4.$$

$$K = M_{ser} / I = (189 \times 10^6) / (40,28 \times 10^8) = 0,0469 ;$$

$$\sigma_{bc} = K y_{ser} = 0,0469 \times 255,9 = 12 \text{ MPa}.$$



Soit on prend d'après ce calcul dans la zone comprimée 3 Ø 10 mm avec $A'_s = 236 \text{ mm}^2$ et dans la zone tendue 6 Ø 22 mm avec $A_s = 2281 \text{ mm}^2$. Vu que le diamètre des barres tendues 22 mm > 20 mm, elles doivent être disposées de manière que la distance horizontale entre axes de deux barres consécutives soit inférieure ou égale à 4 fois leurs diamètres. En effet, 75 mm < 4 x 22 = 88 mm (fig.6.17). Dans le cas considéré on peut passer des armatures de peau vu que la hauteur de la poutre satisfait la condition :

$$h = 60 \text{ cm} < 2(80 - f_e / 10) =$$

$$= 2(80 - 400 / 10) = 80 \text{ cm}.$$

Fig.6.17

L'enrobage des armatures (y compris des armatures transversales) pour la poutre où la fissuration est considérée comme préjudiciable doit être au moins égal à 30 mm (lorsque le béton présente une résistance caractéristique inférieure à 40 MPa).

4) **Calcul pour l'état-limite de service.** Soit la fissuration est considérée comme **très préjudiciable**.

La contrainte du béton $\bar{\sigma}_{bc} = 12 \text{ MPa}$, et la contrainte des armatures tendues est prise d'après les conditions (6.44) :

$$\bar{\sigma}_s \leq 0,5 f_e = 0,5 \times 400 = 200 \text{ MPa} ;$$

$$\bar{\sigma}_s \leq \text{Max}(0,4 \cdot 400 = 160 \text{ MPa} ; 90 \sqrt{1,6 \cdot 1,8} = 153 \text{ MPa})$$

Donc on prend $\bar{\sigma}_s = 160 \text{ MPa}$.

La contrainte du béton est calculée de la même manière que dans la partie 3 :

$$\mu_1 = M_{ser} / b d^2 \bar{\sigma}_s = 189 \times 10^6 / (250 \times 540^2 \times 160) = 0,0162.$$

$$\beta_1 = 0,824, \quad k = 0,075, \quad \sigma_{bc} = k \bar{\sigma}_s = 0,075 \times 160 = 12 \text{ MPa}.$$

Donc la contrainte du béton ne dépasse pas la valeur admissible. Ainsi, on n'a pas besoin d'armatures comprimées.

En ce qui concerne l'armature tendue, il faut préciser sa quantité. En prenant $\bar{\sigma}_{bc} = 12 \text{ MPa}$ et $\bar{\sigma}_s = 160 \text{ MPa}$, on trouve :

$$\alpha_1 = 15 \bar{\sigma}_{bc} / (15 \bar{\sigma}_{bc} + \bar{\sigma}_s) = 15 \times 12 / (15 \times 12 + 160) = 0,529 ;$$

$$y_{ser} = \alpha_1 d = 0,529 \times 540 = 285,7 \text{ mm} ;$$

$$\beta_1 = 1 - \alpha_1 / 3 = 1 - 0,529 / 3 = 0,8237.$$

La section d'armature tendue sera égale à :

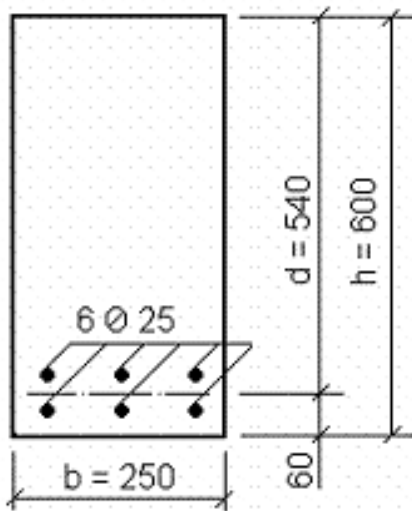


Fig.6.18

$$A_s = M_{ser} / \beta_1 d \bar{\sigma}_s =$$

$$= 189 \cdot 10^6 / 0,8237 \cdot 540 \cdot 160 = 2656 \text{ mm}^2.$$

Alors, on doit prendre 6 Ø 25 mm avec

$$A_s = 2945 \text{ mm}^2.$$

La disposition des armatures tendues est donnée sur la figure 6.18.

6.4. Etat-limite de service des déformations

Les états-limites de déformation s'expriment par des valeurs admissibles des déplacements d'un élément. Le calcul des déformations est effectué pour évaluer les flèches dans l'intention de fixer la contre-flèche à la construction ou de limiter les déformations de service. Le calcul des déformations globales doit tenir compte des phases successives de la construction et des différentes sollicitations exercées. Mais les déformations obtenues lors des phases successives de la construction ne sont pas automatiquement cumulables en raison de la fissuration de béton. Pour tenir compte de l'existence éventuelle de fissures dans les zones tendues, on substitue dans les calculs, au moment d'inertie I_0 de la section totale rendue

homogène, un moment d'inertie fictif I_f évalué empiriquement. Compte tenu de ce but recherché, on tient compte, si nécessaire des déformations différées du béton (retrait et fluage) et de celles dues à la température. Dans le cas courant de calcul des déplacements, on utilise les relations classiques de la Résistance des matériaux en introduisant un moment d'inertie fictif et le module d'élasticité instantané ou différé du béton.

6.4.1. Théorie de calcul des flèches

La courbure de la section, dans les traités de Résistance des matériaux, est déterminée par $1/r = M/EI$.

La flèche $u_{(a)}$ dans une section quelconque d'abscisse "a" ("a" étant compté à partir de l'appui de gauche) d'une poutre soumise à un moment de flexion M est égale au moment de flexion fictif qui serait produit dans cette même section dans la travée isostatique équivalente soumise à une charge répartie fictive M/EI , c'est-à-dire que l'on a, en appelant L la portée de la travée:

$$u_{(a)} = \frac{L-a}{L} \int_0^a \frac{M x dx}{EI} + \frac{a}{L} \int_a^L \frac{M (L-x) dx}{EI}, \quad (6.45)$$

ou avec $1/r = M/EI$:

$$u_{(a)} = \frac{L-a}{L} \int_0^a \frac{1}{r} dx + \frac{a}{L} \int_a^L \frac{1}{r} (L-x) dx. \quad (6.46)$$

Pour le calcul on divise la portée de la travée en $(n - 1)$ éléments égaux et on suppose connues les valeurs des courbures aux n points de division, soit $1/r_1, 1/r_2, 1/r_3 \dots$. La courbure sera positive si le moment M est positif, et négative si M est négatif. On suppose qu'entre deux points de division la courbure varie linéairement, on peut alors tracer le diagramme des courbures dans lequel a_1-a_2, a_2-a_3, \dots sont des droites (fig.6.19). Pour simplifier le raisonnement on divise la travée en quatre tronçons de longueur $L/4$.

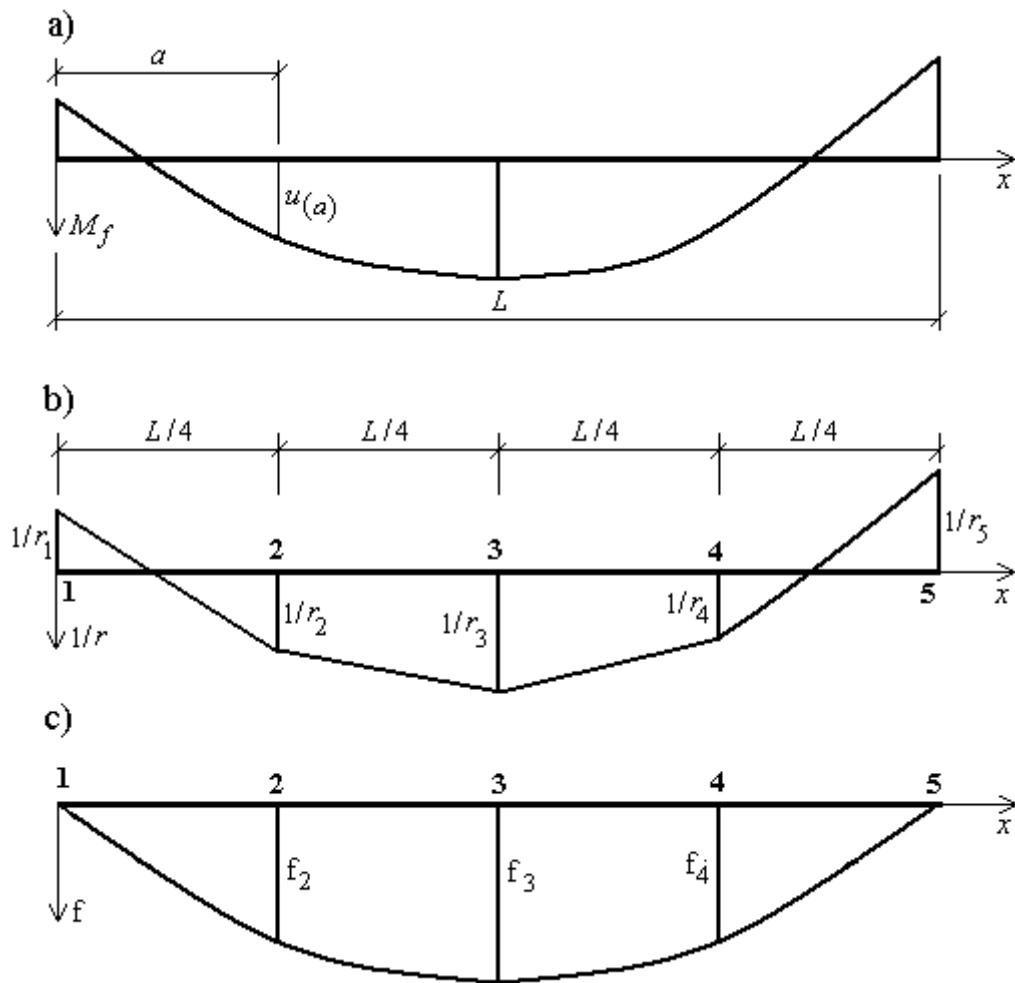


Fig. 6.19

a - épure des moments de flexion; b - schéma de calcul des courbures;
c - schéma de calcul des flèches

Dans les hypothèses considérées, il est possible d'exprimer $u(a)$ en fonction des courbures $1/r_1, 1/r_2, \dots, 1/r_5$. Les flèches aux points 1 et 5 sont évidemment égales à zéro. Les droites des courbures sont des équations de la forme $1/r = mx + p$. Les coefficients m et p étant déterminés en écrivant que la droite $a_1 - a_2$ passe par le point a_1 avec les ordonnées $(0; 1/r_1)$ et le point a_2 avec $(L/4; 1/r_2)$, la droite $a_2 - a_3$ passe par le point $a_2 (L/4; 1/r_2)$ et le point $a_3 (2L/4; 1/r_3)$, etc. Donc on a :

$$a_1 - a_2; \quad \frac{1}{r} = \frac{4}{L} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) x + \frac{1}{r_1};$$

$$\begin{aligned}
a_2 - a_3; \quad \frac{1}{r} &= \frac{4}{L} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right) x + \frac{2}{r_2} - \frac{1}{r_3}; \\
a_3 - a_4; \quad \frac{1}{r} &= \frac{4}{L} \left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_3} \right) x + \frac{3}{r_3} - \frac{2}{r_4}; \\
a_4 - a_5; \quad \frac{1}{r} &= \frac{4}{L} \left(\frac{1}{r_5} - \frac{1}{r_4} \right) x + \frac{4}{r_4} - \frac{3}{r_5}.
\end{aligned}$$

Pour la section 3, où $(L - a)/L = 1/2$; $a/L = 1/2$, la valeur de f_3 sera donnée par :

$$\begin{aligned}
f_3 &= \frac{1}{2} \int_0^{L/4} \left[\frac{4}{L} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) x^2 + \frac{x}{r_1} \right] dx + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{L/4}^{L/2} \left[\frac{4}{L} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right) x^2 + \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) x \right] dx + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{L/2}^{3L/4} \left[\frac{4}{L} \left(\frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_3} \right) x(L - x) + \left(\frac{3}{r_3} - \frac{2}{r_4} \right) (L - x) \right] dx + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{3L/4}^L \left[\frac{4}{L} \left(\frac{1}{r_5} - \frac{1}{r_4} \right) x(L - x) + \left(\frac{4}{r_4} - \frac{3}{r_5} \right) (L - x) \right] dx .
\end{aligned}$$

En intégrant cette relation on obtient :

$$f_3 = \left[\frac{2}{r_1} + \frac{12}{r_2} + \frac{20}{r_3} + \frac{12}{r_4} + \frac{2}{r_5} \right] \frac{L^2}{384} . \quad (6.47)$$

Si l'on voulait obtenir la flèche f_2 les calculs seraient analogues aux précédents, mais dans ce cas $(L - a)/L = 3/4$; $a/L = 1/4$:

$$f_2 = \left[\frac{3}{r_1} + \frac{14}{r_2} + \frac{12}{r_3} + \frac{6}{r_4} + \frac{1}{r_5} \right] \frac{L^2}{384} . \quad (6.47')$$

Pour la flèche f_4 il n'y a aucun nouveau calcul à faire les coefficients numérique des $1/r$ étant les mêmes que ceux de f_2 mais pris dans l'ordre inverse :

$$f_4 = \left[\frac{1}{r_1} + \frac{6}{r_2} + \frac{12}{r_3} + \frac{14}{r_4} + \frac{3}{r_5} \right] \frac{L^2}{384} . \quad (6.48)$$

En prenant en compte que $1/r = M_x/EI$ et $M_x = p x (L - x)/2$, on obtient les valeurs de $1/r$:

- pour le point 1: $x = 0, \quad 1/r_1 = 0$;
- pour le point 2: $x = L/4, \quad 1/r_2 = 3 p L^2 / 32 E I$;
- pour le point 3: $x = L/2, \quad 1/r_3 = 4 p L^2 / 32 E I$;
- pour le point 4: $x = 3 L/4, \quad 1/r_4 = 3 p L^2 / 32 E I$;
- pour le point 5: $x = L, \quad 1/r_5 = 0$.

Alors on peut calculer les flèches, soit f_3 :

$$f_3 = \left[2 \cdot 0 + \frac{12 \cdot 3 p L^2}{32 E I} + \frac{20 \cdot 4 p L^2}{32 E I} + \frac{12 \cdot 3 p L^2}{32 E I} + 2 \cdot 0 \right] \frac{L^2}{384} =$$

$$= \frac{4,75 p L^4}{384 E I} . \quad (6.49)$$

On note que pour une poutre de section constante, supposée constituée d'un matériau homogène, reposant sur deux appuis simples et supportant une charge uniformément répartie p , la résistance des matériaux donne, pour la flèche au milieu de la portée:

$$f = \frac{5 p L^4}{384 E I} . \quad (6.50)$$

Donc on a que la différence des résultats données par la formule (6.49) et (6.50) est de $100 \% (5 - 4,75) / 5 = 5 \%$, c'est-à-dire que la division de la poutre en quatre tronçons donne déjà une très bonne approximation. Si une précision supérieure est requise, on pourrait effectuer ce même calcul avec 8 tronçons de longueur $L/8$, alors on obtiendrait le coefficient 4,94 au lieu de 4,75 (soit une erreur de 1,2%)

$$f = \frac{4,94 p L^4}{384 E I} .$$

Il faut noter que le calcul des flèches avec division de la travée en tronçons devient tout à fait nécessaire, si on a affaire avec des éléments de dimensions transversales variables suivant la longueur ou

encore, si on veut prendre en compte la variation des rigidités des tronçons à cause de différents taux de l'ouverture des fissures.

Par conséquent, dès que les courbures en un certain nombre de sections seront connues, il sera possible de déterminer les flèches.

6.4.2. Calcul des flèches dans le cas général

Dans ce cas les courbures sont calculées à l'état-limite de service à partir du diagramme des contraintes dans la section considérée. Pour évaluer les courbures on utilise la *méthode générale* de calcul.

a) *Pour des sections partiellement comprimées :*

$$1/r = (\varepsilon_s + \varepsilon_{bc}) / d. \quad (6.51)$$

Avec $\varepsilon_{bc} = \sigma_{bc} / E_b$ et $\varepsilon_s = \sigma_s / E_s$. La déformation ε_s doit être calculée compte tenu de l'effet exercé par l'adhérence du béton tendu, alors on remplace ε_s par $\varepsilon_s^* = \varepsilon_s - \Delta\varepsilon_s$ avec $\Delta\varepsilon_s = f_{tj} / 2 E_s \rho_f$ à condition que

$$\rho_f = A_s / b_o c_o \geq f_{tl} / \sigma_s \text{ et avec } c_o \geq 0,3 d \text{ et } c_o \geq 2 d''$$

(dans ce cas : $d'' = h - d$).

Ainsi pour calculer la courbure de chaque section on détermine (soit pour une section rectangulaire) :

- la position de l'axe neutre y solution de :

$$b y_{ser} + 30(A_s + A'_s) y_{ser} - 30(d A_s + d' A'_s) = 0;$$

- le moment d'inertie :

$$I = d (y_{ser})^3 / 3 + 15 \left[A_s (d - y_{ser})^2 + A'_s (y_{ser} - d')^2 \right];$$

- les contraintes : $\sigma_{bc} = M y_{ser} / I$ et $\sigma_s = 15 M (d - y_{ser}) / I$;

- les déformations : $\varepsilon_{bc} = \sigma_{bc} / E_i$ et $\varepsilon_s = \sigma_s / 15 E_s$.

Ensuite on détermine : $\rho_f = A_s / b_o c_o$ avec $c_o \geq 0,3 d$ et $c_o \geq 2 d''$

si : $\rho_f > f_{tj} / \sigma_s$, on prend $\Delta\varepsilon_s = f_{tj} / 2 E_s \rho_f$;

si : $\rho_f < f_{tj} / \sigma_s$, on prend $\Delta\varepsilon_s = 0$.

Puis on détermine $\varepsilon_s^* = \varepsilon_s - \Delta\varepsilon_s$ et $1/r = (\varepsilon_s^* + \varepsilon_{bc}) / d$.

Après avoir déterminé les courbures on calcule les flèches (soit à l'aide de la formule 6.47).

b) *Pour une section entièrement comprimée* (flexion composée avec effort normal de compression):

$$1 / r = (\varepsilon_{bc1} - \varepsilon_{bc2}) / h, \quad (6.52)$$

où ε_{bc1} , déformations de la fibre du béton sur l'arête extrême la plus comprimé ;

ε_{bc2} , déformations de la fibre du béton sur l'arête extrême moins comprimé ;

h , hauteur totale de la section.

Ces déformations relatives du béton sont calculées :

$$\varepsilon_{bc1} = \sigma_{bc1} / E_b \quad \text{et} \quad \varepsilon_{bc2} = \sigma_{bc2} / E_b$$

$$\text{où} \quad \sigma_{bc1} = N_{ser} / S + M_{ser} / I \quad \text{et} \quad \sigma_{bc2} = N_{ser} / S - M_{ser} / I.$$

Le moment d'inertie de la section homogène réduite I (pour une section rectangulaire) peut être déterminé à l'aide de la formule 6.17'

Après avoir déterminé les courbures on obtient les flèches pour chaque point de division de la poutre (soit le numéro " i "):

$$f_i = \frac{L^2}{384} \sum_{j=1}^{j=5} k_{ij} \frac{1}{r_j}. \quad (6.53)$$

Où k_{ij} sont les coefficients établis précédemment.

6.4.3. Calcul des flèches par la méthode forfaitaire

Dans ce cas, on utilise les formules dans lesquelles les valeurs des coefficients qui interviennent ont été "ajustées" en fonction des résultats expérimentaux de mesures de flèches, généralement sous chargement instantané. Pour tenir compte de l'existence éventuelle de fissures dans les zones tendues, on substitue dans les calculs, au moment d'inertie I_0 de la section totale rendue homogène, un moment d'inertie fictif I_f évalué empiriquement :

$$I_f = 1,1 I_0 / (1 + \lambda \mu), \quad (6.54)$$

où I_0 est le moment d'inertie de la section totale homogène

où I_o est le moment d'inertie de la section totale homogène

avec $n = 15$ (soit pour une section rectangulaire) :

$$I_o = b h^3 / 12 + 15 \left[A_s (h/2 - d'')^2 + A'_s (h/2 - d')^2 \right] \quad (6.55)$$

(Formule approchée supposant que le centre de gravité de la section totale homogène coïncide avec centre géométrique).

λ et μ , les coefficients qui sont définis par :

- pour les déformations instantanées :

$$\lambda_i = 0,05 f_{t28} / [(2 + 3b_o / b) \rho];$$

- pour les déformations différées :

$$\lambda_v = 0,02 f_{t28} / [(2 + 3b_o / b) \rho] = 0,4 \lambda_i;$$

$$\mu = 1 - [1,75 f_{t28} / (4 \rho \sigma_s + f_{t28})] > 0, \quad \text{sinon } \mu = 0.$$

Dans ces expressions $\rho = A_s / b_o d$, le coefficient de ferrailage de la section, b_o et b , les largeurs de la nervure et de la table de compression.

Les courbures $1 / r_i$ et $1 / r_v$ sont évaluées en prenant en compte respectivement les moments d'inertie I_{fi} et I_{fv} correspondant à λ_i et λ_v et les modules de déformation E_i et $E_v = E_i / 3$:

$$1 / r_i = M / E_i I_{fi} \quad \text{et} \quad 1 / r_v = M / E_v I_{fv}. \quad (6.56)$$

M étant le moment de flexion qui sollicite la section considérée sous la combinaison envisagée.

A défaut d'une justification fondée sur l'évaluation des déformations à partir des valeurs des courbures, on peut admettre que les flèches f_i et f_v sont égales à :

$$\frac{1}{r_i} = \frac{M L^2}{10 E_i I_{fi}}; \quad \frac{1}{r_v} = \frac{M L^2}{10 E_v I_{fv}}. \quad (6.57)$$

Ces expressions étant applicables aux poutres simplement appuyées ou continues et aux bandes de dalles continues ou non, dirigées dans le sens de la petite portée. Dans tous les cas : L , désigne la portée mesurée entre nus des appuis de la travée et M , le moment de flexion maximal produit dans cette travée par le cas de charge envisagé. Ce moment ne doit pas être inférieur aux valeurs données par application de la "méthode forfaitaire" de calcul des moments.

Pour les consoles, à défaut de justifications plus précises, on peut admettre que les flèches de l'extrémité de la console ont pour valeur :

$$f_i = \frac{M L^2}{4 E_i I_{fi}} ; \quad f_v = \frac{M L^2}{4 E_v I_{fv}} . \quad (6.58)$$

La flèche totale d'un élément est déterminée comme la somme algébrique des flèches dues aux charges permanentes (de longue durée) et aux charges d'exploitation (de courte durée):

$$\Delta f_t = f_{gv} + f_{pi} - f_{gi} \quad (6.59)$$

avec Δf_t , la flèche totale due à l'ensemble des charges permanentes et d'exploitation;

f_{gv} , la flèche différée due aux charges permanentes;

f_{pi} , la flèche instantanée due à l'ensemble des charges permanentes et d'exploitation;

f_{gi} , la flèche instantanée due aux charges permanentes.

Pour des faibles valeurs de σ_s , c'est-à-dire sous les faibles sollicitations, le coefficient μ est nul, donc le moment d'inertie I_f est ainsi égal au moment d'inertie I_0 de la section totale homogène; ce qui est justifié par le fait que, sous de faibles charges, la poutre ne soit pas fissurée, sous réserve que ces charges soient les premières à intervenir. C'est pourquoi il est nécessaire de tenir compte dans le calcul des déformations de l'ordre dans lequel interviennent les diverses charges dont on veut évaluer les effets; en particulier, la détermination de la part de la flèche totale qui est susceptible d'affecter le bon comportement des cloisons doit être effectuée de la façon suivante:

$$\Delta f_t = f_{gv} - f_{ji} + f_{pi} - f_{gi} , \quad (6.60)$$

où f_{ji} , la flèche instantanée due aux charges permanentes avant mise en place des cloisons.

Vu que la flèche différée f_{gv} est engendrée par l'ensemble des charges "g" (charge permanente après mise en place des cloisons), mais, comme au moment de la mise en place des cloisons les charges "j" (charge permanente avant mise en place des cloisons) avaient déjà provoqué une flèche instantanée f_{ji} , alors la flèche définitive due

aux charges permanentes sera $f_{gv} - f_{ji}$. La flèche instantanée due aux charges d'exploitation est $f_{pi} - f_{gi}$.

Pour le calcul de ces différentes flèches on prend en compte, dans le calcul de μ , la valeur de σ_s correspondant au cas de charge envisagé.

6.4.4. Valeurs limites des flèches

Les valeurs limites qui peuvent résulter des conditions particulières d'exploitation des ouvrages sont fixées par les Normes. Ce peut être le cas du bon fonctionnement de machines ou d'appareils dans certaines installations industrielles.

Pour des bâtiments à étages on peut admettre que la part de flèche qui est susceptible de mettre en cause le bon comportement des cloisons et des revêtements de sols ou de plafonds ne doit pas dépasser :

- pour les éléments reposant sur deux appuis :
 $l / 500$ si la portée l est au plus égale à $5 m$,
 $0,5 cm + l / 1000$ dans le cas contraire;
- pour les éléments en console :
 $l / 250$ si la portée est au plus égale à $2 m$.

On considère qu'il n'est pas nécessaire de calculer la flèche d'une poutre si cette poutre est associée à un hourdis et si toutes les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$h/l \geq 1/16; \quad h/l \geq M_t/10M_o; \quad A_s/b_o d \geq 4,2/f_e \quad (f_e \text{ en MPa}).$$

Si le plancher supporte des cloisons il faut, en outre, que la portée de la poutre soit inférieure à $8 m$.

Les notations utilisées sont :

- l , portée de la travée entre nus d'appuis;
- h , hauteur totale de la section droite;
- d , hauteur utile de la section droite;
- b_o , largeur de la nervure;
- M_t , moment fléchissant maximal en travée;
- M_o , moment fléchissant maximal dans la travée supposée indépendante et reposant sur deux appuis libres;
- A_s , section des armatures tendues;
- f_e , limite élastique, en MPa , de l'acier utilisé.

On considère également qu'il n'est pas nécessaire de calculer la flèche d'un hourdis rectangulaire portant sur ses quatre côtés si inégalités suivantes sont satisfaites :

$$h/l_x \geq M_t / 20 M_x; \quad A_s / b d \leq 2 / f_e \quad (f_e \text{ en MPa}),$$

avec, en plus des notations déjà envisagées:

- M_x , moment maximal en travée par bande de largeur unitaire, dans le sens l_x , lorsque la dalle est supposée reposer librement sur ses appuis ($M_x > M_y$);
- M_t , moment en travée par bande de largeur unitaire dans le sens l_x , compte tenu des efforts d'encastrement ou de continuité (M_t ne peut être pris inférieur à $0,75 M_x$);
- A_s , section des armatures tendues par bande de largeur b (en général $b = 100 \text{ cm}$).

Exemple 6.4. On demande de calculer la flèche pour la poutre isostatique d'après les données de l'exemple 6.3. On considère la fissuration de la poutre comme préjudiciable (point 3 de l'exemple 6.3). D'après le calcul précédent on a comme ferrailage: $3\varnothing 10 \text{ mm}$ avec $A_s' = 236 \text{ mm}^2$ dans la zone comprimée et $6\varnothing 22 \text{ mm}$ avec $A_s = 2281 \text{ mm}^2$ dans la zone tendue. La charge permanente de la poutre $g = 20 \text{ kN/m}$ est composée par le poids propre des éléments de couverture $j = 15 \text{ kN/m}$ et par le poids de cloisons 5 kN/m .

Solution. Pour calculer la flèche de la poutre il est plus simple d'utiliser la méthode forfaitaire. Le moment d'inertie de la section totale homogène est :

$$I_o = (b h^3 / 12) + 15 \left[A_s (h/2 - d'')^2 + A_s' (h/2 - d')^2 \right],$$

où d'' est la distance de l'armature tendue à la fibre inférieure de la section, $d'' = h - d = 60 \text{ mm}$.

$$\begin{aligned} I_o &= (250 \times 600^3 / 12) + 15 [2281 (600 / 2 - 60)^2 + 236 (600 / 2 - 40)^2] = \\ &= (45 \times 10^8) + 15 (1,3138 \times 10^8 + 0,15953 \times 10^8) = 67,1 \times 10^8 \text{ mm}^4. \end{aligned}$$

Le moment d'inertie fictif est pris d'après la condition: $I_f = 1,1 I_o / (1 + \lambda \mu)$.

Les coefficients λ et μ sont déterminés à l'aide des formules :

- pour les déformations instantanées :

$$\lambda_i = 0,05 f_{t28} / [(2 + 3 b_o / b) \rho] = 0,05 \times 1,8 / [(2 + 3) 0,0169] = 1,065,$$

avec $b_o = b = 250 \text{ mm}$ et $\rho = A_s / b_o d = 2281 / (250 \times 540) = 0,0169$.

- pour les déformations différées :

$$\lambda_v = 0,02 f_{t28} / [(2 + 3 b_o / b) \rho] = 0,02 \times 1,8 / [(2 + 3) 0,0169] = 0,426 .$$

Le coefficient $\mu = 1 - (1,75 f_{t28}) / (4 \rho \sigma_s + f_{t28})$ doit être calculé séparément pour les différents modes de chargement.

a) *Charge permanente g* après la mise en place des cloisons :

$$M_g = g l^2 / 8 = 20 \times 6^2 / 8 = 90 \text{ kNm}.$$

Pour $\rho_1 = 100 A_s / b d = (100 \times 2281) / (250 \times 540) = 1,69$ d'après le tableau A.6 on trouve : $\beta_1 = 0,832$. Vu que $M = A_s \sigma_s \beta_1 d$, on a :

$$\sigma_{s(g)} = M_g / A_s \beta_1 d = (90 \times 10^6) / (2281 \times 0,832 \times 540) = 87,8 \text{ MPa} ;$$

$$\mu_g = 1 - [(1,75 \times 1,8) / (4 \times 0,0169 \times 87,8 + 1,8)] = 0,593 > 0 .$$

b) *Charge permanente j* avant la mise en place des cloisons :

$$M_j = j l^2 / 8 = (20 - 5) \times 6^2 / 8 = 67,5 \text{ kNm} ;$$

$$\sigma_{s(j)} = M_j / A_s \beta_1 d = (67,5 \times 10^6) / (2281 \times 0,832 \times 540) = 65,9 \text{ MPa}.$$

$$\mu_j = 1 - [(1,75 \times 1,8) / (4 \times 0,0169 \times 65,9 + 1,8)] = 0,496 > 0 .$$

c) *Charge totale p* (permanente et d'exploitation) :

$$M_p = p l^2 / 8 = (20 + 22) \times 6^2 / 8 = 189 \text{ kNm} ;$$

$$\sigma_{s(p)} = M_p / A_s \beta_1 d = (189 \times 10^6) / (2281 \times 0,832 \times 540) = 184,4 \text{ MPa}.$$

$$\mu_p = 1 - [(1,75 \times 1,8) / (4 \times 0,0169 \times 184,4 + 1,8)] = 0,779 > 0 .$$

Il faut noter que la contrainte maximale $\sigma_s^p = 184,4 \text{ MPa}$ ne dépasse pas la contrainte admissible pour le cas considéré (le cas où la fissuration est préjudiciable $\sigma_s = 200 \text{ MPa}$).

Les modules de déformation du béton sont :

- instantané : $E_i = 11000 \sqrt[3]{f_{c28}} = 11000 \sqrt[3]{20} = 29800 \text{ MPa} ;$

- différé : $E_v = 3700 \sqrt[3]{f_{c28}} = 3700 \sqrt[3]{20} = 10000 \text{ MPa} .$

Alors, on peut calculer les moments d'inertie fictifs et les flèches :

a) Pour la charge permanente, $g = 20 \text{ kN/m}$, $M_g = 90 \text{ kNm}$:

- les valeurs différées (la charge de longue durée d'application) :

$$I_{fv} = 1,1 I_o / (1 + \lambda_v \mu_g) =$$

$$= (1,1 \times 67,1 \times 10^8) / (1 + 0,426 \times 0,593) = 58,925 \times 10^8 \text{ mm}^4 ;$$

$$f_{gv} = M_g l^2 / (10 E_v I_{fv}) =$$

$$= (90 \times 10^6 \times 6000^2) / (10 \times 10000 \times 58,925 \times 10^8) = 5,5 \text{ mm}.$$

- les valeurs instantanées (pour la même charge) :

$$I_{fi}(g) = 1,1 I_o / (1 + \lambda_i \mu_g) =$$

$$= (1,1 \times 67,1 \times 10^8) / (1 + 1,065 \times 0,593) = 45,239 \times 10^8 \text{ mm}^4 ;$$

$$f_{gi} = M_g l^2 / (10 E_i I_{fi}(g)) =$$

$$= (90 \times 10^6 \times 6000^2) / (10 \times 29800 \times 45,239 \times 10^8) = 2,4 \text{ mm}.$$

b) Pour la charge permanente $j = 15 \text{ kN/m}$, $M_j = 67,5 \text{ kNm}$ (la valeur des flèches instantanées) :

$$I_{fi}(j) = 1,1 I_o / (1 + \lambda_i \mu_j) =$$

$$= (1,1 \times 67,1 \times 10^8) / (1 + 1,065 \times 0,496) = 48,3 \times 10^8 \text{ mm}^4 ;$$

$$f_{ji} = M_j l^2 / (10 E_i I_{fi}(j)) =$$

$$= (67,5 \times 10^6 \times 6000^2) / (10 \times 29800 \times 48,3 \times 10^8) = 1,7 \text{ mm}.$$

c) Pour la charge totale $p = 42 \text{ kN/m}$, $M_p = 189 \text{ kNm}$ (la valeur des flèches instantanées) :

$$I_{fi}(p) = 1,1 I_o / (1 + \lambda_i \mu_p) =$$

$$= (1,1 \times 67,1 \times 10^8) / (1 + 1,065 \times 0,779) = 40,341 \times 10^8 \text{ mm}^4 ;$$

$$f_{pi} = M_p l^2 / (10 E_i I_{fi}(p)) =$$

$$= (189 \times 10^6 \times 6000^2) / (10 \times 29800 \times 40,341 \times 10^8) = 5,66 \text{ mm}.$$

La flèche totale de la poutre est égale à :

$$\Delta f_t = f_{gv} - f_{ji} + f_{pi} - f_{gi} = 5,5 - 1,7 + 5,66 - 2,4 = 7,0 \text{ mm}.$$

Cette valeur de flèche ne doit pas dépasser la valeur limite qui pour la portée 6 m est : $5 \text{ mm} + l / 1000 = 5 + 6000 / 1000 = 11 \text{ mm}.$

Exemple 6.5. A titre d'exemple on calcule également les flèches pour le cas où la fissuration est peu préjudiciable. Dans ce cas

on a $A_s = 1885 \text{ mm}^2$ (6 \varnothing 20 mm) et $A_s' = 339 \text{ mm}^2$ (3 \varnothing 12 mm).

Solution. Soit pour calculer les contraintes de l'armature tendue on prend en compte la présence de l'armature comprimée. Donc on calcule :

$$\rho_1 = 100 (A_s + A_s') / (b d_1) = 100 (339 + 1885) / (250 \times 463,8) = 1,92, \text{ avec :}$$

$$d_1 = (A_s' d' + A_s d) / (A_s + A_s') = \\ = (339 \times 40 + 1885 \times 540) / (339 + 1885) = 463,8 \text{ mm.}$$

D'après le tableau A.6 on trouve $\beta_1 = 0,826$, alors on calcule :

$$y_{ser} = 3 (1 - \beta_1) d_1 = 3 (1 - 0,826) 463,8 = 242 \text{ mm ;}$$

$$I = b(y_{ser})^3 / 3 + 15 \left[A_s (d - y_{ser})^2 + A_s' (y_{ser} - d')^2 \right] = \\ = (250 \times 242^3 / 3) + 15 [1885 (540 - 242)^2 + 339 (242 - 40)^2] = \\ = 38,994 \times 10^8 \text{ mm}^4.$$

Les contraintes de l'armature tendue seront :

a) Pour $M_g = 90 \text{ kNm}$: $K = M_g / I = 90 \times 10^6 / 38,994 \times 10^8 = 0,023$;

$$\sigma_s = 15 K (d - y_{ser}) = 15 \times 0,023 (540 - 242) = 102,8 \text{ MPa .}$$

b) Pour $M_j = 67,5 \text{ kNm}$: $K = M_j / I = (67,5 \times 10^6) / (38,994 \times 10^8) = 0,0173$;

$$\sigma_s = 15 K (d - y_{ser}) = 15 \times 0,0173 (540 - 242) = 77,3 \text{ MPa.}$$

c) Pour $M_p = 189 \text{ kNm}$: $K = M_p / I = (189 \times 10^6) / (38,994 \times 10^8) = 0,0485$;

$$\sigma_s = 15 K (d - y_{ser}) = 15 \times 0,0485 (540 - 242) = 216,8 \text{ MPa .}$$

Le moment d'inertie pour une section totale rendue homogène est égal a :

$$I_o = (b h^3 / 12) + 15 \left[A_s (h/2 - d'')^2 + A_s' (h/2 - d')^2 \right] = \\ = (250 \times 600^3 / 12) + 15 [1885 (300 - 60)^2 + 339 (300 - 40)^2] = \\ = 45^3 \times 10^8 + 15 [1,08576 \times 10^8 + 0,22916 \times 10^8] = 64,72 \times 10^8 \text{ mm}^4.$$

Les coefficients communs pour le calcul des flèches sont :

$$\lambda_i = 0,05 f_{t28} / [(2 + 3 b_o / b) \rho] = 0,05 \times 1,8 / [(2 + 3) 0,014] = 1,286 ;$$

$$\lambda_v = 0,4 \lambda_i = 0,4 \times 1,286 = 0,514,$$

avec $b_o / b = 1$; $\rho = A_s / b d = 1885 / (250 \times 540) = 0,014$.

Les modules de déformation du béton sont :

$$E_i = 29800 \text{ MPa}, \quad E_v = 10000 \text{ MPa.}$$

Les flèches de la poutre sont calculées séparément :

a) Pour la charge permanente, $g = 20 \text{ kN/m}$, $M_g = 90 \text{ kNm}$:

- les valeurs différées (la charge de longue durée d'application) :

$$\begin{aligned}\mu_g &= 1 - [1,75 f_{t28} / (4 \rho \sigma_s + f_{t28})] = \\ &= 1 - [(1,75 \times 1,8) / (4 \times 0,014 \times 102,8 + 1,8)] = 0,583\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{fv} &= 1,1 I_o / (1 + \lambda_v \mu_g) = \\ &= (1,1 \times 64,72 \times 10^8) / (1 + 0,514 \times 0,583) = 54,777 \times 10^8 \text{ mm}^4 ; \\ f_{gv} &= M_g l^2 / (10 E_v I_{fv}) = \\ &= (90 \times 10^6 \times 6000^2) / (10 \times 10000 \times 54,777 \times 10^8) = 5,91 \text{ mm}.\end{aligned}$$

- les valeurs instantanées (pour la même charge) :

$$\begin{aligned}I_{fi}(g) &= 1,1 I_o / (1 + \lambda_i \mu_g) = \\ &= (1,1 \times 64,72 \times 10^8) / (1 + 1,286 \times 0,583) = 40,687 \times 10^8 \text{ mm}^4 ; \\ f_{gi} &= M_g l^2 / (10 E_i I_{fi}(g)) = \\ &= (90 \times 10^6 \times 6000^2) / (10 \times 29800 \times 40,687 \times 10^8) = 2,67 \text{ mm}.\end{aligned}$$

b) Pour la charge permanente $j = 15 \text{ kN/m}$, $M_j = 67,5 \text{ kNm}$ (la valeur des flèches instantanées) :

$$\begin{aligned}\mu_j &= 1 - [1,75 f_{t28} / (4 \rho \sigma_s + f_{t28})] = \\ &= 1 - [(1,75 \times 1,8) / (4 \times 0,014 \times 77,3 + 1,8)] = 0,486 ; \\ I_{fi}(j) &= 1,1 I_o / (1 + \lambda_i \mu_j) = \\ &= (1,1 \times 64,72 \times 10^8) / (1 + 1,286 \times 0,486) = 43,81 \times 10^8 \text{ mm}^4 ; \\ f_{ji} &= M_j l^2 / (10 E_i I_{fi}(j)) = \\ &= (67,5 \times 10^6 \times 6000^2) / (10 \times 29800 \times 43,81 \times 10^8) = 1,86 \text{ mm}.\end{aligned}$$

c) Pour la charge totale $p = 42 \text{ kN/m}$, $M_p = 189 \text{ kNm}$ (la valeur des flèches instantanées) :

$$\begin{aligned}\mu_p &= 1 - [(1,75 \times 1,8) / (4 \times 0,014 \times 216,8 + 1,8)] = 0,774 ; \\ I_{fi}(p) &= 1,1 I_o / (1 + \lambda_i \mu_p) = \\ &= (1,1 \times 64,72 \times 10^8) / (1 + 1,286 \times 0,774) = 35,68 \times 10^8 \text{ mm}^4 ; \\ f_{pi} &= M_p l^2 / (10 E_i I_{fi}(p)) = \\ &= (189 \times 10^6 \times 6000^2) / (10 \times 29800 \times 35,68 \times 10^8) = 6,40 \text{ mm}.\end{aligned}$$

La flèche totale de la poutre est égale à :

$$\Delta f_t = f_{gv} - f_{ji} + f_{pi} - f_{gi} = 5,91 - 1,86 + 6,40 - 2,67 = 7,78 \text{ mm}.$$

Donc, la rigidité de la poutre est suffisante, en effet $\Delta f_t = 7,78 \text{ mm} < 11 \text{ mm}$.

CHAPITRE 7. PLANCHERS DES BATIMENTS

7.1. Description et dispositions constructives

Les planchers rencontrés dans les bâtiments de destinations diverses ou dans les constructions industrielles se classent en quatre grandes catégories:

- planchers avec dalle, poutres secondaires (poutrelles) et poutres principales;
- planchers à poutrelles parallèles rapprochées ;
- planchers à "hourdis creux" (ou à "corps creux") ;
- planchers champignons et planchers-dalles.

Un plancher d'habitation ou d'usine est une aire généralement plane, destinée à limiter les étages et à supporter les revêtements de sols, dont les deux fonctions principales sont :

- une fonction de résistance mécanique : il doit supporter son poids propre et les surcharges ;
- une fonction d'isolation acoustique et thermique qui peut être assurée complémentirement par un faux plafond ou un revêtement de sol approprié.

7.1.1. Planchers constitués d'une dalle, des poutres secondaires et principales

Ce type de plancher est le plus courant pour les bâtiments industriels. Il est constitué par une dalle (également appelé hourdis), reposant sur un système de poutres secondaires et de poutres principales. L'épaisseur de la dalle est généralement comprise, pour les constructions courantes, entre $1/30$ et $1/35$ de la portée entre des appuis, suivant l'importance de la surcharge. Pour des raisons de construction, on ne descend pas au-dessous d'une épaisseur de 4 à 5 *cm*. Le plus souvent cette épaisseur est prise entre 8 et 12 *cm*.

L'espacement des poutrelles est généralement compris entre 1,5 et 2,5 *m*, celui des poutres principales entre 5 et 6 *m* (fig. 7.1). Pour les constructions courantes on prend une hauteur des poutres comprise entre $1/10$ et $1/15$ de la portée et une largeur comprises entre 0,3 et 0,4 fois la hauteur. Il ne faut pas, afin d'éviter le déversement de la poutre si celle-ci n'est pas contreventée, choisir une largeur inférieure à 0,2 fois

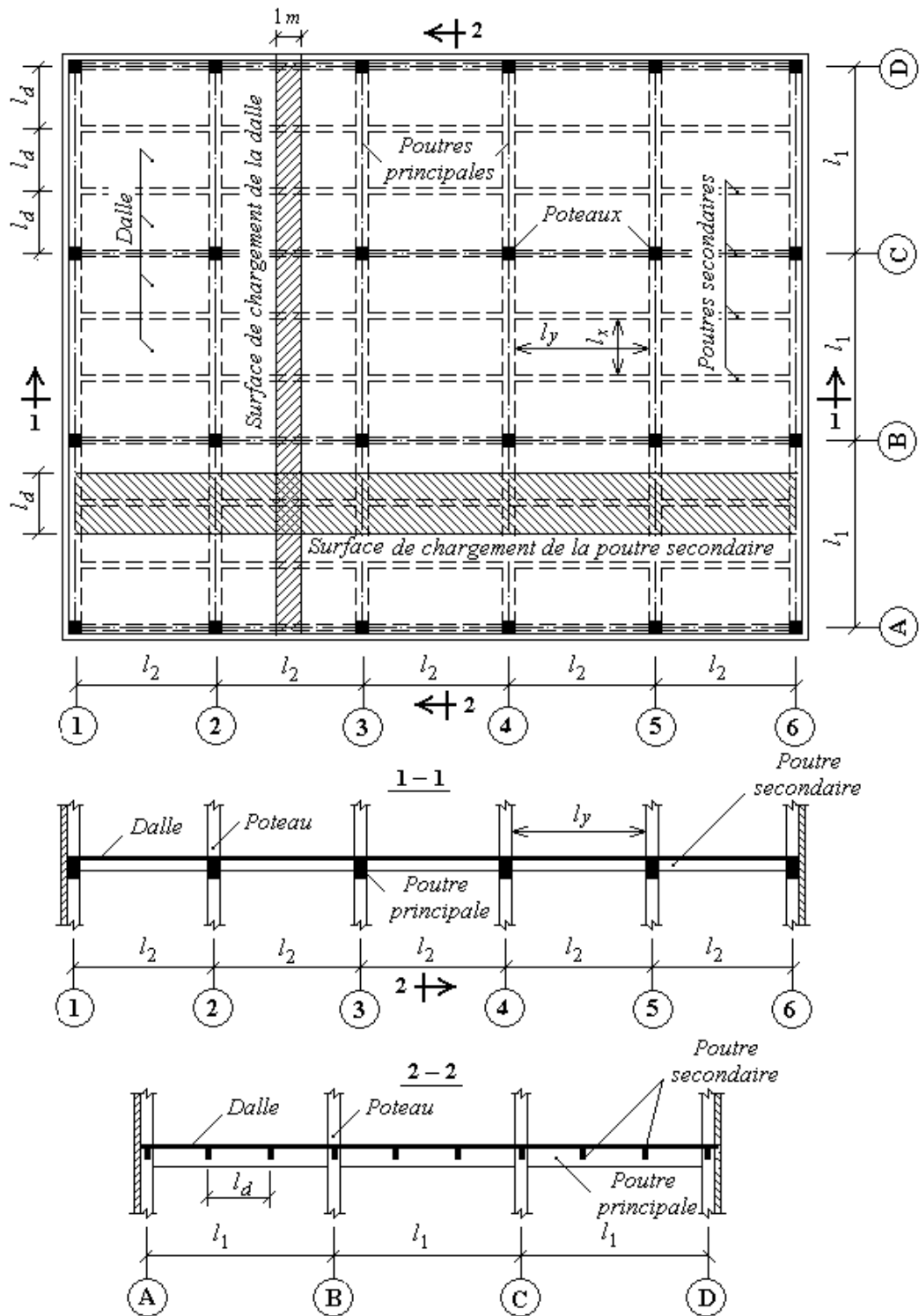


Fig.7.1. Plancher monolithe nervuré à lalles à poutres

la hauteur. La largeur retenue devra être suffisante pour permettre de placer les armatures, compte tenu du fait que ces armatures doivent être suffisamment éloignées des parois et suffisamment écartées entre elles (voir la partie 1.3.4).

Les panneaux de la dalle reçoivent les charges statiques et dynamiques et les transmettent aux poutrelles et aux poutres principales qui, en outre reçoivent, ponctuellement les actions des poutrelles. L'ensemble des efforts est finalement repris par des poteaux ou par des murs de

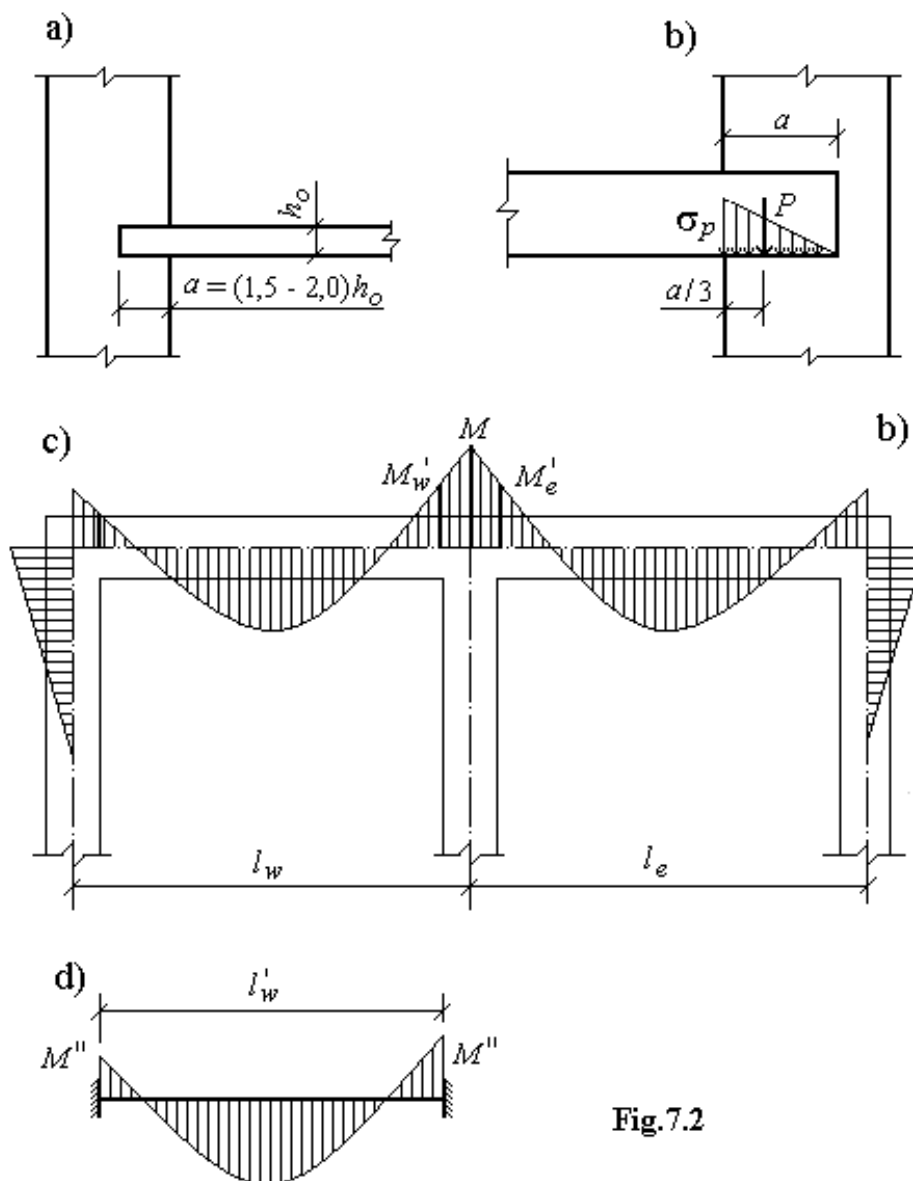


Fig. 7.2

refend porteurs. Lorsqu'un hourdis, d'épaisseur h_o , repose sur un mur en maçonnerie, la profondeur d'appui "a" est au moins égale à $1,5 h_o$.

La portée à prendre en compte dans les calculs est mesurée entre les points d'application des résultantes des réactions d'appuis :

- dans le cas des poutres munies d'appareils d'appuis ;
- dans le cas des poutres reposant sur des massifs de maçonnerie.

Dans ce dernier cas, on fixera la position de ce point d'application en admettant une répartition triangulaire des pressions à partir de la contrainte maximale admissible sur la maçonnerie (fig.7.2,b).

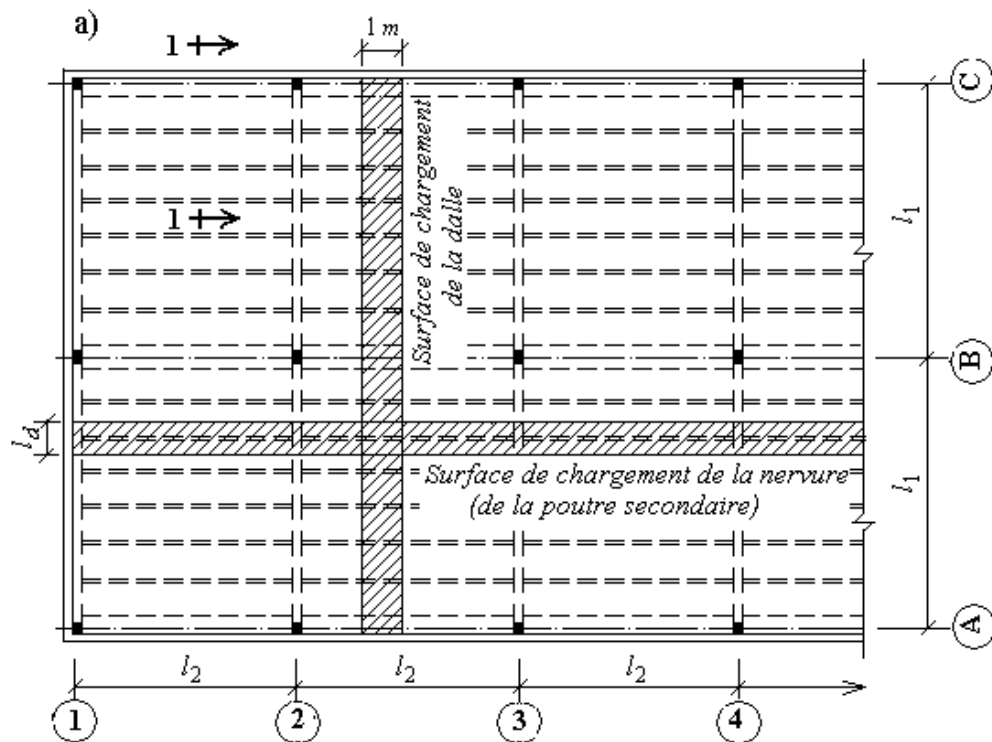
Lorsqu'une poutre repose sur un mur en maçonnerie, il y a lieu de vérifier que les contraintes résultant des réactions de cette poutre sont inférieures aux contraintes admissibles pour la maçonnerie. S'il n'en est pas ainsi, on dispose sous l'extrémité de la poutre un sommier en béton. Dans les autres cas, en particulier dans le cas très fréquent où les éléments du plancher reposent sur des appuis en béton (poutre, poteaux), la portée à prendre en compte est mesurée entre les nus des appuis.

Lorsque le schéma de calcul fait nécessairement intervenir les portées entre axes des appuis (par exemple le calcul en portique), il arrive que les moments de continuité M'_w et M'_e (fig. 7.2,c) au nu intérieur des appuis soient notablement plus faibles que ceux obtenus dans l'axe de ces appuis (moment M). Dans ce cas on prend comme la portée calculée la distance entre nus (l'_w) et on fait le calcul en supposant l'encastrement parfait sur ses appuis. On obtient ainsi un moment d'encastrement au nu des appuis M'' . Pour le calcul de ferrailage on prend la plus grande des valeurs M' et M'' , M''' étant la plus petite des valeurs M et M'' .

7.1.2. Planchers à corps creux

De tels planchers comprennent en dehors des poutrelles préfabriquées ou coulées en place :

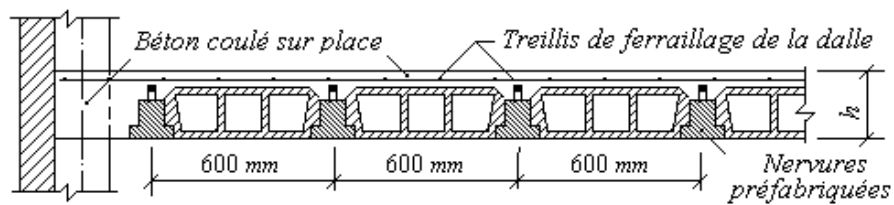
- soit un hourdis coulé en place sur des entrevous en terre cuite ou en béton prenant appui sur les poutrelles (fig. 7.3,c) ;
- soit un hourdis préfabriqué qui est relié avec les poutrelles par un clavetage coulé en place (fig. 7.3,b) ;
- soit un hourdis coulé en place sur une pré-dalle préfabriquée en béton armé, qui est convenablement reliée avec le hourdis. La dalle,



Section 1-1

b)

(Plancher avec des nervures préfabriquées)



Section 1-1

c)

(Plancher avec des nervures coulées sur place)

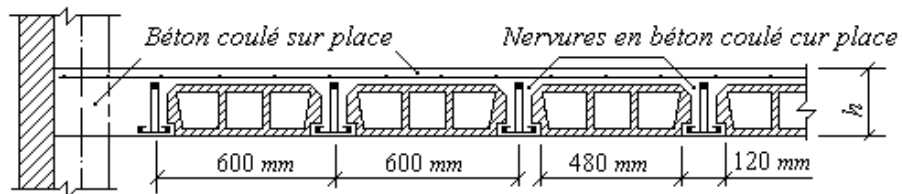


Fig.7.3. Planchers à corps creux

a - plan du plancher à corps creux ; b- plancher avec des poutrelles préfabriquées
c - plancher avec des poutrelles en béton coulé sur place

formée par la pré-dalle et le hourdis coulé en place, doit avoir en phase finale, un fonctionnement monolithique. On note que le principe du calcul des planchers à corps creux est le même que celui des planchers ordinaires (avec dalle, poutres secondaires et principales).

La liaison entre éléments préfabriqués et béton coulé en place doit assurer le monolithisme de l'ensemble pour les efforts à transmettre, ce qui implique que toute surface de reprise soit traversée par des aciers de couture (de plus, on doit éviter les surfaces de reprise lisse).

Les poutrelles préfabriquées doivent être justifiées en phase de construction en considérant leurs dispositions d'étalement. Lorsqu'il est prévu des étais intermédiaires, on admet couramment de ne pas tenir compte de ces phases de construction dans la justification de l'ouvrage terminé. Pour le calcul des poutrelles préfabriquées en phase de construction, on considère l'effet des poids des ouvriers, des matériaux et des appareils de service. Dans les cas les plus courants, on peut prendre, outre le poids des matériaux et des coffrages, une charge localisée au centre de chaque portée entre étais dont l'intensité est la plus grande des deux valeurs : 1 kN et $0,5 \text{ kN}$ par mètre de portée entre étais.

Pour les planchers avec hourdis sur entrevous de terre cuite ou béton, il est possible de ne pas prévoir d'armature de couture entre les poutrelles préfabriquées et le béton coulé en place, ainsi que d'armatures d'effort tranchant dans les poutrelles sous réserve que les conditions suivantes soient toutes satisfaites :

- ces poutrelles appartiennent à des planchers de constructions courantes pour lesquels aucune protection parasismique n'est demandée;
- la forme des poutrelles et celle des entrevous permet le blocage effectif des poutrelles dans l'ensemble du plancher ;
- la distance entre les arêtes supérieures des poutrelles et les entrevous n'est pas inférieure à 4 cm ;
- la contrainte moyenne ultime de glissement sur le périmètre de liaison ne dépasse pas $0,55 \text{ MPa}$, ce périmètre étant mesuré sans prendre en compte les parties où la distance entre poutrelles et entrevous est inférieure à 2 cm ;
- la valeur de calcul τ_u évaluée en prenant pour d la hauteur utile des poutrelles en phase finale et pour b_o la plus petite largeur de cette poutrelle, reste inférieure à $0,02 f_{c28}$.

Dans le cas de poutrelles comportant des talons munis d'aciers principaux (de flexion), on s'assure que la contrainte de glissement de calcul dans les plans verticaux de jonction du talon à l'âme ne dépasse pas $0,02 f_{c28}$. Si cette condition n'est pas satisfaite, il y a lieu d'appliquer à ces plans verticaux la règle des coutures.

Dans le cas d'un hourdis sur entrevous en terre cuite ou en béton, le hourdis doit avoir une épaisseur minimale de 4 cm.

Le principe du calcul des planchers à corps creux est le même que celui des planchers ordinaires (avec dalle, poutres secondaires et principales, voir partie 7.2).

7.1.3. Planchers avec pré-dalles

On désigne par le terme de "pré-dalles" des dalles préfabriquées destinées à former la partie inférieure armée d'une dalle pleine, la dalle ainsi constituée présente en phase finale un comportement monolithique. Les planchers avec pré-dalles peuvent avoir deux, trois ou quatre bords appuyés, ils peuvent aussi constituer les hourdis de planchers nervurés. Dans ces planchers la partie supérieure bétonnée en place doit avoir une épaisseur au moins égale à celle des pré-dalles. On ne considère pas le plancher avec pré-dalle si cette pré-dalle joue seulement un rôle de coffrage de dalle ou de hourdis pendant la construction, ainsi que les pré-dalles comportant des nervures en béton importantes et les pré-dalles dont l'épaisseur totale de béton excède la moitié de l'épaisseur du plancher fini, qui peuvent néanmoins être utilisés de façon satisfaisante. L'épaisseur minimale d'une pré-dalle résulte des conditions d'enrobage et des tolérances de positionnement des armatures. Les conditions d'enrobage des armatures conduisent en pratique à une épaisseur de 5 cm, sauf pour les pré-dalles de petites dimensions pour lesquelles une épaisseur peut être de 4 cm.

Les pré-dalles doivent être justifiées en phases de manutention, de stockage et de mise en place, compte tenu des dispositifs d'appui et de levage prévoient dans ces opérations. Elles doivent être justifiées en phase d'exécution du plancher du fait de leur rôle de coffrage.

La dalle constituée par la pré-dalle et le béton coulé en place (phase finale) est ensuite justifié comme une dalle monolithique. Cette

justification peut être faite sans tenir compte des phases provisoires sous réserve que les pré-dalles reposent en phase d'exécution du plancher sur des étais intermédiaires distants au plus de vingt cinq fois l'épaisseur des pré-dalles.

Lorsqu'un panneau de dalle a son coffrage constitué par plusieurs pré-dalles, les sections au droit des joints intermédiaires peuvent être considérées soit comme rétablissant la continuité, soit comme des articulations, suivant les dispositions de ferrailage adoptées dans le béton coulé en place au droit de ces joints.

La résistance au glissement (sous l'action des contraintes tangentes) est à justifier au niveau de la surface de reprise entre la pré-dalle et le béton coulé en place, par application des règles de couture. Dans le cas des planchers de "constructions courantes" pour lesquels aucune protection parasismique n'est demandée, aucune armature de couture n'est à prévoir si les conditions suivantes sont remplies :

- l'élément en cause n'est soumis qu'à des charges réparties, lentement variables, non susceptibles d'effets dynamiques ou de chocs ;

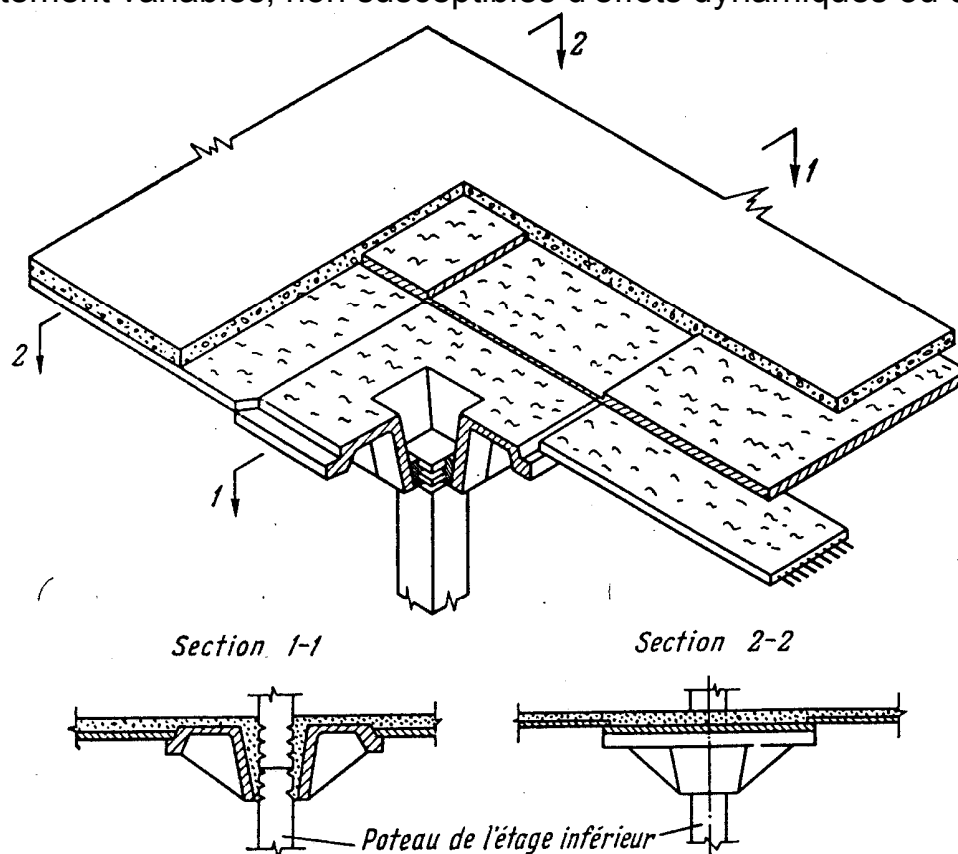


Fig. 7.4. Exemple du plancher à pré-dalles préfabriquées

- la surface de reprise est traitée pour lui donner une rugosité importante, par exemple en ménageant des indentations de liaison;
- la contrainte normale éventuelle est une compression.

Si ces conditions ne sont pas respectées, il y a lieu de prévoir des armatures de couture. Ces armatures doivent être déterminées à partir de la force totale de glissement ultime s'exerçant sur les tiers extrêmes et être disposées dans ces zones. Le pas des fils d'armatures de contour ne doit pas excéder la hauteur de plancher et l'intervalle entre ces fils ne doit pas excéder trois fois cette hauteur.

7.1.4. Planchers - champignons. Planchers - dalles

Les planchers - champignons, qui ne comportent aucune poutre, sont constitués d'une dalle d'épaisseur constante et généralement importante. Cette dalle repose sur des piliers dont la tête est élargie en forme de chapiteaux ou de "champignons" (fig. 7.5). Lorsque les chapiteaux n'existent pas on a alors un plancher - dalle.

Les planchers champignons sont construits avec un réseau de poteaux carré ou rectangulaire à portées égales. Pour un réseau rectangulaire le rapport de la grande portée à la petite est limité par 1,5. Suivant le contour de l'édifice, la dalle peut prendre appuis sur les murs ou la ceinture de contour ou bien former le porte-à-faux au-delà des champignons des poteaux extrêmes.

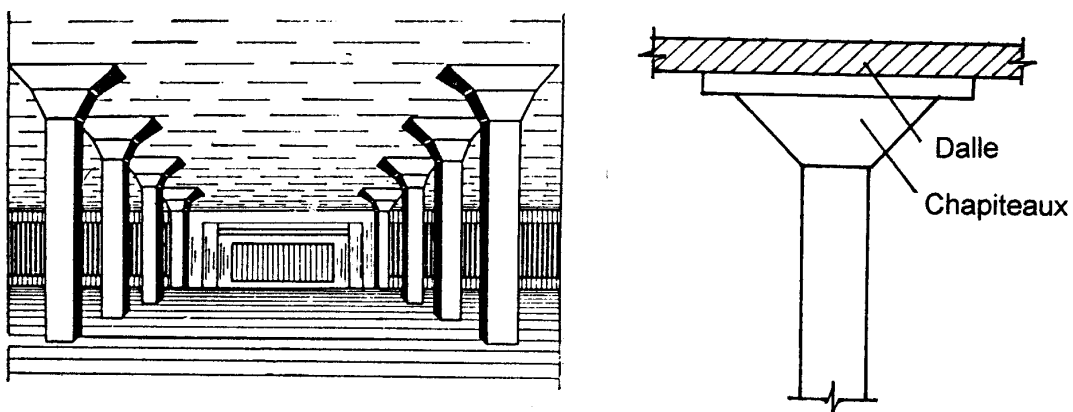


Fig. 7.5. Plancher champignon

Les dimensions et les configurations des champignons doivent être choisies de manière à éliminer toute possibilité de cisaillement de la dalle sans nervures suivant le périmètre du champignon.

L'épaisseur d'une dalle sans nervures considérée suffisamment rigide peut être prise égale à $1 / 32$ à $1 / 35$ de la plus grande portée pour un réseau de poteaux rectangulaire. Le calcul rigoureux de ce genre de plancher est extrêmement complexe, dans la pratique, on utilise des méthodes simplifiées (voir volume II [7], planchers champignons).

7.2. Calcul des dalles de planchers

7.2.1. Détermination des charges. Combinaisons des charges

Les planchers des bâtiments sont calculés pour la charge d'exploitation maximale qu'il est appelé à supporter. Dans le cas général les éléments de plancher des bâtiments peuvent être soumis à l'action des charges permanentes, des charges d'exploitation, des charges climatiques, des charges appliquées en cours d'exécution, des effets dus à la température. Mais pour le calcul pratique des éléments de plancher le plus souvent on ne considère que d'action des charges permanentes et des charges d'exploitation.

Pour déterminer les sollicitations (moment de flexion, effort normal, effort tranchant) auxquelles un plancher est soumis, on utilise les combinaisons d'actions.

Dans le cas de planchers soumis uniquement aux actions des charges permanentes et d'exploitation, les seules combinaisons à considérer vis-à-vis des états-limites ultimes sont :

Combinaisons:	Travées chargées:	Travées déchargées:
(1)	$1,35 G + 1,5 Q_B$	$1,35 G$
(2)	$G + 1,5 Q_B$	G

La combinaison (2) n'est en général pas déterminante si on tient compte de l'adaptation qui permet un décalage de la courbe enveloppe des moments, sous réserve qu'une partie de la section des aciers inférieurs est prolongée jusqu'aux appuis. En revanche, dans le cas d'une travée prolongée par un porte-à-faux, la combinaison (2) doit être prise en considération (4^e schéma, fig.7.6).

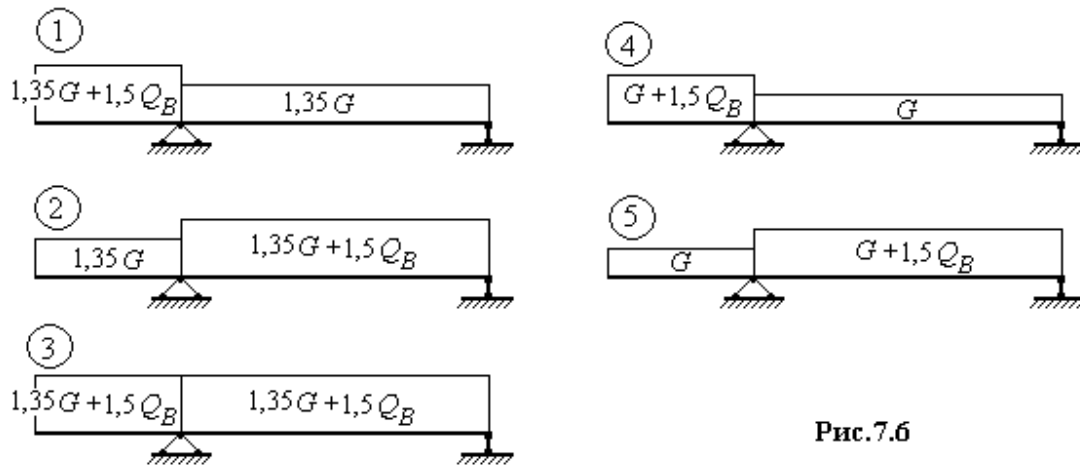


Рис. 7.6

Dans le cas d'une poutre sur deux appuis simples prolongée par un porte-à-faux, les différents cas de charge à considérer sont les suivants (fig. 7.6) :

- le cas (4) est déterminant pour le calcul de la longueur des armatures en chapeaux du côté de la travée, il doit être pris en considération pour la justification de l'équilibre statique, mais avec 0,9 G dans la travée entre appuis ;
- le cas (5) est éventuellement déterminant pour la vérification du moment positif en travée.

En pratique, si la travée n'est pas prolongée par un porte-à-faux, c'est la combinaison (1) qui est déterminante.

Lorsque les éléments d'un plancher, en plus des actions des charges permanentes et des charges d'exploitation sont soumis à l'action du vent (W), aux combinaisons envisagées ci-dessus (1) et (2) s'ajoutent celles données ci-dessous (3), (4), (5) et (6).

Combinaisons:	Travées chargées:	Travées déchargées:
(1)	$1,35 G + 1,5 Q_B$	$1,35 G$
(2)	$G + 1,5 Q_B$	G
(3)	$1,35 G + 1,5 Q_B + W$	$1,35 G + W$
(4)	$G + 1,5 Q_B + W$	$G + W$
(5)	$1,35 G + 1,5 W + 1,3 \psi_0 Q_B$	$1,35 G + 1,5 W$
(6)	$G + 1,5 W + 1,3 \psi_0 Q_B$	$G + 1,5 W$

$1,3 \psi_0 = 1$ pour les constructions courantes, à l'exclusion des salles de spectacle ;

$1,3 \psi_0 = 1,3$ pour les salles de spectacles, les bâtiments de stockage et, éventuellement, certaines constructions industrielles.

Suivant les valeurs respectives de Q_B et W , et leur signe, certaines combinaisons ne sont pas à retenir. Par exemple, (1) et (2) sont incluses dans (3) et (4) avec $W = 0$; (3) et (4), dans le cas des travées déchargées, sont incluses dans (5) et (6).

Dans les différentes travées d'un portique soumis à l'action des charges d'exploitation et du vent, les charges d'exploitation peuvent ou non être appliquées par travées entières dans les conditions les plus défavorables, mais le vent est à prendre en compte (dans un sens ou dans l'autre) sur l'ensemble des travées.

Dans la grande majorité des cas, on aura normalement à retenir, pour la vérification des moments sur appuis et en travée, la plus défavorable des deux combinaisons suivantes :

$$1,35 G + 1,5 Q_B + W ; \quad 1,35 G + 1,5 W + 1,3 \psi_0 Q_B$$

La combinaison $G + 1,5 W$ étant à prendre en considération dans la vérification aux moments positifs sur appuis.

Si le plancher est susceptible d'être soumis à l'action de la neige (S_n) comme cela se présente pour les terrasses (pour les pays européens), les combinaisons à envisager sont celles définies pour le vent en remplaçant W par S_n .

Les charges appliquées au plancher sont reprises tout d'abord par des hourdis et ensuite elles sont transmises aux poutres. Dans tous les cas, pour l'évaluation des charges transmises par les hourdis aux poutres et poutrelles, on peut négliger l'effet de continuité des hourdis. Pour la transmission des charges par des éléments autres que les hourdis, il importe de distinguer les deux cas suivants.

1. *Planchers à charge d'exploitation modérée.*

Un plancher est dit à charge d'exploitation modérée si la valeur nominale de la charge d'exploitation (avant application de tout coefficient de majoration) est au plus égale à deux fois la valeur de la charge permanente ou à 5 kN/m^2 (la charge permanente étant également à considérer avant application du coefficient 1,35). De plus, les charges localisées appliquées à un élément quelconque de plancher (telle que des meubles, l'action d'un cric), ces charges localisées doivent être inférieures à la plus grande des deux valeurs suivantes : 2 kN et le quart de la charge d'exploitation totale susceptible d'être appliquée à cet

élément. En pratique la charge d'exploitation modérée est généralement applicable aux bâtiments à usage d'habitation ou de bureaux, aux écoles, aux hôpitaux et souvent aux magasins, boutiques, salles de spectacles.

Dans le cas des charges modérées on admet, pour la transmission des efforts par des poutrelles et des poutres, la discontinuité des éléments, exception faite toutefois :

a) des travées de rive des poutrelles et des poutres où, sur le premier appui intermédiaire, il est tenu compte de la solidarité :

- soit on considère les moments de continuité adoptés ;
- soit forfaitairement, on majore les réactions correspondant aux travées indépendantes de 15 % s'il s'agit de poutrelle à 2 travées et de 10 % s'il s'agit de poutrelles à plus de 2 travées ;

b) des travées de rive prolongées par une console, où l'on tient compte de l'effet de console.

2. Planchers à charge d'exploitation relativement élevée.

Lorsque les conditions indiquées ci-dessus (point 1 de ce paragraphe) ne sont pas remplies et, en particulier, lorsque la charge d'exploitation est supérieure à deux fois la charge permanente ou à 5 kN/m^2 , on utilise la méthode exposée ci-après et connue sous le nom de méthode Caquot. On peut rencontrer ce type de charge dans les bâtiments industriels (usines, ateliers, etc.). La méthode Caquot est basée sur la théorie générale des poutres continues, mais on a modifié légèrement les coefficients numériques obtenus par la théorie pour mettre les résultats en accord avec l'expérience.

En outre on a simplifié la théorie générale, en raison du fait que les charges éloignées d'une travée produisent sur celle-ci un effet négligeable.

Dans la transmission des charges (cas des charges d'exploitation relativement élevée) des poutres secondaires aux poutres principales, on doit tenir compte de la continuité des poutres secondaires en envisageant que les charges variables sont appliquées sur les travées de part et d'autre de la poutre principale.

7.2.2. La dalle ne porte que dans un seul sens (fig. 7.1)

Les dalles sont des éléments rectangulaires, de dimensions l_x et l_y , appuyés sur leurs quatre côtés (les portées l_x et l_y mesurées entre nus des appuis). Si on désigne par l_x la plus petite dimension de la dalle, on aura $l_x < l_y$. Lorsque $\rho = l_x / l_y \leq 0,4$, on calcule les moments en ne tenant compte de la flexion que suivant la plus petite dimension. Donc on dit que la dalle ne porte que dans un seul sens. Dans ces conditions on est alors ramené à l'étude d'une poutre de section rectangulaire, de largeur 1 m, de hauteur totale h_o et de portée l_x .

Pour déterminer les moments à prendre en compte, on peut, suivant l'importance des charges d'exploitation, utiliser les méthodes données pour les poutrelles et poutres (voir ci-après). Mais très souvent, lorsqu'une dalle continue peut être considérée comme partiellement encastrée sur ses appuis de rive et, en particulier, lorsqu'il s'agit d'un plancher à charge d'exploitation modérée, on prend pour les moments dans chacune des travées les valeurs suivantes :

- moment en travée $M_{tr} = p l_x^2 / 10 = 0,8 M_o$; (7.1)

- moment sur appui $M_{app} = p l_x^2 / 16 = 0,5 M_o$, (7.2)

avec p est charge uniforme résultant du poids propre et de la charge d'exploitation ;

l_x , portée dans le sens de la petite portée ;

$M_o = p l_x^2 / 8$, moment pour la dalle sur deux appuis libres.

Les valeurs des moments, calculées comme indiqué ci-dessus, permettent de déterminer les armatures inférieures et les armatures supérieures parallèles à l_x . Dans le sens parallèle au grand côté l_y , on dispose, à la partie inférieure de la dalle, des armatures, dites armatures de répartition, dont la section par unité de largeur est au moins égale au quart de celles des armatures principales (armatures parallèles au petit côté) par unité de longueur si les charges appliquées sont uniformément réparties, et au moins égale au tiers si les charges appliquées sont des charges concentrées.

7.2.3. La dalle porte suivant deux directions (fig. 7.7).

Une dalle est considérée comme portant suivant deux directions si :

- le rapport $\rho = l_x/l_y$ est compris entre 0,4 et 1,0 et la dalle est uniformément chargée ;
- la dalle est soumise à des charges concentrées, quel que soit le rapport des portées l_x et l_y .

Dans le cas envisagé, on détermine les moments suivant les deux directions l_x et l_y et on calcule les armatures parallèles à ces deux directions en fonction des moments trouvés. Pour le calcul des dalles rectangulaires soumises à des charges réparties, on préfère utiliser les coefficients du tableau 7.1.

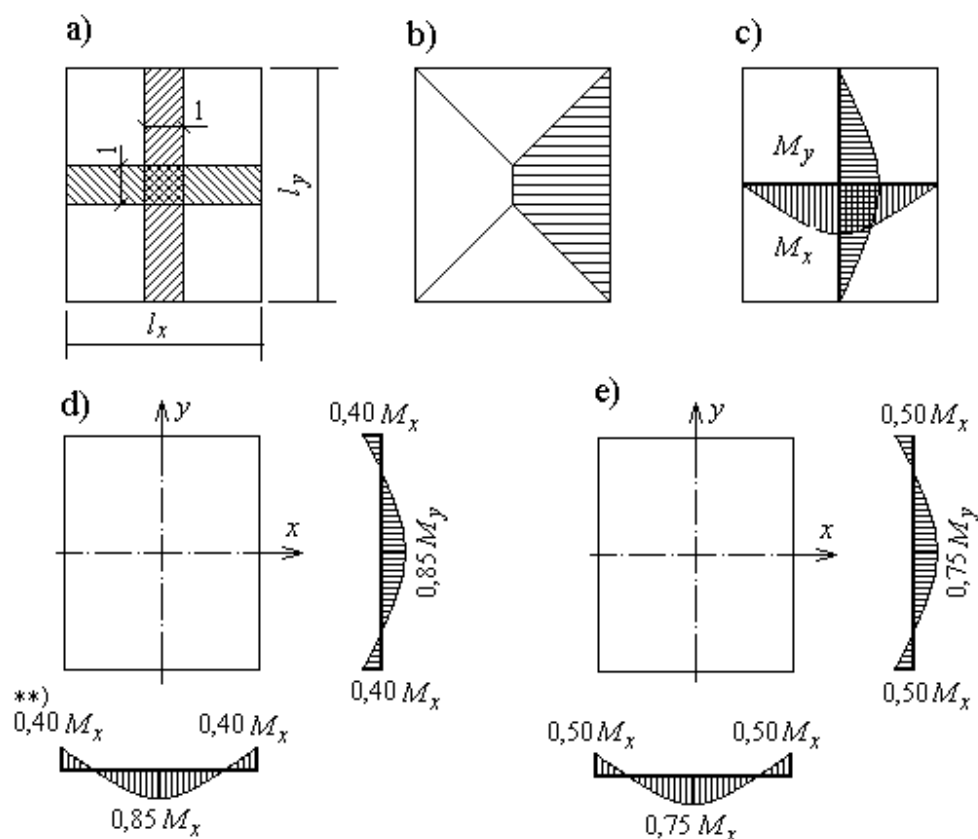


Fig. 7.7. Pour le calcul des dalles portant suivant deux directions
a - bandes imaginaires de 1 m de largeur; b - surfaces de transmission des charges sur les poutres encadrant une dalle portant sur quatre côtés;
c - moments de flexion de la dalle librement appuyée sur son pourtour;
d, e - moments de flexion de la dalle encastree sur son pourtour.

***) on préfère prendre: $0,3 M_x$ pour l'appui de rive; $0,5 M_x$ pour l'autre appui.

Tableau 7.1

Les valeurs des coefficients μ_x et μ_y en fonction du rapport $\rho_x = l_x / l_y$ et du coefficient de Poisson ν , pour des dalles rectangulaires librement appuyées sur son pourtour

$\rho =$ $\frac{l_x}{l_y}$	$\nu = 0$		$\nu = 0,20$		$\rho =$ $\frac{l_x}{l_y}$	$\nu = 0$		$\nu = 0,20$	
	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y		μ_x	μ_y	μ_x	μ_y
0,40	0,1094	0,250	0,1115	0,293	0,70	0,0683	0,436	0,0743	0,585
0,41	0,1078	0,250	0,1100	0,301	0,71	0,0670	0,450	0,0731	0,596
0,42	0,1062	0,250	0,1086	0,309	0,72	0,0658	0,464	0,0719	0,608
0,43	0,1047	0,250	0,1072	0,317	0,73	0,0646	0,479	0,0708	0,620
0,44	0,1032	0,250	0,1059	0,325	0,74	0,0634	0,494	0,0696	0,632
0,45	0,1017	0,250	0,1046	0,333	0,75	0,0622	0,509	0,0685	0,644
0,46	0,1002	0,250	0,1032	0,341	0,76	0,0610	0,525	0,0674	0,657
0,47	0,0988	0,250	0,1019	0,349	0,77	0,0598	0,542	0,0663	0,670
0,48	0,0974	0,250	0,1006	0,357	0,78	0,0587	0,559	0,0652	0,683
0,49	0,0960	0,250	0,0993	0,365	0,79	0,0576	0,577	0,0642	0,696
0,50	0,0946	0,250	0,0981	0,373	0,80	0,0565	0,595	0,0632	0,710
0,51	0,0932	0,250	0,0969	0,382	0,81	0,0553	0,613	0,0621	0,723
0,52	0,0918	0,250	0,0957	0,391	0,82	0,0542	0,631	0,0610	0,737
0,53	0,0905	0,250	0,0945	0,400	0,83	0,0531	0,649	0,0600	0,750
0,54	0,0892	0,250	0,0933	0,410	0,84	0,0520	0,667	0,0589	0,764
0,55	0,0879	0,250	0,0921	0,420	0,85	0,0509	0,685	0,0579	0,778
0,56	0,0855	0,253	0,0909	0,431	0,86	0,0498	0,693	0,0569	0,791
0,57	0,0852	0,266	0,0897	0,442	0,87	0,0488	0,721	0,0559	0,804
0,58	0,0838	0,279	0,0885	0,453	0,88	0,0478	0,740	0,0549	0,818
0,59	0,0825	0,292	0,0873	0,465	0,89	0,0468	0,759	0,0539	0,832
0,60	0,0812	0,305	0,0861	0,476	0,90	0,0458	0,778	0,0529	0,846
0,61	0,0798	0,317	0,0849	0,487	0,91	0,0448	0,798	0,0519	0,861
0,62	0,0785	0,330	0,0837	0,497	0,92	0,0438	0,819	0,0510	0,875
0,63	0,0772	0,343	0,0825	0,508	0,93	0,0428	0,841	0,0500	0,891
0,64	0,0759	0,356	0,0813	0,519	0,94	0,0419	0,864	0,0491	0,906
0,65	0,0746	0,369	0,0801	0,530	0,95	0,0410	0,888	0,0483	0,923
0,66	0,0733	0,382	0,0789	0,541	0,96	0,0401	0,911	0,0475	0,939
0,67	0,0720	0,395	0,0777	0,552	0,97	0,0393	0,934	0,0467	0,954
0,68	0,0707	0,408	0,0766	0,563	0,98	0,0385	0,956	0,0459	0,970
0,69	0,0695	0,422	0,0754	0,574	0,99	0,0377	0,978	0,0451	0,985
					1,00	0,0368	1,000	0,0442	1,000

Ces coefficients permettent de calculer les moments de flexion pour une dalle reposant librement sur son pourtour et soumise à une charge uniformément répartie p couvrant tout le panneau. Les moments au centre de la dalle, pour une bande de largeur unité, sont (fig. 7.7,c) :

- dans le sens de la petite portée $M_x = \mu_x p l_x^2$;
- dans le sens de la grande portée $M_y = \mu_y M_x$.

Ce tableau tient compte du fait que le rapport M_y / M_x ne doit être inférieur à 0,25.

En ce qui concerne le coefficient de Poisson ν on le prend :

- $\nu = 0,20$ si le béton est supposé non fissuré et
- $\nu = 0,0$ en cas de fissuration.

En pratique, pour les dalles on aura que $\nu = 0$.

Lorsque la dalle fait partie d'un hourdis continu ou lorsqu'elle est liée à des appuis permettant de compter sur un encastrement partiel, on réduit les valeurs obtenues pour les moments en travée et on calcule les moments sur appuis. Les moments de flexion maximaux calculés pour la dalle articulée sur leur contour, sont ensuite distribués entre les travées et les appuis. On adopte les valeurs suivantes de ces moments (fig.7.7) :

- si le panneau considéré est continu au-delà de ces appuis :
 - les moments en travée sont $0,75 M_x$ ou $0,75 M_y$;
 - les moments d'encastrement sur le grand côté sont $0,5 M_x$;
- si le panneau considéré est un panneau de rive dont l'appui peut assurer un encastrement partiel :
 - les moments en travée sont $0,85 M_x$ ou $0,85 M_y$;
 - les moments d'encastrement sur les grands côtés sont :
 $0,30 M_x$ - appui de rive, $0,50 M_x$ - autre appui.

D'une manière générale on doit toujours avoir, pour la portée l_x ($l_x < l_y$) :

$$M_t + (M_w + M_e) / 2 \geq 1,25 M_o, \quad (7.3)$$

avec M_t , le moment maximal en travée ;

M_w, M_e , les valeurs absolues prises en compte pour les moments sur appui à gauche et à droite ;

M_o , le moment maximal calculé dans l'hypothèse que la dalle est simplement appuyée sur son pourtour.

Le moment sur l'appui commun à deux panneaux est le plus grand en valeur absolue des moments déterminés pour chacun des deux panneaux.

Pour les panneaux reposant sur leurs quatre côtés, on admet généralement que les charges appliquées se transmettent à chaque côté selon le schéma, fig. 7.7, *b*.

7.2.4. Dispositions constructives diverses.

Le calcul des armatures s'effectue à la flexion par les méthodes exposées à propos du calcul des poutres. Le moment le plus fort s'exerce selon la petite portée: les armatures correspondantes seront donc placées le plus bas possible. Pour les dalles dont l'épaisseur est comprise entre 12 *cm* et 30 *cm*, le taux des armatures dans chaque direction doit être au moins égal à :

- 1,2 ‰ s'il s'agit de ronds lisse (*Fe E 215* et *Fe E 235*) ;
- 0,8 ‰ s'il s'agit de barres ou de fils à haute adhérence des classes *Fe E 400* ou de treillis soudés à fils lisse de diamètre supérieur à 6 *mm* ;
- 0,6 ‰ s'il s'agit de barres ou fils à haute adhérence des classes *Fe E 500* ou de treillis soudés à fils lisses de diamètre au plus égal à 6 *mm*.

Dans le cas des dalles rectangulaires, les armatures parallèles au petit côté doivent présenter un pourcentage au moins égal aux valeurs ci-dessus multipliées par le facteur $(3 - \rho) / 2$, ce facteur varie de 1 (pour les dalles carrées) à 1,5 (pour les panneaux de très grande longueur). Le taux d'armatures est égal au rapport de la section des armatures dans une direction donnée à la section totale de béton. Dans le cas où la dalle est armée sur ses deux faces, la règle s'applique en considérant la section totale d'aciers.

On peut se dispenser de la vérification des conditions de non-fragilité et de pourcentage minimal pour les armatures sur appuis des dalles continues, sous réserve que la section d'armatures prévue en travée est suffisante pour équilibrer le moment relatif au panneau de dalle considéré comme articulé sur son contour ou que la section des aciers en travée majorée de la demi-somme des sections des aciers sur appuis soit au moins égale au double du pourcentage défini ci-dessus.

Si la dalle est bordée le long des petits côtés par des appuis dont elle est solidaire, on dispose le long de ces petits côtés des armatures des "chapeaux", c'est-à-dire des armatures placées à la partie supérieure de la dalle, dont la section, par unité de longueur, est au moins égale à celle

des armatures des "chapeaux" prévus pour les grands côtés. La longueur des armatures des "chapeaux", à partir du nu des appuis, est au moins égale à :

1 / 5 de la plus grande portée des deux travées encadrant l'appui considéré, s'il ne s'agit pas d'un appui de la travée de rive ;

1 / 4 de la même portée pour une travée de rive.

Lorsque les appuis de rive ne sont pas susceptibles de fournir un encastrement partiel, il est néanmoins nécessaire de prévoir, au droit de ces appuis, des armatures placées à la partie supérieure de la dalle et capable d'équilibrer un moment au moins égal à $0,15 M_0$.

Quels que soient les résultats de calcul, l'écartement des armatures d'une même nappe ne doit pas dépasser les valeurs du tableau 7.2 (où h représente l'épaisseur totale de la dalle).

Tableau 7.2

Direction	Charges réparties	Charges concentrées
La plus sollicitée	$\leq 3h$; $\leq 33\text{ cm}$	$\leq 2h$; $\leq 22\text{ cm}$
La moins sollicitée	$\leq 4h$; $\leq 45\text{ cm}$	$\leq 3h$; $\leq 33\text{ cm}$

En ce qui concerne le diamètre des barres employées comme armatures, il doit être au plus égal au 1/10 de l'épaisseur de la dalle.

Pour les planchers avec hourdis sur entrevous de terre cuite ou de béton (fig.7.3), les hourdis (dalles) doivent être armés d'un quadrillage de barres dont les dimensions de mailles ne doivent pas dépasser :

20 cm (5 barres par mètre) pour les armatures perpendiculaires aux nervures ;

33 cm (3 barres par mètre) pour les armatures parallèles aux nervures.

De plus les sections des armatures doivent satisfaire aux conditions:

- quand l'écartement l entre axes des nervures est inférieur ou égal à 50 cm, la section des armatures perpendiculaires aux nervures (exprimée en centimètres carrés par mètre linéaire) doit être au moins égale à : $A_s \geq 200 / f_e$ (f_e en MPa) ;

- quand l'écartement l entre axes des nervures est compris entre 50 et 80 cm, la section des armatures perpendiculaires aux nervures (cm^2 / m) doit être au moins égale à :

$$A_s \geq 4 l / f_e \quad (l \text{ en cm, } f_e \text{ en MPa) ;$$

- quant aux armatures parallèles aux nervures (autre que les armatures supérieures de ces dernières), elles doivent avoir une section au moins égale à la moitié de celle des armatures perpendiculaires.

Les aciers armant à la flexion la région centrale d'une dalle sont prolongés jusqu'aux appuis :

- dans leur totalité si la dalle est soumise à des charges concentrées mobiles ;

- à raison d'un sur deux barres au moins dans le cas contraire.

Les armatures de la dalle prolongées jusqu'aux appuis y sont ancrées au-delà du contour théorique de la dalle. Dans le cas des treillis soudés, cet ancrage peut ne comporter qu'une soudure à condition que la dalle ne soit pas soumise à des charges concentrées mobiles. Pour le même cas

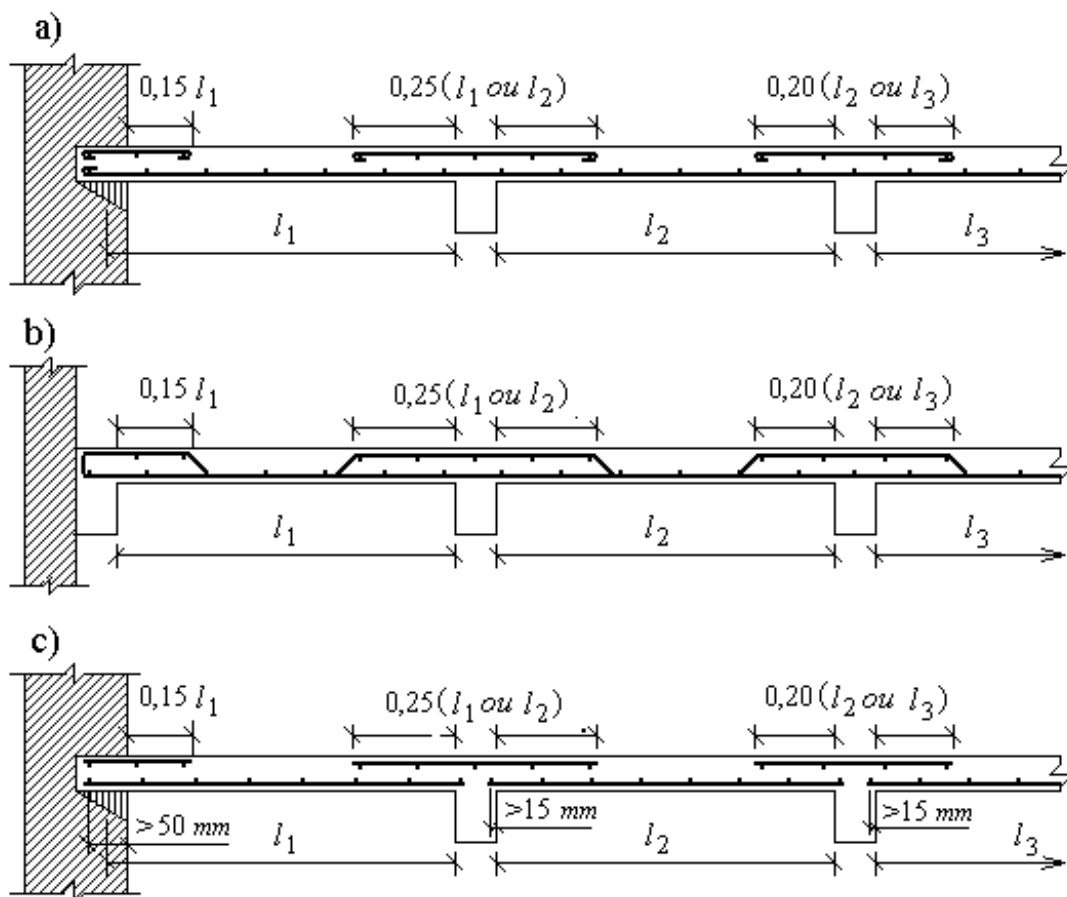


Fig. 7.8. Ferrailage des hourdis du plancher

a - avec des treillis formant des armatures de chapeaux ;

b - avec relèvement d'une partie des barres inférieures;

c - avec des treillis séparés (un treillis pour chaque portée de la dalle)

(d'absence de charge concentrée mobile) l'ancrage des aciers en barres isolées est considéré comme satisfait si les aciers prolongés sur appui y sont ancrés par une longueur au moins égale au tiers de leur longueur d'ancrage totale. L'ancrage par une soudure, pour les dalles armées de treillis soudés implique qu'une ligne de soudure soit disposée sur les éléments d'appui à une distance effective au moins égale à $1,5 \text{ cm}$, dans le cas d'appui en béton, armé ou non, préfabriqué ou non, et 5 cm dans le cas d'appui en maçonnerie.

Dans le cas de hourdis d'épaisseur inférieure ou égale à 7 cm , et en l'absence de charges localisées importantes, il est possible de ne prévoir qu'une nappe d'armatures.

7.3. Calcul des poutres

Les poutres des bâtiments se raccordent continûment aux poteaux ou à d'autres poutres ou aux murs de refend. Le calcul doit tenir compte de ces continuités, si bien que les poutres seront calculées comme des poutres continues sur appuis multiples.

Le calcul statique des poutres continues peut être fait par des méthodes de Mécanique des Constructions (soit la méthode "des trois moments") ou bien par des méthodes "simplifiées" (soit la méthode forfaitaire et la méthode de Caquot).

7.3.1. Application de la méthode forfaitaire

Lorsqu'un plancher est à charge d'exploitation modérée et qu'en outre les conditions suivantes sont remplies :

- les moments d'inertie des sections transversales sont les mêmes dans des différentes travées ;
- les portées successives des travées sont dans un rapport compris entre $0,8$ et $1,25$;
- la fissuration est considérée comme non préjudiciable, on peut faire le calcul des poutres en utilisant la méthode forfaitaire (dans ce cas la dalle doit travailler dans un seul sens).

Cette méthode consiste à évaluer les valeurs maximales des moments en travée et des moments sur appuis à des fractions fixées forfaitairement de la valeur maximale du moment M_o dans la travée dite de comparaison, c'est-à-dire dans la travée isostatique indépendante de même portée et soumise aux mêmes charges que la travée considérée.

En pratique cette méthode est généralement applicable aux bâtiments à usage d'habitation ou de bureaux, aux écoles, aux hôpitaux, et souvent aux magasins, boutiques, salles de spectacles, constructions pour lesquelles les conditions précédentes sont, la plupart du temps, remplies.

On appelle :

$M_o = q l^2 / 8$, la valeur maximale du moment fléchissant dans la travée indépendante, de même portée que la travée considérée, et soumise aux mêmes charges (l étant la portée de la poutre, q , la charge uniformément répartie) ;

M_w, M_e, M_t , respectivement les valeurs absolues des moments sur appuis de gauche (M_w) et de droite (M_e), ainsi que celle du moment maximal en travée (M_t) pris en compte dans les calculs de la travée considérée ;

$\alpha = Q_B / (G + Q_B)$, le rapport des charges d'exploitation Q_B , à la somme des charges permanentes G et des charges d'exploitation Q_B .

Comme les valeurs extrêmes de Q_B sont $Q_B = 0$ et $Q_B = 2 G$ (pour des charges d'exploitation modérées), on a que α compris entre 0 et 2/3.

Les valeurs prises pour M_t, M_w et M_e doivent vérifier les conditions suivantes :

$$M_t + (M_w + M_e) / 2 \geq (1 + 0,3\alpha) M_o; \quad (7.4)$$

$$M_t + (M_w + M_e) / 2 \geq 1,05 M_o \quad (7.5)$$

Le plus souvent c'est la première condition qui est déterminante.

De plus, le moment maximal en travée M_t doit satisfaire les conditions :

$$M_t \geq [(1,2 + 0,3\alpha) / 2] M_o - \text{pour la travée de rive} \quad (7.6)$$

$$M_t \geq [(1,0 + 0,3\alpha) / 2] M_o - \text{pour la travée intermédiaire} \quad (7.7)$$

La valeur absolue de chaque moment sur appui intermédiaire ne doit pas être inférieure à :

- 0,60 M_o dans le cas d'une poutre à deux travées ;
- 0,50 M_o pour les appuis voisins des appuis de rive d'une poutre à plus de deux travées ;
- 0,40 M_o pour les autres appuis intermédiaires d'une poutre à plus de trois travées (fig.7.9).

De part et d'autre de chaque appui on retient, pour la vérification des sections, la plus grande des valeurs absolues des moments évalués à gauche et à droite de l'appui considéré.

Sur la figure 7.9, d, à titre d'exemple, on représente la répartition des

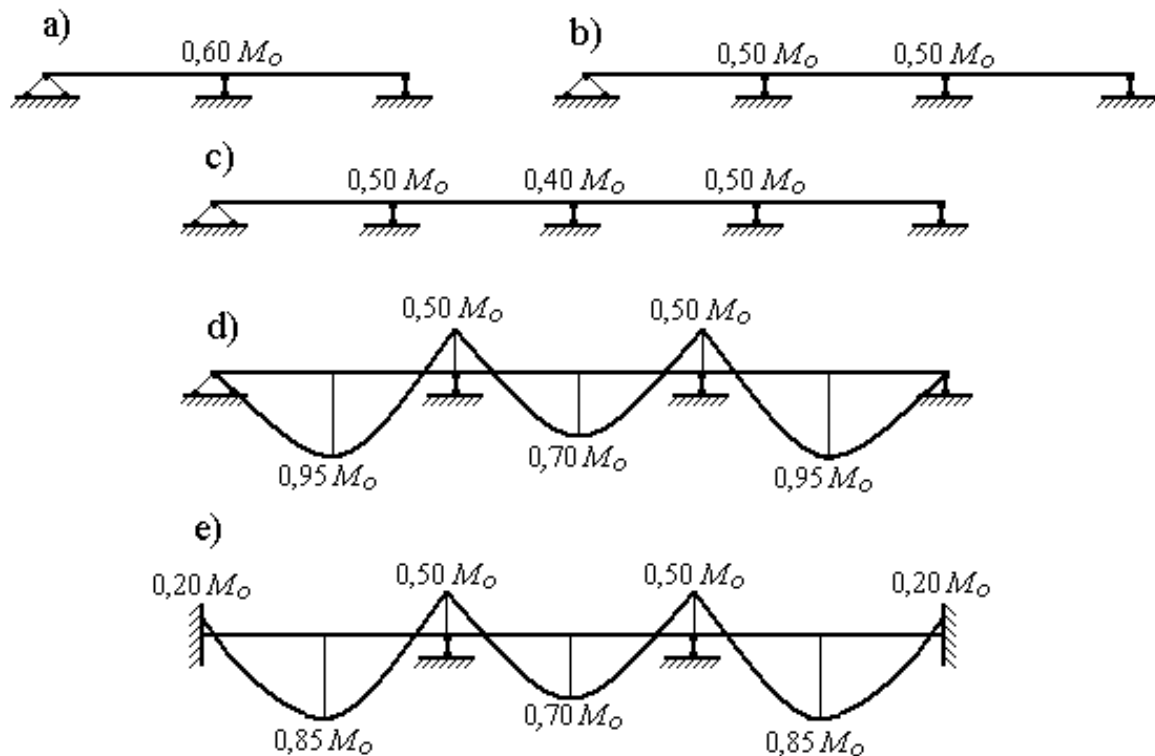


Fig. 7.9. Les valeurs des moments des poutres continues

- a - moments sur appuis intermédiaires des poutres à deux travées;
- b - moments sur appuis intermédiaires des poutres à trois travées;
- c - moments sur appuis intermédiaires des poutres à quatre travées;
- d - moments sur appuis et en travées des poutres continues à trois travées;
- e - moments sur appuis et en travées des poutres continues à trois travées égales (les travées de rive sont partiellement encastées)

moments d'une poutre à trois travées égales à charge d'exploitation modérée en supposant que les travées de rive reposent à leurs extrémités sur des appuis simples. Soit on suppose que $Q_B = 2 G$ (le rapport limite pour des charges d'exploitation modérées), alors on a :

$$\alpha = Q_B / (G + Q_B) = 2 / 3.$$

La poutre étant à trois travées, donc on prend pour valeur absolue du moment sur le deuxième et sur le troisième appui :

$$M_B = M_C = 0,5 M_o.$$

Alors le moment pour la première travée peut être déterminé d'après la condition (7.4) :

$$M_t + (M_w + M_e) / 2 \geq (1 + 0,3\alpha) M_o.$$

Avec $\alpha = 2 / 3$, $M_w = 0$ et $M_e = 0,5 M_o$, on trouve :

$$M_t + (0 + 0,5 M_o) / 2 \geq (1 + 0,3 \cdot 2/3) M_o$$

d'où $M_t \geq 0,95 M_o$.

D'autre côté le moment maximal en travée de rive doit satisfaire la condition (7.6) :

$$M_t \geq [(1,2 + 0,3\alpha) / 2] M_o = [(1,2 + 0,3 \cdot 2/3) / 2] M_o = 0,7 M_o$$

On prend la plus grande valeur parmi les deux, soit $M_t = 0,95 M_o$.

Pour la travée centrale, on a $M_B = M_C = 0,5 M_o$, alors à l'aide de la formule 7.5 on trouve :

$$M_t + (0,50 M_o + 0,50 M_o) / 2 \geq (1 + 0,3 \cdot 2/3) M_o = 1,2 M_o .$$

d'où $M_t \geq 0,7 M_o$. Et d'après la formule 7.7 (pour une travée intermédiaire), on détermine:

$$M_t \geq [(1,0 + 0,3\alpha) / 2] M_o = [(1,0 + 0,3 \cdot 2/3) / 2] M_o = 0,6 M_o$$

On prend donc $M_t = 0,7 M_o$.

Soit, on suppose qu'il existe sur chaque appui de rive, un moment d'encastrement partiel évalué, en valeur absolue, à $0,20 M_o$. Dans ce cas il n'y a rien à changer au calcul précédent pour les moments sur les appuis B et C et pour le moment dans la travée centrale, alors pour chaque travée de rive on doit avoir (fig. 7.9, e) :

$$M_t = (0,20 M_o + 0,50 M_o) / 2 \geq 1,2 M_o, \text{ donc } M_t \geq 0,85 M_o ;$$

$$M_t \geq (1,2 + 0,3 \cdot 2/3) M_o, \text{ donc } M_t \geq 0,70 M_o.$$

Donc on prend $M_t = 0,85 M_o$.

Pour la détermination de la longueur des armatures de chapeaux et des armatures inférieures, dans le cas général, on trace les courbes enveloppes des moments en envisageant les divers cas de charge pour les diverses combinaisons d'action (voir paragraphe 7.3.2).

Lorsque la charge d'exploitation (Q_B) est au plus égale à la charge permanente et lorsque ces charges peuvent être considérées comme uniformément réparties, on peut se dispenser du tracé des courbes enveloppes sous réserve que les dispositions suivantes soient adoptées :

- la longueur des chapeaux, à partir du nu des appuis, est au moins égale à :

- $1 / 5$ de la plus grande portée des deux travées encadrant l'appui considéré, s'il s'agit d'un appui n'appartenant pas une travée de rive ;
- $1 / 4$ de la plus grande portée des deux travées encadrant l'appui considéré, s'il s'agit d'un appui appartenant une travée de rive;

- pour les armatures inférieures, la moitié au moins de la section de celles nécessaires en travée est prolongée jusqu'aux appuis et les armatures de second lit sont arrêtées à une distance au plus égale à $1 / 10$ de la portée (fig.7. 10).

On note que dans la pratique, en raison des coûts de façonnage, les crochets terminant les chapeaux et les armatures de second lit sont très fréquemment remplacés par des prolongations droites.

Dans une poutre continue comportant des travées inégales ou inégalement chargées, les chapeaux doivent s'étendre dans les travées les plus courtes et les moins chargées sur une longueur plus grande que

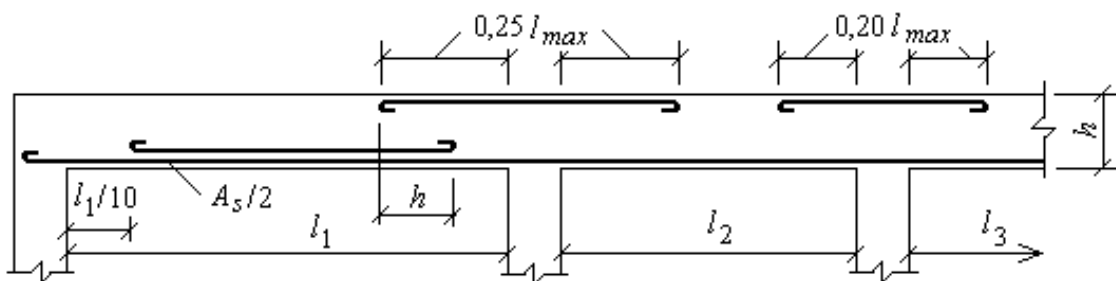


Fig. 7.10

dans les travées les plus longues et les plus chargées. La disposition des ancrages des chapeaux et des barres inférieures de renfort doit être telle qu'elle ne favorise pas la formation de fissures sensiblement inclinées à 45° . Il est donc recommandé d'adopter la disposition de la figure (7.10) lorsqu'on emploie des crochets (recouvrement supérieur ou égal à h). Dans le cas des ancrages par scellement droit, il n'y a pas habituellement de prescription particulière à respecter par suite du décalage imposé pour le tracé de la courbe enveloppe des moments (fig. 5.17).

En ce qui concerne la transmission des charges des hourdis aux poutres et poutrelles, on peut admettre la discontinuité des différents éléments, c'est-à-dire supposer que le hourdis repose librement sur appuis. On admet également la discontinuité en ce qui concerne la transmission des charges des poutrelles aux poutres, sauf dans les cas suivants :

- pour les travées de rive des poutrelles où, sur le premier appui intermédiaire, on doit tenir compte de la solidarité :
 - en prenant en compte les moments de continuité adoptés ;
 - forfaitairement, en majorant les réactions correspondant aux travées indépendantes de 15 % s'il s'agit de poutrelles à deux travées et de 10% s'il s'agit de poutrelles à plus de deux travées;
- pour les travées de rive prolongées par une console, où l'on tient compte alors de l'effet de console.

Pour la transmission des charges aux poteaux la règle est analogue à celle donnée ci-dessus, c'est-à-dire qu'on admet la discontinuité, sauf dans les cas suivants :

- dans les bâtiments comportant des travées solidaires supportées par des poteaux de rive et une ou plusieurs files de poteaux intermédiaires, les charges évaluées en admettant la discontinuité sont majorées :
 - de 15 % pour le poteau central dans le cas de bâtiment à deux travées;
 - de 10 % pour les poteaux intermédiaires voisins des poteaux de rive dans le cas de bâtiments comportant au moins trois travées.

Les charges évaluées sur les poteaux de rive dans l'hypothèse de la discontinuité ne sont pas réduites. Dans le cas où un élément de rive serait prolongé par un porte-à-faux, on considère, pour le calcul des poteaux, que les charges agissant sur le porte-à-faux sont transmises uniquement au poteau de rive.

7.3.2. Application de la méthode de Caquot pour les poutres à moments d'inertie égaux dans les différentes travées et non solidaires des poteaux

Lorsque la charge d'exploitation est supérieure à deux fois la charge permanente ($Q_B > 2 G$) ou à 5 kN/m^2 ou encore lorsque les conditions indiquées au paragraphe 7.3.1 ne sont pas remplies (soit les moments d'inertie des sections transversales ne sont pas les mêmes dans les différentes travées, soit les portées successives des travées sont en dehors du rapport 0,8 et 1,25, soit la fissuration est considérée comme préjudiciable ou très préjudiciable) on utilise la méthode de calcul exposée ci-après et connue sous le nom de méthode Caquot. Cette méthode s'applique essentiellement aux planchers des "constructions industrielles".

La méthode de Caquot est basée sur la théorie générale des poutres continues (la méthode "des trois moments"), mais on a modifié légèrement les coefficients numériques obtenus par la théorie pour mettre les résultats en accord avec l'expérience (soit pour prendre en compte la variation du moment d'inertie des sections transversales le long de la ligne moyenne, ce qui a pour effet de réduire les moments sur appuis et d'accroître les moments en travée). On étudie successivement les moments sur appuis et les moments en travée.

1) *Moments sur appuis.* Pour calculer le moment sur un appui quelconque, on ne tient compte que des charges agissant sur les deux travées fictives encadrant cet appui (fig.7.11). Ces deux travées fictives sont simplement appuyées à leur extrémité opposée à l'appui commun et leurs portées l'_w pour la travée de gauche et l'_e pour la travée de droite, sont déterminées de la manière suivante, en appelant l la longueur de la travée :

$l' = l$ pour une travée de rive avec appui simple de rive ;

$l' = 0,8 l$ pour une travée intermédiaire.

Les charges uniformément réparties, q_w sur la travée de gauche et q_e sur la travée de droite, produisent sur l'appui un moment (en valeur absolue) :

$$M_i = \frac{q_w (l'_w)^3 + q_e (l'_e)^3}{8,5 (l'_w + l'_e)} . \quad (7.8)$$

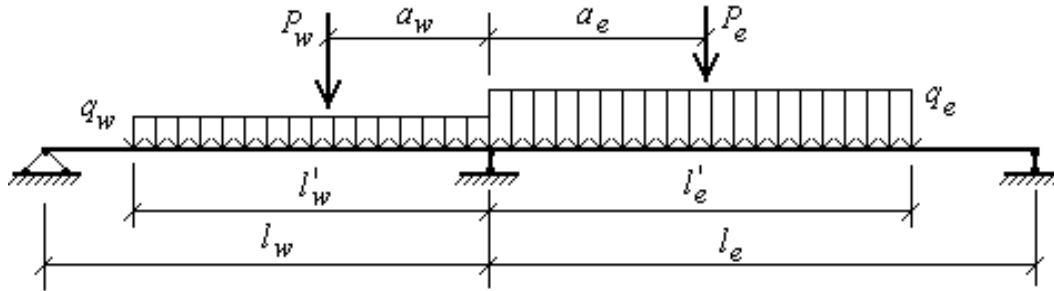


Fig. 7.11

Une charge concentrée P_w sur la travée de gauche, située à la distance a_w de l'appui, et une charge concentrée P_e sur la travée de droite, située à la distance a_e de l'appui, produisent sur l'appui un moment (en valeur absolue):

$$M_i = \frac{k_w P_w (l_w')^2 + k_e P_e (l_e')^2}{l_w' + l_e'} \quad (7.9)$$

Les coefficients k_w et k_e étant donnés pour chaque travée par (avec $x = a / l'$):

$$k = \frac{x(x-1)(x-2)}{2,125} = \frac{1}{2,125} \cdot \frac{a}{l'} \left(1 - \frac{a}{l'}\right) \left(2 - \frac{a}{l'}\right).$$

On peut remarquer que, si on applique la formule "des trois moments" à la poutre considérée soumise à des charges uniformément réparties (en supposant que les charges sont appliquées suivant toute la longueur des travées et que $l'_w = l_w$ et $l'_e = l_e$, étant les portées réelles), on obtient :

$$M_i = \frac{q_w (l_w')^3 + q_e (l_e')^3}{8(l_w' + l_e')}.$$

On constate que, dans la méthode de Caquot, la modification apportée consiste à remplacer le coefficient 8 par le coefficient 8,5.

Si la poutre comporte des goussets normaux (fig.7.12), les formules précédentes deviennent :

$$M_i = \frac{q_w (l_w')^3 + q_e (l_e')^3}{7,7(l_w' + l_e')} ;$$

$$M_i = \frac{k_w P_w (l_w')^2 + k_e P_e (l_e')^2}{l_w' + l_e'} ,$$

Avec
$$k = \frac{1}{1,925} \cdot \frac{a}{l'} \left(1 - \frac{a}{l'}\right) \left(2 - \frac{a}{l'}\right).$$

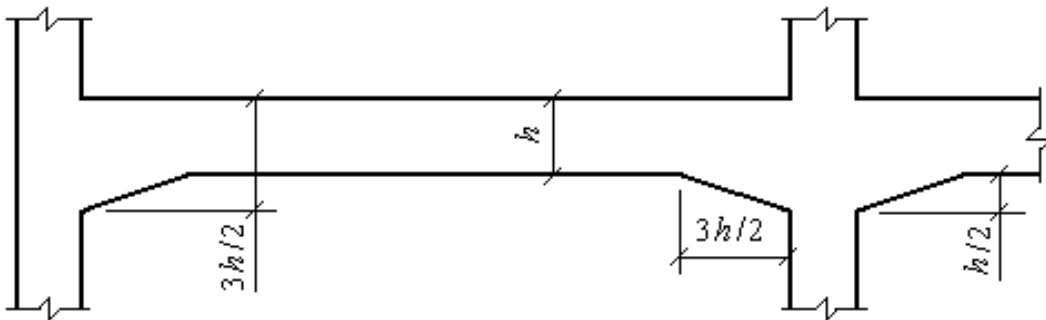


Fig. 7.12. Poutre à goussets normaux

2) *Moment en travée.* Pour déterminer les moments en travée on trace, pour chaque travée supposée indépendante et en considérant la portée réelle l (et non l'), la courbe des moments de la travée indépendante sous l'effet de la charge permanente, puis sous l'effet de la charge permanente et de la charge d'exploitation (pour les différentes combinaisons). Chacune de ces charges étant affectée du coefficient de majoration correspondant à l'état-limite considéré.

On prend comme ligne de fermeture :

- pour les moments positifs, la droite qui joint les moments d'appui minimaux en valeur absolue ;
- pour les moments négatifs, la droite qui joint les moments d'appui maximaux en valeur absolue, en supposant dans chaque cas que les charges d'exploitation peuvent ou non être appliquées dans les différentes travées.

Soit pour une poutre continue est sollicitée par la charge uniformément répartie, on demande de construire les courbes enveloppes des moments pour la travée AB (fig. 7.13).

Pour une travée AB on obtient :

- *le moment maximal sur l'appui A* en surchargeant la travée AB et celle qui la précède (fig. 7.13, a). On calcule, avec les formules indiquées ci-dessus (formule 7.8), la valeur de M_A , d'où le point " a " pour la ligne de fermeture ;
- *le moment maximal sur l'appui B* en surchargeant la travée AB et celle qui la suit (fig. 7.13, b), d'où le moment M_B et le point " b " ;
- *le moment maximal dans la travée AB* en surchargeant cette travée (fig. 7.13,c). On calcule, pour cette position des charges les valeurs de M_{1A} et M_{1B} , d'où la ligne de fermeture $a_1 - b_1$;
- *le moment minimal dans la travée AB* en surchargeant les travées voisines de AB (fig. 7.13, d). On calcule, pour cette position des charges les valeurs de M_{2A} et M_{2B} , d'où la ligne de fermeture $a_2 - b_2$;
- *le moment minimal sur l'appui A* en ne considérant que la charge permanente sur les deux travées encadrant A (fig.7.13,e) d'où le moment M_{3A} et le point a_3 ;
- *le moment minimal sur l'appui B* en ne considérant que la charge permanente sur les deux travées encadrant B (fig.7.13,e), d'où le moment M_{3B} et le point b_3 ;

Après avoir déterminé les moments, on trace pour la travée AB (supposée sur deux appuis libres) le diagramme des moments relatif à la charge permanente (courbe 1) et le diagramme des moments relatif à la charge permanente et à la charge d'exploitation (courbe 2)

On porte, à la même échelle que pour les courbes 1 et 2, $A a = M_A$, $B b = M_B$, $A a_1 = M_{1A}$, $B b_1 = M_{1B}$, ... On peut alors tracer les lignes de fermeture $a - b$, $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$, $a_3 - b_3$. Ensuite on rapporte la courbe 2 à la ligne de fermeture $a - b$, et on obtient ainsi la courbe enveloppe des moments négatifs au voisinage des appuis. On rapporte également la courbe 2 à la ligne de fermeture $a_1 - b_1$, et on obtient la courbe enveloppe des moments positifs dans la région centrale de la travée.

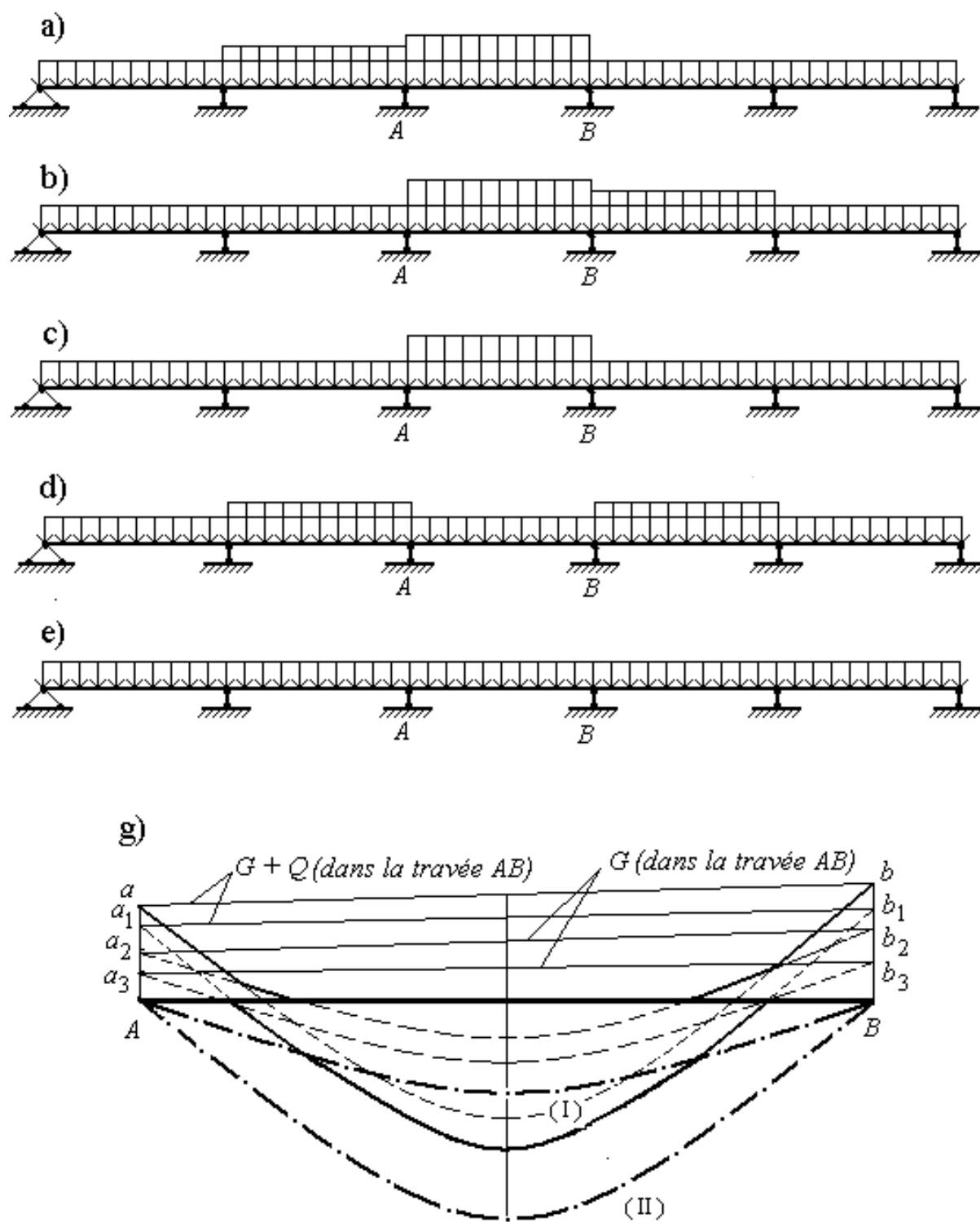


Fig. 7.13

On rapport de même la courbe 1 aux lignes de fermeture $a_2 - b_2$ et $a_3 - b_3$. On obtient finalement les courbes d'enveloppes des moments positifs et moments négatifs indiquées en trait fort sur la figure 7.13,g.

3) *Efforts tranchants.* Les efforts tranchants d'appui et, par suite les charges transmises aux divers éléments, sont calculés en faisant état des moments de continuité, sauf pour les hourdis pour lesquels on peut admettre la discontinuité. Donc les efforts tranchants d'appuis sont calculés par la méthode générale applicable aux poutres continues :

$$V_w = (M_w - M_e)/l - (ql)/2 - \sum P_i(1 - a_i/l);$$

$$V_e + V_w = ql + \sum P_i.$$

7.3.3. Application de la méthode de Caquot aux poutres à moments d'inertie variables d'une travée à l'autre et non solidaires des poteaux

Soit I_w le moment d'inertie de la travée de gauche et I_e celui de la travée de droite, et comme précédemment, on calcule les longueurs fictives : $l' = l$ ou $l' = 0,8 l$ (selon que la travée est de rive ou intermédiaire). Dans le cas des charges réparties on peut utiliser les formules précédentes (7.8) et (7.9), en ajoutant le coefficient $\beta = l'_e I_w / l'_w I_e$:

$$M_i = \frac{q_w (l'_w)^2 + \beta q_e (l'_e)^2}{8,5(1 + \beta)}; \quad (7.10)$$

dans le cas des charges concentrées :

$$M_i = \frac{k_w P_w l'_w + \beta k_e P_e l'_e}{1 + \beta} \quad (7.11)$$

7.3.4. Application de la méthode de Caquot aux poutres solidaires des poteaux qui les supportent

La méthode exposée ci-après ne s'applique qu'à des poutres de plancher associées à un hourdis et soumises à des charges verticales. Les moments de continuité agissant dans les sections des nus d'un appui (M_w et M_e pour la poutre, M_n et M_s pour le poteau) peuvent être évalués en ne tenant compte que des charges des travées (les longueurs de ces travées l_w et l_e) encadrant l'appui considéré et de la résistance offerte par ces travées et par les tronçons inférieur et supérieur des poteaux aboutissant au nœud (les longueurs de ces tronçons h_s et h_n). On détache de chaque côté des appuis des travées fictives l' des poutres (les longueurs l' seront précisées ci-après car elles sont différentes suivant qu'il s'agit de travées intermédiaires ou de travées de rive) et des hauteurs fictives h' des poteaux (situés au-dessus et au-dessous du nœud considéré), dont les valeurs sont les suivantes:

$h'_n = 0,9 h_n$, si le nœud considéré appartient à l'avant dernier plancher, $h'_n = 0,8 h_n$ dans les autres cas ;

$h'_s = h_s$, si les poteaux sont articulés sur leurs fondations;

$h'_s = 0,8 h_s$, dans les autres cas,

avec h_n , la hauteur du poteau situé au-dessus du nœud ;

h_s , la hauteur du poteau situé au-dessous du nœud.

1) *Travée intermédiaire* (travée 2 - 3, fig. 7.14).

Les longueurs l' des travées fictives sont prises égales à :

$l'_n = 0,8 l_n$ pour la travée de gauche ;

$l'_e = 0,8 l_e$ pour la travée de droite ;

I_w , le moment d'inertie de la poutre de travée de gauche ;

I_e , le moment d'inertie de la poutre de travée de droite ;

I_s , le moment d'inertie du poteau inférieur ;

I_n , le moment d'inertie du poteau supérieur.

On pose : $K_w = I_w / l'_w$; $K_e = I_e / l'_e$; $K_s = I_s / h'_s$;

$K_n = I_n / h'_n$; $D = K_w + K_e + K_s + K_n$.

La poutre étant supposée avoir dans chaque travée une section constante. On désigne par q_w et q_e les charges uniformément

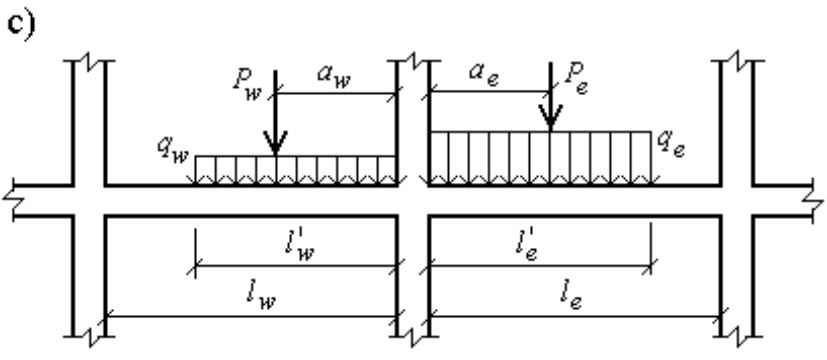
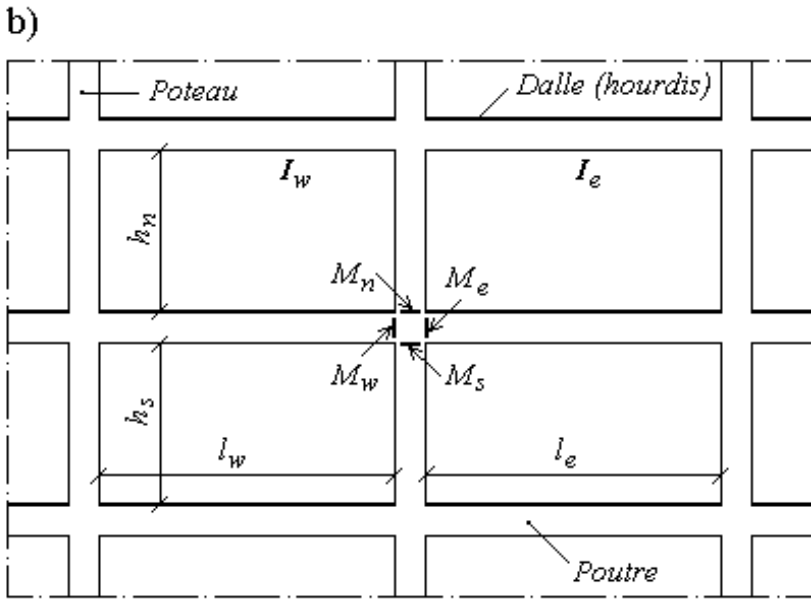
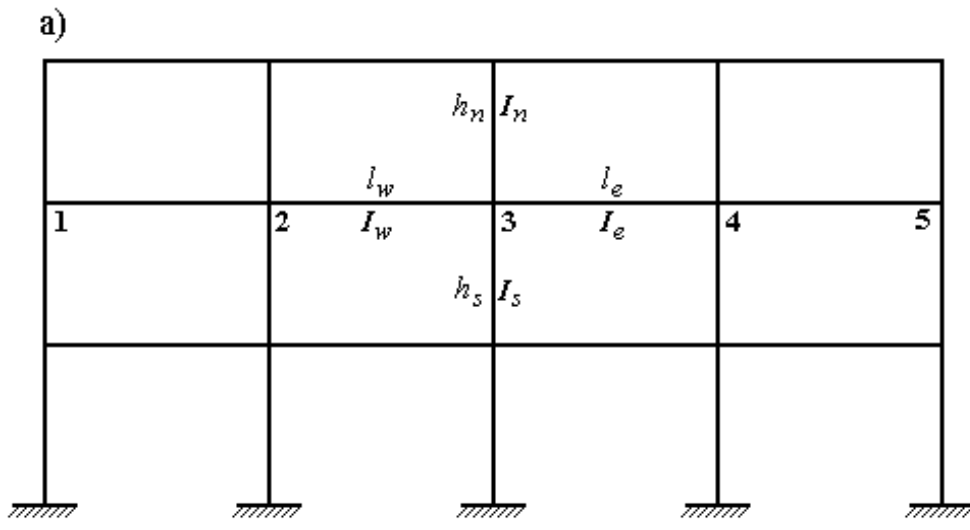


Fig. 7.14

réparties sur les travées de gauche et de droite et par P_w et P_e les charges concentrées appliquées sur les travées de gauche et de droite à des distances respectivement a_w et a_e des nus de l'appui considéré. Alors le moment fictif au nu de l'appui de la poutre dans la travée de gauche sera égal à :

$$M'_w = q_w (l'_w)^2 / 8,5 + l'_w \sum k_w P_w; \quad (7.12)$$

et dans la travée de droite :

$$M'_e = q_e (l'_e)^2 / 8,5 + l'_e \sum k_e P_e. \quad (7.13)$$

Les valeurs de k étant données au paragraphe 7.3.2.

Les moments dans les sections dangereuses (nus des appuis) sont respectivement (en valeur absolue) au nu de l'appui dans la travée de gauche (M_w), dans la travée de droite (M_e), au nu inférieur de la poutre dans le poteau inférieur (M_s) et au nu supérieur de la poutre dans le poteau supérieur (M_n) :

$$\begin{aligned} M_w &= M'_e K_w / D + M'_w (1 - K_w / D); \\ M_e &= M'_w K_e / D + M'_e (1 - K_e / D); \\ M_s &= (M'_e - M'_w) K_s / D; \\ M_n &= (M'_e - M'_w) K_n / D. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Pour les travées, la face tendue se trouve à la partie supérieure (les moments M_e et M_w sont négatifs). Pour les poteaux, la face tendue du tronçon supérieur est du côté correspondant à la plus grande des deux valeurs absolues M'_e et M'_w , la face tendue du poteau inférieur se trouve du côté opposé (fig. 7.14, fig. 7.15).

Les formules (7.14) sont applicables aussi pour le calcul des poutres continues soumises à des charges d'exploitation relativement élevées et non solidaires des poteaux (il faut noter qu'on néglige la solidarité des poutres avec les poteaux assez souvent surtout pour les poteaux intermédiaires). Dans ce cas on pose $K_s = K_n = 0$, alors on aura :

- dans le cas où les poutres auraient d'inerties différentes de part et d'autre du nœud, on trouve, pour la valeur commune de M_w et M_e , celle résultant des formules 7.10 et 7.11 (paragraphe 7.3.3);

- dans le cas où les poutres auraient les mêmes inerties de part et d'autre du nœud, on retrouve pour la valeur commune de M_w et M_e , celle résultant des formules 7.8 et 7.9 (paragraphe 7.3.2).

2) Travée de rive (travée 1 - 2, fig. 7.14).

On suppose que cette travée est prolongée par une console (fig. 7.15) ci qui permet de considérer le cas le plus général. Les quantités relatives au nœud de rive sont affectées de l'indice 1, celle du nœud voisin de l'appui de rive de l'indice 2, celle du nœud suivant de l'indice 3. Ainsi l_{w1} désigne la longueur libre d'une console éventuelle. La poutre est supposée avoir dans chaque travée une section constante.

On appelle M_{w1} la valeur absolue du moment dans la console au nu de l'appui 1. Ce moment est facile à déterminer puisque la console est un élément isostatique, ainsi pour une charge concentrée P située sur la console à la distance " a " de l'appui on a :

$$M_{w1} = -Pa \quad \text{donc,} \quad [M_{w1}] = Pa$$

et pour une charge uniformément répartie q :

$$M_{w1} = -q(l_{w1})^2 / 2, \quad \text{donc,} \quad [M_{w1}] = q(l_{w1})^2 / 2.$$

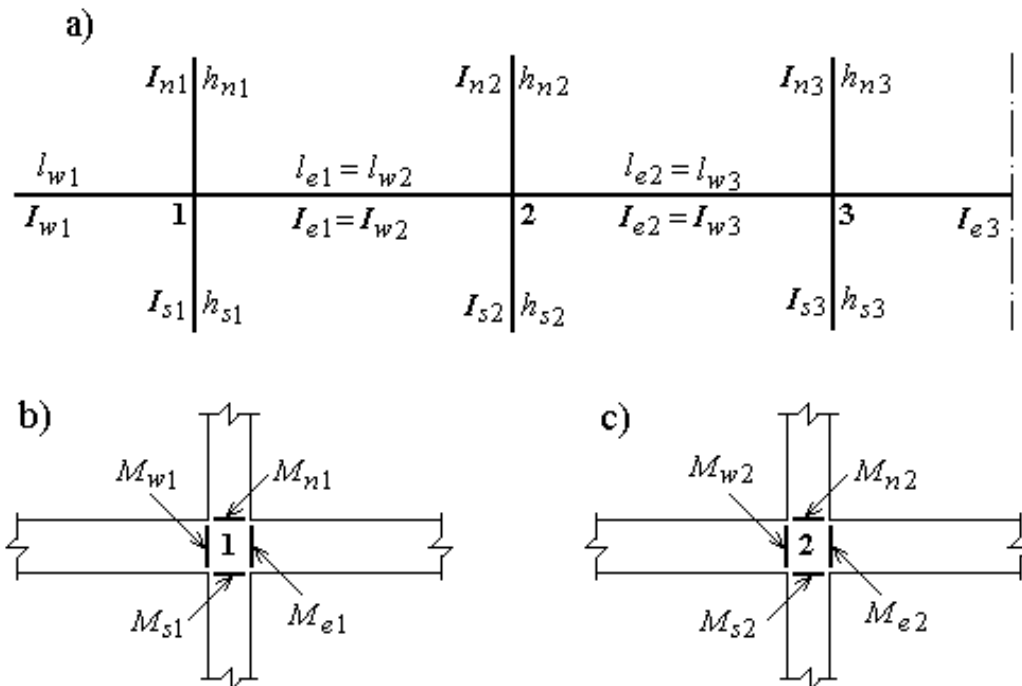


Fig. 7.15. Calcul des cadres avec la console

a - schéma de calcul ; b - moments dans le nœud 1 ;
c - moments dans le nœud 2

On suppose dans ce qui suit que, comme cela se présente en général, la valeur algébrique de M_{w1} est négative. S'il n'en était pas ainsi, on changerait, dans les formules, le signe figurant devant la valeur absolue de M_{w1} .

a) Nœud de rive (nœud 1). Pour calculer les moments au nœud de rive il suffit, puisque la console n'offre aucune résistance à la déformation du nœud 1, de faire $K_w = 0$ dans les formules (7.14) et d'y remplacer M'_w par M_{w1} . On prend la portée fictive de la poutre située à droite du nœud et les longueurs fictives du poteau situé au-dessous et au-dessus du nœud respectivement :

$$\begin{aligned} l'_{e1} &= 0,8l_{e1}; \\ h'_{n1} &= 0,8h_{n1} \quad \text{ou} \quad h'_{n1} = 0,9h_{n1}; \\ h'_{s1} &= 0,8h_{s1} \quad \text{ou} \quad h'_{s1} = h_{s1}. \end{aligned}$$

Alors on a:

$$\begin{aligned} K_{w1} &= 0; \quad K_{e1} = I_{e1} / l'_{e1}; \quad K_{s1} = I_{s1} / h'_{s1}; \\ K_{n1} &= I_{n1} / h'_{n1}; \quad D_1 = K_{e1} + K_{s1} + K_{n1}. \\ M'_w &= M_{w1}; \quad M'_{e1} = q_e (l'_e)^2 / 8,5 + l'_e \sum k_e P_e; \\ M_{e1} &= M'_{e1} (1 - K_{e1} / D_1) + M_{w1} K_{e1} / D_1; \\ M_{s1} &= (M'_{e1} - M_{w1}) K_{s1} / D_1 \\ M_{n1} &= (M'_{e1} - M_{w1}) K_{n1} / D_1 \end{aligned} \tag{7.15}$$

b) Nœud voisin du nœud de rive (nœud 2). On prend pour longueur fictive de la travée 2 - 1 :

$$\begin{aligned} l'_{w2} &= g_1 l_{w2}, \quad g_1 \text{ étant un coefficient compris entre } 0,8 \text{ et } 1 : \\ &- \text{ pour } K_{s1} + K_{n1} > 1,5 K_{e1} \text{ on prend } g_1 = 0,8; \\ &- \text{ pour } K_{s1} + K_{n1} < 1,5 K_{e1} \text{ on prend} \\ &\quad g_1 = 1 - (K_{s1} + K_{n1}) / 7,5 K_{e1}. \end{aligned}$$

Les coefficients K intervenant dans ces formules sont ceux relatifs au nœud 1, c'est-à-dire ceux qui ont été définis à l'alinéa précédent.

On prend pour longueur fictive de la travée 2 - 3:

$$\begin{aligned} l'_{e2} &= 0,8 l_{e2}, \quad \text{si la travée } 2 - 3 \text{ n'est pas une travée de rive;} \\ l'_{e2} &= g_3 l_{e2}, \quad \text{si la travée } 2 - 3 \text{ est une travée de rive, c'est-à-dire si le nœud } 3 \text{ est un nœud de rive,} \end{aligned}$$

avec le coefficient g_3 :

- pour $K_{s3} + K_{n3} > 1,5 K_{w3}$ on prend $g_3 = 0,8$;

- pour $K_{s3} + K_{n3} < 1,5 K_{w3}$ on prend

$$g_3 = 1 - (K_{s3} + K_{n3}) / 7,5 K_{e3}.$$

Les coefficients K intervenant dans ces formules sont ceux relatifs au noeud 3 :

$$K_{s3} = I_{s3} / h'_{s3}; \quad K_{n3} = I_{n3} / h'_{n3}; \quad K_{w3} = I_{w3} / l'_{w3},$$

(Avec $l'_{w3} = 0,8l_{w3} = 0,8l_{e2}$).

Ensuite on calcule :

$$M'_{w2} = q_w (l'_{w2})^2 / 8,5 + l'_{w2} \sum k P_w;$$

$$M'_{e2} = q_e (l'_{e2})^2 / 8,5 + l'_{e2} \sum k P_e;$$

$$M''_{w2} = M'_{w2} - (K_{e1} M_{w1}) / 2,125 D_1;$$

$$K_{w2} = I_{w2} / l'_{w2}; \quad K_{e2} = I_{e2} / l'_{e2}; \quad K_{s2} = I_{s2} / h'_{s2};$$

$$K_{n2} = I_{n2} / h'_{n2}; \quad D_2 = K_{w2} + K_{e2} + K_{s2} + K_{n2}.$$

Les valeurs des moments M_{w2} , M_{e2} , M_{s2} , M_{n2} sont données par :

$$M_{w2} = M'_{e2} K_{w2} / D_2 + M''_{w2} (1 - K_{w2} / D_2);$$

$$M_{e2} = M'_{e2} (1 - K_{e2} / D_2) + M''_{w2} K_{w2} / D_2; \quad (7.16)$$

$$M_{s2} = (M'_{e2} - M''_{w2}) K_{s2} / D_2;$$

$$M_{n2} = (M'_{e2} - M''_{w2}) K_{n2} / D_2.$$

Si la travée de rive ne comporte pas de console, il suffit de faire $M_{w1} = 0$ dans les formules (7.16). Ces formules permettent également de calculer les moments dans une poutre continue prolongée par une console. Comme les poteaux n'existent pas, on aura alors $K_s = K_n = 0$; $g_1 = g_3 = 1$, et on obtient puisque, dans le cas envisagé, $D_1 = K_{e1}$ et $D_2 = K_{w2} + K_{e2}$:

- lorsque les moments d'inertie des deux poutres de section constante aboutissant au noeud 2 sont différents :

$$M_{w2} = M_{e2} = M'_{e2} \frac{K_{w2}}{K_{w2} + K_{e2}} + \left(M'_{w2} - \frac{M_{w1}}{2,125} \right) \frac{K_{e2}}{K_{w2} + K_{e2}}$$

- lorsque les moments d'inertie des deux poutres de section constante aboutissant au noeud 2 sont égaux :

$$M_{w2} = M_{e2} = M'_{e2} \frac{l'_{e2}}{l_{w2} + l'_{e2}} + \left(M'_{w2} - \frac{M_{w1}}{2,125} \right) \frac{l_{w2}}{l_{w2} + l'_{e2}} .$$

On prend :

$l'_{e2} = l_{e2}$, si la poutre est limitée à l'appui 3 :

$l'_{e2} = 0,8 l_{e2}$, si la poutre comporte au moins une travée au-delà de l'appui 3.

3) Simplifications admises.

En pratique, on néglige souvent la raideur des poteaux, sauf pour les poteaux de rive. Les moments aux nœuds de rive sont alors calculés à l'aide des formules (7.15) données ci-dessus pour le noeud 1 (paragraphe 7.3.4, point 2).

Les moments aux nœuds voisins des nœuds de rive sont calculés à l'aide des formules (7.16) données ci-dessus pour le noeud 2, en y faisant $K_s = K_n = 0$, mais en conservant toutefois les valeurs réelles de K_s et de K_n pour déterminer les coefficients g_1 et g_3 . Pour les nœuds n'appartenant pas à une travée de rive, les moments sont calculés à l'aide des formules indiquées pour les poutres non solidaires des poteaux (paragraphe 7.3.2).

Si une travée de rive comporte une console, il ne faut pas oublier pour le calcul du moment sur l'appui voisin du nœud de rive de remplacer M'_w par les valeurs tenant compte de l'influence du moment M_{w1} de la console au nu du nœud de rive.

4) Cas d'une seule travée (ossature symétrique et symétriquement chargée).

Les formules (7.14), (7.15), (7.16) supposent que les constructions étudiées comporte au moins deux travées. Dans le cas d'une construction symétrique ne comportant qu'une travée et symétriquement chargée on pose (avec les notations définies sur la figure 7.16) : $K = I / l$, $K_s = I_s / h'_s$, $K_n = I_n / h'_n$,

$$D = K + 1,56(K_s + K_n); \quad M' = ql^2 / 8,5 + l \sum kP. \quad (7.17)$$

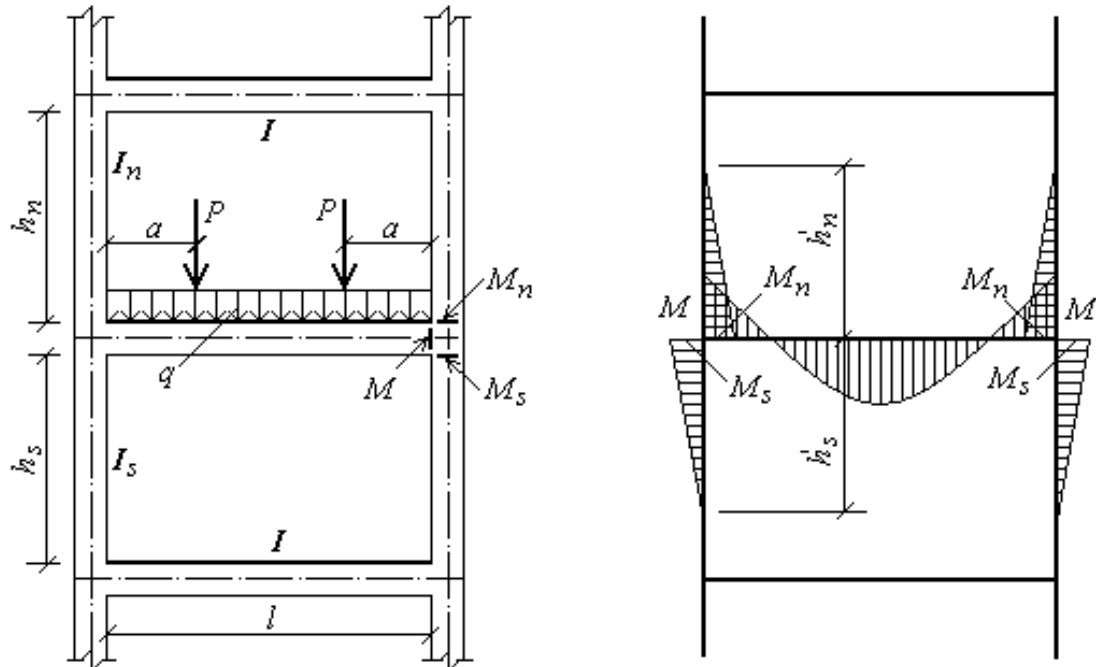


Fig. 7.16. Schéma de calcul du portique d'une seule travée

Dans ces formules h'_s et h'_n sont évalués comme indiqué au début du paragraphe 7.3.4. Les valeurs du coefficient "k" sont calculées à l'aide de la formule (où $x = a / l$) :

$$k = [x (1-x) (2-x)] / 2,125.$$

Les moments sont, en valeur absolue, et respectivement au nu de l'appui dans la poutre (M), au nu inférieur de la poutre dans le poteau inférieur (M_s), et au nu supérieur de la poutre dans le poteau supérieur (M_n) :

$$M = M'(K_s + K_n) / D; \quad M_s = M'K_s / D; \quad M_n = M'K_n / D.$$

5) *Moments en travée des poutres. Moments dans les poteaux.*

Les moments sur appuis ayant été calculé comme indiqué ci-dessus, les moments en travée dans les poutres sont déterminés de la même manière qu'en paragraphe 7.3.2, point 2.

En ce qui concerne les poteaux, on admet que les points de moment nul dans les poteaux se trouvent à la distance h'_n au-dessus du plancher et à la distance h'_s au-dessous du nu inférieur des poutres. Si les poteaux ne reçoivent pas de charges directement appliquées (on ne considère que des charges verticales appliquées à des poutres), les diagrammes des moments de flexion sont constitués par des droites.

6) *Efforts tranchants.*

Pour les poutres, dans le cas de plusieurs travées, les efforts tranchants d'appui sont calculés en faisant état des moments de continuité. A partir des efforts tranchants d'appui, on trace le diagramme des efforts tranchants en travée pour les charges permanentes et pour les charges d'exploitation en supposant pour ces dernières la répartition la plus défavorable. Dans le cas d'une seule travée, si l'ossature est symétriquement chargée, les efforts tranchants des appuis sont pris égaux à ceux de la travée indépendante de portée l .

Par mesure de simplification, on ne fait pas état, dans les calculs, des efforts tranchants dans les poteaux et des efforts normaux dans les poutres.

7) *Particularités constructives des poutres.*

Pour satisfaire la condition de non-fragilité dans toute poutre comportant une zone tendue, les armatures longitudinales de traction doivent présenter une section au moins égale au 0,1 % de la section droite de la poutre.

En ce qui concerne les armatures longitudinales de compression, elles doivent être maintenues tous les $15\varnothing$ au plus par des armatures transversales (dans le cas contraire, ces armatures sont considérées comme constructives). Le diamètre des armatures transversales doit être au moins égal à la valeur normalisée la plus proche du tiers du diamètre des armatures longitudinales qu'elles maintiennent.

Les armatures transversales, jointes au besoin aux armatures des hourdis éventuellement associés à l'âme, doivent par leur tracé remplir les rôles suivants :

- armer l'âme et la coudre efficacement aux membrures comprimées et tendues sous l'effet des sollicitations tangentes. Lorsque les charges sont uniformément réparties, on peut par simplification, tenir compte de la variation de l'effort tranchant en maintenant à mi-travée une densité d'armatures transversales par unité de longueur égale au quart de celle calculée au voisinage des appuis dans la même travée. Lorsque les poutres supportent des charges concentrées importantes, la répartition des armatures transversales tient compte de la variation réelle de l'effort tranchant le long de la poutre ;

- armer l'âme de façon à assurer la transmission des charges localisées ;

- armer transversalement les membrures comprimées et tendues le plus près possible de leur contour de façon à résister aux efforts de glissement.

Les dispositions de ferrailage résultant de ces conditions conduisent habituellement à prévoir des épingles de liaison entre les diverses files d'étriers lorsqu'il n'est pas disposé de cadre général ou de systèmes de cadres se recouvrant. Le ferrailage doit être également conçu de telle sorte que toute partie de la section droite nécessaire au fonctionnement de la poutre se trouve entourée convenablement par les armatures et liée efficacement au reste de la section.

Dans les poutres fléchies il faut toujours prévoir au moins un cadre (fig. 7.17, *a*). Si une section comporte comme armatures longitudinales dans un même lit :

- trois barres, on doit prévoir un cadre et un étrier (fig. 7.17, *b*) ;
- quatre barres, on doit prévoir deux cadres (fig. 7.17, *c*) ;
- cinq barres, on doit prévoir deux cadres et un étrier ou une épingle (fig. 7.17, *d*).

Il est loisible de ne pas entourer par des armatures transversales les armatures longitudinales de diamètre inférieur à 20 *mm* et qui ne se trouvent pas dans les angles.

Dans les poutres fléchies, les armatures longitudinales ne doivent pas être arrêtées aux points où les moments s'annulent, mais prolongées au-delà de ce point d'une longueur au moins égale à 0,8 *h* (fig. 5.15). En outre, une partie des armatures inférieures doit être prolongée jusqu'aux appuis pour équilibrer l'effort tranchant.

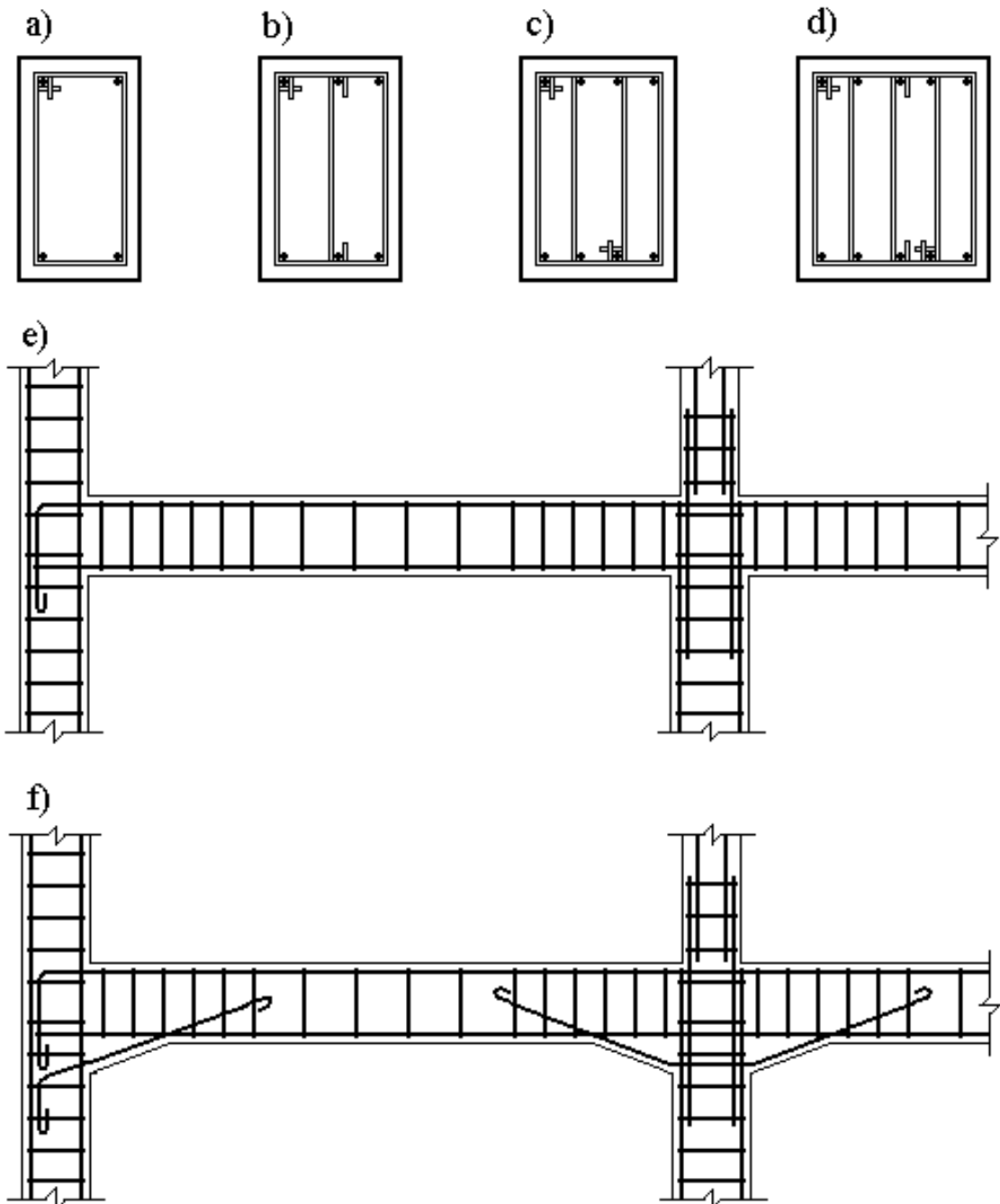


Fig.7.17. Ferrailage des poutres

- a, b, c, d, ferrailage des sections des poutres ;
- e, nœuds d'assemblage des poutres et des poteaux sans goussets ;
- f, nœuds d'assemblage des poutres et des poteaux avec goussets

Dans les poutres continues, les chapeaux placés au droit des appuis doivent avoir une longueur suffisante. En particulier, dans le cas où les travées seraient inégales, il faut prendre soin de prévoir un chapeau plus long dans la travée courte que dans l'autre travée (fig. 7.10). Dans le cas général pour déterminer les arrêts des armatures longitudinales, on trace la courbe enveloppe des armatures. On peut aussi utiliser une méthode simplifiée pour déterminer les arrêts des armatures longitudinales si les conditions suivantes sont remplies :

- la charge d'exploitation est uniformément répartie et au plus égale à la charge permanente ;
- on adopte pour les moments sur appuis les valeurs minimales indiquées dans le paragraphe 7.3.1.

On prend alors pour longueur des chapeaux, une longueur au moins égale à $1/5$ ou $1/4$ de la plus grande portée encadrant l'appui considéré (voir le paragraphe 7.3.1).

Sur les appuis les barres doivent être convenablement ancrées. Si la longueur dont on dispose sur l'appui est insuffisante pour assurer un ancrage rectiligne ou avec un crochet normal, on doit prévoir les mesures supplémentaires pour assurer cet ancrage.

7.3.5. Etat-limite de déformation des éléments de planchers

Les déformations des différents éléments de planchers doivent rester suffisamment faibles pour ne pas nuire à l'aspect et à l'utilisation de la construction, pour ne pas occasionner de désordres dans les éléments porteurs, et pour que les revêtements, les cloisons ou autres ouvrages supportés, s'il en existe, ne soient pas endommagés d'une façon inadmissible, par suite des déformations excessives de leurs supports. Les déformations ne doivent également pas conduire par leurs effets à une redistribution des efforts susceptibles de remettre en cause certaines des hypothèses de calcul.

S'il y a lieu de se prémunir contre l'un des risques précédents, on doit justifier de l'état-limite de déformation par un calcul de flèche, qui peut être conduit comme indiqué dans le paragraphe 6.4.

Toutefois, on peut admettre qu'il n'est pas indispensable de procéder à ce calcul dans les cas suivants :

1) Pour des dalles rectangulaires appuyées sur leurs quatre côtés, lorsque le rapport h / l_x est supérieur à $M_t / 20 M_x$ (la valeur de M_t ne pouvant être prise inférieure à $0,75 M_x$).

Où on pose :

- M_x et M_y étant les moments maximaux en travée par unité de largeur dans les sens l_x et l_y de la dalle supposée non encastrée sur appuis et non continue au-delà de ses appuis (M_x étant supposé supérieur à M_y);

- M_t , le moment unitaire en travée dans le sens l_x , compte tenu des effets d'encastrement et de continuité.

2) Pour des poutres dont le rapport h / l de la hauteur de section à la portée libre est au moins égal à $M_t / 10 M_o$, M_t étant le moment fléchissant maximal en travée, sous réserve que la section A_s d'armatures tendues soit telle que $A_s / b_o d \leq 4,2 / f_e$, avec b_o étant la largeur de la nervure, d , la hauteur utile de la poutre et f_e , la limite d'élasticité de l'acier exprimée en mégapascals. Cette tolérance n'est applicable qu'à des poutres associées à un hourdis pour lesquelles le rapport h / l est au moins égal à $1 / 16$ quelle que soit la valeur relative de M_t . Le domaine d'application de cette tolérance est limité aux constructions courantes dont les planchers supportent éventuellement des cloisons, mais sous réserve dans ce dernier cas, que la portée des éléments fléchis soit limitée à 8 m.

3) En ce qui concerne les déformations des planchers avec hourdis sur entrevous, on peut utiliser les méthodes indiquées pour les poutres. Lorsqu'il est prévu des étais intermédiaires, pour tenir compte du supplément de rigidité résultant de la présence des entrevous, il est loisible d'appliquer à la valeur calculée de la flèche totale une réduction forfaitaire de 20 % si $h \leq 20$ cm et de 10 % si $h \geq 30$ cm, avec interpolation linéaire entre ces deux cas.

Lorsqu'il prévoit des étais intermédiaires, on peut se dispenser de donner la justification de la déformabilité des planchers à entrevous à condition que le rapport h / l de la hauteur totale de section des nervures (épaisseur de dalle comprise) à la portée libre soit au moins égal à $M_t / 15 M_o$, avec M_t étant le moment fléchissant maximal en travée sous réserve que le pourcentage d'armatures $A_s / b_o d$ soit au plus égal à $3,6 / f_e$.

CHAPITRE 8. DISPOSITIONS CONSTRUCTIVES ET CALCUL DES POTEAUX DES BATIMENTS

8.1. Evaluation des charges. Flambement des poteaux

8.1.1. Calcul des sollicitations des poteaux

En général, les efforts des poteaux dans les constructions doivent être déterminés par des méthodes prenant en compte la solidarité des poteaux et des autres éléments de la construction. En même temps, pour les bâtiments à étages on utilise assez souvent la méthode de calcul simplifiée, en négligeant la raideur des poteaux surtout si on ne prend en compte que les charges verticales.

a) *Evaluation des sollicitations dues à des charges verticales.*

Les charges verticales agissant sur les poteaux peuvent être évaluées en appliquant, s'il y a lieu, la loi de dégression des charges variables dans les bâtiments à étages (voir chapitre 2, tableau 2.5). Toutefois, dans les bâtiments comportant des travées solidaires supportées par deux files de poteaux de rive et une ou plusieurs files de poteaux centraux, à défaut de calculs plus précis, les charges, évaluées en admettant la discontinuité des travées, doivent être majorées :

- de 15 % pour les poteaux centraux dans le cas des bâtiments à deux travées ;
- de 10 % pour les poteaux intermédiaires voisins des poteaux de rive dans les bâtiments comportant au moins trois travées ;
- les charges évaluées sur les poteaux de rive dans l'hypothèse de la discontinuité n'étant pas réduites.

Dans le cas d'éléments de rive prolongés par des parties en porte-à-faux, il est tenu compte de l'effet de console dans l'évaluation des charges transmises aux poteaux, en admettant la discontinuité des travées au droit des poteaux voisins des poteaux de rive.

Cette règle de détermination des charges verticales pour des poteaux intermédiaires ne donne pas une grande différence par rapport à celles des calculs plus complexes. Elle conduit à surestimer les charges des poteaux de rive, ce qui compense dans une certaine mesure, les non-prise en compte des sollicitations de flexion dans ces poteaux. On

autorise de négliger les moments de flexion dans les poteaux de rive que si le rapport de la rigidité des planchers à la rigidité des poteaux est soit suffisamment grand (cas le plus fréquent), soit suffisamment petit (cas exceptionnel).

b) *Evaluation des sollicitations dues aux forces horizontales.*

Les sollicitations qui s'exercent sur les poteaux et les poutres, assurant le contreventement des bâtiments à étages peuvent, à défaut de calculs plus précis, être évaluées à partir d'hypothèses simples. Dans le cas où les poteaux d'un même étage auraient tous la même hauteur et où les raideurs des différentes travées des poutres porteuses du plancher, parallèles aux forces appliquées et solidaires des poteaux, sont toutes supérieures au cinquième de la raideur du poteau le plus raide, on peut admettre :

- que les forces horizontales agissant sur une file de poteaux se répartissent entre les différents poteaux de cette file proportionnellement aux moments d'inertie desdits poteaux, les moments d'inertie des poteaux de rive étant toutefois affectés du coefficient 0,8 ;

- que les poteaux des étages courants encastres au niveau de chacun des planchers et sont articulés à mi-hauteur d'étage. Dans la hauteur de l'étage inférieur, les points de moment nul sont fixés en considération des liaisons avec les poutres du premier plancher et avec les organes de fondation ainsi que des conditions de déformation des fondations. Il est bien évident qu'il n'est pas simple de fixer des règles précises concernant la position de ces points de moment nul dans les poteaux. On est souvent conduit à faire successivement deux hypothèses : liaison articulée des poteaux avec des fondations; liaison encastree des poteaux avec des fondations. On suppose que ces hypothèses "encadrent" la réalité. Il convient de remarquer que dans les circonstances les plus courantes, cette liaison se rapproche davantage d'une articulation que d'un encastrement ;

- que les efforts normaux verticaux des poteaux d'une même file, résultants de l'action des forces horizontales, sont proportionnels à la distance de chacun des poteaux au point équidistant des deux poteaux de rive.

Il faut noter que l'utilisation de la superposition des portiques comme contreventement des bâtiments à grand nombre d'étages, pour résister aux actions du vent, est une solution généralement onéreuse. Il est alors préférable de constituer des pans verticaux de contreventement dont la

rigidité est assurée par des triangulations, des voiles en béton armé, des panneaux en maçonnerie porteuse ou même des panneaux de remplissage de résistance suffisante.

Lorsque les poteaux du bâtiment sont soumis uniquement aux actions dues à des charges verticales seulement (permanentes G et d'exploitation Q_B), dans les cas les plus courants, on ne considère qu'une seule combinaison d'action des charges:

$$1,35 G + 1,5 Q_B.$$

La charge d'exploitation Q_B est évaluée au niveau considéré, en faisant application, s'il y a lieu, de la loi de dégression dans les bâtiments à étages.

Les autres combinaisons peuvent être rencontrées notamment dans le cas où des porte-à-faux importants seraient susceptibles de provoquer des efforts de soulèvement dans certains poteaux.

Lorsque les poteaux du bâtiment sont soumis aux actions dues à des charges verticales (permanentes G et d'exploitation Q_B) et horizontales (pression du vent W), dans les cas les plus courants, on considère quatre combinaisons suivantes :

- (1) $1,35 G + 1,5 Q_B$;
- (2) $1,35 G + 1,5 Q_B + W$;
- (3) $1,35 G + 1,5 W + 1,3 \psi_o Q_B$;
- (4) $G + 1,5 W$.

où le produit $1,3 \psi_o$ prend les valeurs suivantes:

- $1,3 \psi_o = 1,0$ pour les constructions courantes à l'exclusion des salles de spectacles ;
- $1,3 \psi_o = 1,3$ pour les salles de spectacle, les bâtiments de stockage, archives et éventuellement certaines constructions industrielles.

On note que dans le cas général les efforts des poteaux des constructions doivent être déterminés par des méthodes prenant en compte la solidarité des poteaux et des autres éléments de la construction.

8.1.2. Flambement des poteaux

Lorsqu'on soumet une pièce rectiligne assez longue, dont l'une des dimensions de la section transversale est faible par rapport à la longueur, à un effort de compression dirigé suivant son axe, on constate que :

- tant que l'effort de compression est suffisamment faible, l'axe de la pièce demeure rectiligne et il se produit un raccourcissement élastique proportionnel à l'effort appliqué ;

- si l'effort de compression augmente, pour une certaine valeur de cet effort, la pièce s'incurve brusquement et elle se rompt sous une charge inférieure à celle qui aurait provoqué la rupture d'une pièce courte de même section transversale.

Ce phénomène est connu sous le nom de *flambement*.

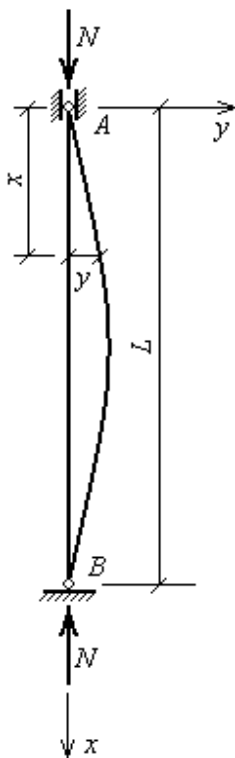


Fig.8.1

La valeur de l'effort de compression à partir de laquelle se produit le flambement s'appelle la charge critique d'Euler.

Cette charge critique d'Euler est déterminée dans le cours de Résistance des Matériaux de la manière suivante. Soit une pièce rectiligne AB de longueur L et de section constante est soumise à un effort de compression N. Cette pièce est articulée à ses deux extrémités. L'extrémité A peut se déplacer vers l'extrémité B qui est fixe.

On suppose que, sous l'effet du flambement, la ligne moyenne peut se déformer comme l'indique la figure 8.1.

Comme le raccourcissement de AB est en fait extrêmement petit on admet que, dans la position déformée, on a $AB = L$. Si « y » est l'ordonnée de la ligne élastique (la flèche) au point d'abscisse « x », on peut écrire l'équation de la flèche :

$$d^2y/dx^2 = -M/EI.$$

Comme dans le cas considéré, $M = N y$, alors on peut obtenir l'équation différentielle :

$$d^2y/dx^2 + N y/EI = 0.$$

La solution de cette équation différentielle permet de déterminer la valeur qui correspond à la charge critique d'Euler, désignée par N_{cr} :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(l_f)^2} .$$

Où l_f est la longueur de flambement qui est évaluée en fonction de la longueur libre l_o des pièces et de leurs liaisons effectives

On appelle longueur de flambement d'un poteau l_f , la longueur du poteau, supposé articulé aux deux extrémités, qui aurait même section et même charge critique d'Euler que le poteau considéré.

Pour la détermination de l_f on distingue trois cas :

1) *Poteau isolé* :

$l_f = 2 l_o$ pour un poteau encastré à une extrémité et libre à l'autre (fig. 8.2, a) et pour un poteau encastré à une extrémité et articulé à l'autre, lorsque ces extrémités peuvent se déplacer l'une par rapport à l'autre suivant une direction perpendiculaire à l'axe longitudinal du poteau et située dans le plan principal pour lequel on étudie le flambement ;

$l_f = l_o$ pour un poteau articulé aux deux extrémités lorsque ces deux extrémités ne peuvent pas se déplacer l'une par rapport à l'autre et pour un poteau encastré aux deux extrémités, lorsque ces deux extrémités peuvent se déplacer l'une par rapport à l'autre suivant une direction perpendiculaire à l'axe longitudinal de la pièce et située dans le plan principal pour lequel on étudie le flambement (fig. 8.2, b) ;

$l_f = l_o / \sqrt{2}$ pour un poteau encastré à une extrémité et articulé à l'autre, lorsque ces deux extrémités ne peuvent pas se déplacer l'une par rapport à l'autre (fig. 8.2, c) ;

$l_f = l_o / 2$ pour un poteau encastré à ces deux extrémités qui ne peuvent pas se déplacer l'une par rapport à l'autre (fig. 8.2, d).

2) *Poteau d'un bâtiment contreventé par des pans verticaux.*

Pour des bâtiments à étages qui sont contreventés par un système de pans verticaux (voiles en béton ou en maçonnerie), c'est-à-dire lorsqu'on peut considérer qu'il n'y a pas de déplacement horizontal des nœuds, et si la continuité des poteaux est assurée, on admet pour l_f les valeurs suivantes :

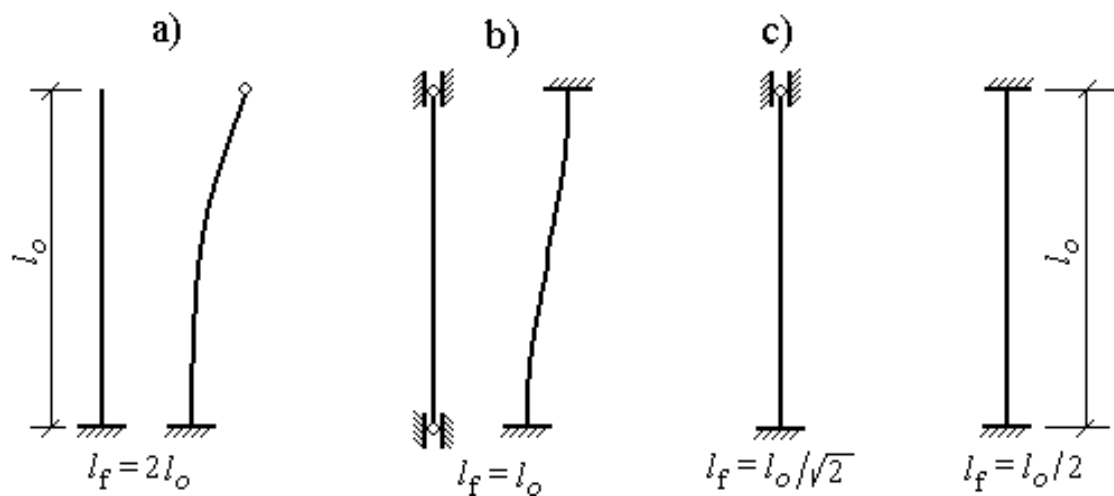


Fig. 8.2. Schémas de détermination de la longueur de flambement l_f

$l_f = 0,7 l_o$ si le poteau est à ses extrémités soit encastré dans un massif de fondation, soit assemblé à des poutres de plancher ayant au moins la même raideur que lui et le traversant de part en part ;

$l_f = l_o$ dans tous les autres cas (donc, en particulier, pour les poteaux préfabriqués).

3) *Autres poteaux.* Pour les poteaux autres que ceux considérés ci-dessus et, en particulier, pour les bâtiments dont le contreventement est assuré par des portiques, il n'est plus possible de déterminer la longueur de flambement par les formules données ci-dessus. Il est alors nécessaire de considérer le flambement d'ensemble de la structure, problème qui ne peut, en général, être traité qu'à l'aide d'un ordinateur.

La longueur libre d'un poteau l_o , est prise égale, suivant le cas considéré, à l'une des valeurs suivantes :

- pour un poteau d'un bâtiment à étages multiples, la distance entre faces supérieures de deux planchers consécutifs ou la distance entre la jonction du poteau avec sa fondation et la face supérieure du premier plancher ;

- pour un poteau d'un hall ne comportant au-dessus du sol qu'un rez-de-chaussée couvert, la distance entre la jonction du poteau avec sa

fondation et le sommet du poteau ou la distance entre la face supérieure du plancher haut du sous-sol et le sommet du poteau.

On appelle *élancement* λ , le rapport de la longueur de flambement l_f au rayon de giration " i " de la section droite du béton :

$$\lambda = l_f / i \quad \text{avec} \quad i = \sqrt{I / B},$$

I , moment d'inertie de la section ;

B , section du béton ;

Pour une section rectangulaire : $I = b h^3 / 12$, $B = b h$ ($b < h$),

$$i = \sqrt{I / B} = \sqrt{b h^3 / (12 b h)} = h / 3,464 = 0,288 h;$$
$$\lambda = (2 \sqrt{3} l_f) / h = 3,464 l_f / h \quad \text{ou} \quad \lambda = 3,464 l_f / b.$$

Pour une section circulaire de diamètre D : $\lambda = 4 l_f / D$.

Pour une section orthogonale de hauteur totale h : $\lambda = 3,89 l_f / h$.

8.2. Construction des pièces comprimées.

Les pièces en béton armé soumises à la compression, généralement des poteaux, doivent comporter deux types d'armatures :

- des armatures longitudinales, disposées parallèlement à l'axe longitudinal de la pièce ;
- des armatures transversales, situées dans des plans perpendiculaires à l'axe longitudinal de la pièce.

Les armatures longitudinales peuvent être constituées par des barres lisses, des barres à haute adhérence ou des treillis soudés. Il est recommandé d'utiliser des aciers de limite élastique au moins égale à 330 MPa.

Si les armatures longitudinales ne sont pas d'une seule longueur, la liaison entre armatures successives peut être réalisée par soudure ou par recouvrement sur une longueur suffisante (voir paragraphe 1.3.3). Il ne doit pas exister de crochets aux recouvrements, car ces crochets risqueraient de faire éclater le béton entourant les armatures.

Les armatures longitudinales doivent être placées à une distance suffisante des parois pour respecter les conditions indiquées au paragraphe 1.3.4.

En pratique, les pièces soumises à la compression simple ou notablement comprimée, ont une section carrée, rectangulaire, polygonale ou circulaire et les armatures longitudinales doivent être disposées comme suit (fig. 8.3) :

- dans les sections carrées ou rectangulaires, on place une armature à chaque angle et, si nécessaire, on prévoit des armatures intermédiaires de manière à ce que, dans ces sections, la distance entre axes de deux armatures voisines sur une même face soit au plus égale à :

- la longueur du petit côté du rectangle, augmentée de 10 *cm* ;
- 40 *cm* ;

- dans les sections polygonales, on place une armature à chaque angle et, si nécessaire, des armatures intermédiaires ;

- dans les sections circulaires, les armatures sont uniformément réparties sur tout le contour avec un minimum de 6 armatures.

Les armatures transversales sont disposées dans des plans perpendiculaires à l'axe longitudinal de la pièce et entourent les armatures longitudinales, en formant ceinture, de manière à empêcher tout mouvement de celle-ci vers la paroi. Ces armatures doivent entourer toutes les barres longitudinales de diamètre supérieur ou égal à 20 *mm*. On doit tenir compte du fait que les armatures longitudinales ne sont prises en compte pour les calculs de résistance que si elles sont maintenues par des cadres espacés de 15 fois leur diamètre au maximum. Par conséquent si, dans une section carrée ou rectangulaire, il existe des armatures longitudinales en dehors des angles, il est nécessaire, pour empêcher tout mouvement de ces armatures, de les relier par des épingles ou des étriers (fig. 8.3, *b*).

Le diamètre \varnothing_t des armatures transversales doit être au moins égal au diamètre normalisé le plus proche de $\varnothing_l / 3$ (où \varnothing_l est le diamètre de la plus grosse armature longitudinale).

L'espacement des armatures transversales ne doit pas dépasser :

- 15 \varnothing_l ;
- 40 *cm* ;
- la plus petite dimension de la section augmentée de 10 *cm*.

Dans les zones où la proportion des armatures longitudinales, présentant des jonctions par recouvrement est supérieure à 50 %, il faut

prévoir au moins trois plans d'armatures transversales sur la longueur du recouvrement, un plan à chaque extrémité du recouvrement et un au milieu (fig. 7.17, e, f).

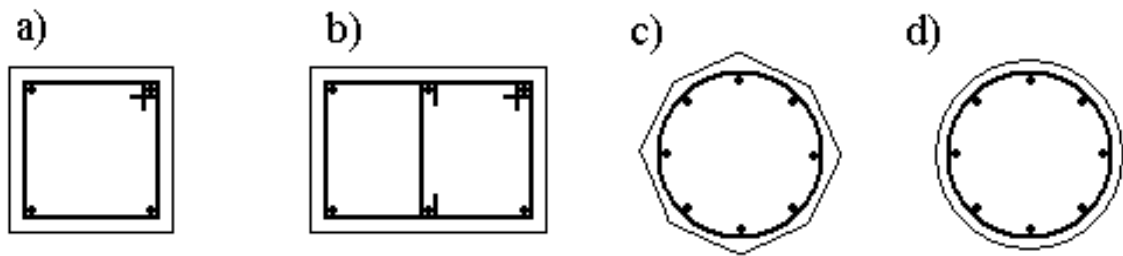


Fig. 8.3

Par ailleurs, les *conditions de mise en œuvre* et, en particulier la *qualité des coffrages*, doivent être telles que l'imperfection de l'exactitude des dimensions des poteaux :

- ne dépasse pas $l / 500$ avec $l / 500 \leq 1 \text{ cm}$;
 - soit, égale à 1 cm si $l / 500 > 1 \text{ cm}$,
- où l est la longueur du poteau.

Quels que soient les résultats donnés par le calcul, les armatures longitudinales des pièces comprimées doivent avoir la section au moins égale à :

- 4 cm^2 par mètre de longueur de parement mesuré perpendiculairement à la direction de ces armatures;
- $0,2 \%$ de la section totale du béton comprimé.

Toutefois, la section des armatures longitudinales ne peut pas prendre n'importe quelle valeur supérieure aux limites précédentes. La section considérée ne doit pas dépasser 5% de la section totale du béton comprimé (sauf dans la zone de recouvrement). Si le calcul conduisait à un pourcentage supérieur à 5% , il serait nécessaire de modifier les dimensions de la pièce. Donc dans le cas d'une section rectangulaire, de dimensions b et h , on doit avoir d'après ce qui précède :

$$A_{min} \geq (0,2 b h) / 100 ; \quad A_{max} \leq (5 b h) / 100.$$

8.3. Calcul des armatures longitudinales des poteaux soumis à une compression simple

Un poteau est soumis à la compression simple lorsque les forces agissant sur le poteau peuvent être réduites, par rapport au centre de gravité de la section droite à une force unique de compression. Un poteau peut également être considéré comme soumis à une compression simple (compression "centrée") s'il est sollicité en plus de l'effort normal de compression, par des moments de flexion dont l'existence peut ne pas être tenu-compte dans le calcul de la stabilité et de la résistance (vu la petite valeur de ces moments).

Comme exemple, on peut citer les poteaux intermédiaires des bâtiments à étages symétriquement chargés par des charges verticales modérées (dans ce cas on peut ne pas prendre en compte la liaison des poteaux avec des poutres, voir chapitre 7) ; les poteaux des bâtiments sollicités par des charges verticales et horizontales, lorsque ces poteaux constituent une membrure comprimée (ou tendue) d'un dispositif de contreventement ; les poteaux de bâtiments contreventés par des refends lorsque ces poteaux sont moins rigides que les poutres dont ils sont solidaires ou si ces poteaux étant plus rigides que les poutres dont ils sont solidaires, mais l'excentricité "e" due aux moments de continuité des poutres reste petite ($e \leq h / 12$).

Dans le cas de la compression simple, le raccourcissement de l'acier et celui du béton est limité à 2 ‰. La contrainte du béton sera donc égale à $f_{bc} = (0,85 f_{c28}) / \theta \gamma_b$ et celle de l'acier à la contrainte correspondant à un raccourcissement de 2 ‰, soit $\sigma_s' = \sigma_{s,2‰}$.

Pour l'état-limite ultime de résistance la condition d'équilibre est :

$$N_u - B f_{bc} - A \sigma_{s,0,2‰} = 0. \quad (8.1)$$

D'où on trouve:

$$A = \frac{N_u - B(0,85 f_{c28}) / \theta \gamma_b}{\sigma_{s,0,2‰}}. \quad (8.2)$$

Ces formules ne peuvent être appliquées qu'aux éléments comprimés où le flambement ne se manifeste pas.

En pratique, le ferrailage des poteaux est généralement déterminé par l'état-limite de stabilité de forme (en prenant en compte l'élançement de l'élément). Vu que l'étude du flambement est assez compliquée, on a été

amené à considérer, pour les cas les plus courants, des règles forfaitaires simples, si les conditions suivantes sont remplies :

- l'élanement λ du poteau est au plus égal à 100 ;
- le poteau est soumis uniquement à un effort de compression centré, parce que les moments de continuité, s'ils existent, ont une valeur faible et ne sont pas pris en compte dans les calculs ;
- l'imperfection de rectitude du poteau est au plus égale à la plus grande des deux valeurs : 1 cm et $l/500$.

Les règles B.A.E.L apportent à des formules (8.1) et (8.2) des corrections suivantes :

- pour les poteaux de faible section, sensibles aux imperfections de l'exécution, on introduit à la place de B une aire de béton réduite B_r obtenue en déduisant des dimensions réelles 1 cm d'épaisseur sur toute la périphérie du poteau. Pour une section rectangulaire ($b \times h$), cette aire réduite vaut : $B_r = (b - 2 \text{ cm}) \times (h - 2 \text{ cm})$.

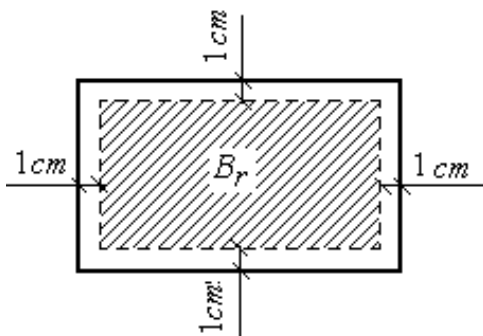


Fig.8.4

- En tenant compte du fait que les charges sont appliquées généralement après 90 jours, la résistance du béton augmente :

$$\sigma_{bc} = f_{c28} / 0,9 \gamma_b.$$

- Pour compenser le fait de négliger les effets du second ordre on minore la valeur de l'effort normal résistant un coefficient réducteur fonction de l'élanement :

$$\text{pour } \lambda \leq 50 : \quad \alpha = \frac{0,85}{1 + 0,2(\lambda/35)^2} = \frac{0,85}{\beta},$$

$$\text{avec } \beta = 1 + 0,2(\lambda/35)^2;$$

$$\text{pour } 50 < \lambda \leq 70 : \quad \alpha = 0,60(50/\lambda)^2 = \frac{0,85}{\beta},$$

$$\text{avec } \beta = 0,85 \lambda^2 / 1500;$$

- enfin on admet que les contraintes $\sigma_{s,2\%o} = f_e / \gamma_s$.

Avec ces correctifs, l'effort normal résistant ultime vaut :

$$N_u = \alpha \left(\frac{B_r f_{c28}}{0,9 \theta \gamma_b} + \frac{A f_e}{\gamma_s} \right), \quad \text{ou encore}$$

$$\beta N_u = \frac{B_r f_{bc}}{0,9} + \frac{0,85 A f_e}{\gamma_s}. \quad (8.3)$$

Si plus de la moitié des charges est appliquée avant 90 jours, les valeurs de α sont à diviser par 1,1 (ou β multiplié par 1,1) ;

Si la majeure partie des charges est appliquée avant 28 jours, il faut prendre f_{cj} au lieu de f_{c28} et diviser α par 1,2 (ou multiplier β par 1,2).

La section des armatures A est alors calculée à l'aide de la formule :

$$A \geq \frac{\beta N_u - (B_r f_{bc} / 0,9)}{0,85 (f_e / \gamma_s)}. \quad (8.4)$$

Si l'effort N_u est connu et on demande de déterminer les dimensions de la section du béton B et de l'armature A , on fait le calcul par approximations successives. La formule générale (8.3) donne :

$$B_r \geq \frac{\beta N_u}{(f_{bc} / 0,9) + (0,85 A f_e / B_r \gamma_s)}.$$

On prend en première approximation $A / B_r = 0,01$, alors :

$$B_r \geq \frac{\beta N_u}{(f_{bc} / 0,9) + (0,85 f_e / 100 \gamma_s)}.$$

Pour un poteau rectangulaire ($b < h$) soumis à une compression simple, il est préférable de prendre $\lambda \leq 35$, soit qu'on prenne $\lambda = 35$. Avec cette valeur on trouve les dimensions :

$b = (2\sqrt{3} l_f) / \lambda \approx l_f / 10$ et $h = [B_r / (b - 0,02)] + 0,02$. Si on trouve $h < b$, on prend un poteau carré de côté $l_f / 10$.

Exemple 8.1.

Déterminer les armatures d'un poteau à section rectangulaire de $400 \times 300 \text{ mm}$ soumis à un effort normal centré $N_u = 1500 \text{ kN}$. Ce poteau fait partie de l'ossature d'un bâtiment à étages multiples contreventé par des refends et sa longueur de flambement a pour valeur $l_f = 3 \text{ m}$. Les armatures longitudinales sont en acier de nuance $Fe E 400$, type 1 ($\gamma_s = 1,15$) et on a pour le béton $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$ ($\gamma_b = 1,5$).

Solution. Pour l'état-limite ultime de stabilité de forme, comme le poteau est soumis à une compression centrée, on utilise les formules 8.3 et 8.4.

L'élanement du poteau est égal à :

$$\lambda = 3,46 l_f / b = 3,46 \times 3 / 0,3 = 34,6 < 50.$$

Alors le coefficient de minoration α sera égal à :

$$\alpha = 0,85 / [1 + 0,2 (\lambda / 35)^2] = 0,85 / [1 + 0,2 (34,6 / 35)^2] = 0,71,$$

et le coefficient $\beta = 0,85 / \alpha = 0,85 / 0,71 = 1,197$.

D'après la formule 8.3 on a :

$$N_u = \alpha \left[\frac{B_r f_{c28}}{0,9 \theta \gamma_b} + \frac{A f_e}{\gamma_s} \right] = \alpha \left[\frac{B_r f_{c28}}{1,35} + \frac{A f_e}{1,15} \right].$$

Ici $\gamma_b = 1,5$; $\theta = 1,0$; $\gamma_s = 1,15$, et la section de béton réduite

$$B_r = (400 - 20) \times (300 - 20) = 106400 \text{ mm}^2.$$

Alors, avec ces valeurs on trouve la section des armatures du poteau :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(N_u / \alpha) - (B_r f_{c28} / 0,9 \theta \gamma_b)}{f_e / \gamma_s} = \\ &= \frac{(1500 \cdot 10^3 / 0,71) - (106400 \cdot 20 / 1,35)}{400 / 1,15} = 1542 \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

On peut également utiliser la formule 8.4 avec le coefficient β :

$$A = \frac{(1,197 \cdot 1500 \cdot 10^3) - (106400 \cdot 11,3 / 0,9)}{0,85 \cdot 400 / 1,15} = 1554 \text{ mm}^2.$$

Soit, on prend 6 $\varnothing 18$ avec $A = 1527 \text{ mm}^2$ (- 0,9 %)

Les armatures transversales (voir paragraphe 8.4) seront constituées par des barres de 6 mm de diamètre en acier $Fe E 215$ (d'après la condition $\varnothing_t \geq \varnothing_l / 3 = 18 / 3 = 6 \text{ mm}$), et espacées de 250 mm (d'après la condition $S_t \leq 15 \varnothing_l = 15 \times 18 = 270 \text{ mm}$).

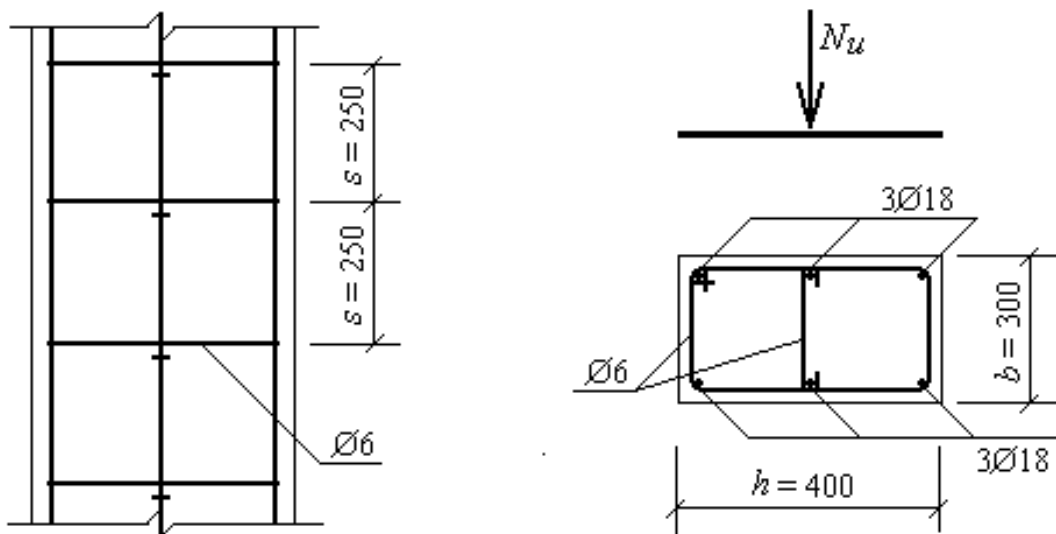


Fig. 8.5

8.4. Calcul des armatures longitudinales des poteaux soumis à une compression excentrée

Un poteau étant soumis à la compression composée, lorsque les forces agissant sur le poteau peuvent être réduites à une force de compression et un moment de flexion.

Comme exemple, on peut citer : les poteaux intermédiaires des bâtiments à étages supportant un plancher soumis à des charges d'exploitation relativement élevées ; les mêmes poteaux reliés à des poutres ayant les portées différentes des travées aboutissant du poteau ; poteaux de rive des bâtiments à étages ; poteaux des bâtiments à étages soumis à l'action des charges horizontales ; poteaux des bâtiments sans étage, ayant de grandes portées de travées, etc.

Les valeurs des efforts normaux N_u et des moments de flexion M_u des poteaux sont évalués en faisant le calcul statique du portique à partir des combinaisons d'action relatives au cas étudié (voir chapitre 7).

Le calcul des poteaux soumis à la flexion composée à l'état-limite ultime doit être fait en tenant compte des effets du second ordre

(flambement) et l'excentricité additionnelle. Il faut noter que l'étude du flambement est assez compliquée. Ainsi, la longueur de flambement l_f dépend des liaisons de la pièce qui peut être (par exemple) libre, articulée ou encastree à chacune de ses extrémités.

Il convient d'évaluer avec prudence cette valeur ; il faut en particulier tenir compte de la plus ou moins grande souplesse des encastremements (rarement parfaits) ainsi que des possibilités de déplacement des extrémités perpendiculairement à l'axe longitudinal de la pièce. C'est pourquoi pour les cas les plus courants, on préfère tenir compte des effets du second ordre d'une manière forfaitaire.

Ainsi pour les poteaux soumis à la flexion composée (l'effort normal est un effort de compression) on remplace l'excentricité réelle e_1 par une excentricité totale :

$$e = e_{tot} = e_1 + e_a + e_2,$$

où $e_1 = M_u / N_u$ l'excentricité (dite de premier ordre) de la résultante des contraintes normales, avant application des excentricités additionnelles. Pour la compression centrée $e_1 = 0$;

e_a , l'excentricité additionnelle traduisant les imperfections géométriques initiales (après exécution). Cette excentricité est bien entendu à prendre dans la direction la plus défavorable et sa valeur est prise égale à la plus élevée des deux quantités:

$$e_a \geq 2 \text{ cm}, \quad e_a \geq l / 250 \quad (l, \text{ longueur du poteau}) ;$$

e_2 , l'excentricité due aux efforts du second ordre, liés à la déformation de la structure, et prise égale à :

$$e_2 = \frac{3(l_f)^2}{10000 h} \cdot (2 + \alpha \theta),$$

h , la hauteur totale de la section dans la direction du flambement ;

θ , étant le rapport de la déformation finale due au fluage à la déformation instantanée sous la charge considérée. Ce rapport est généralement pris égal à 2, on a alors:

$$e_2 = \frac{3(l_f)^2}{10000h} \cdot (2 + 2\alpha),$$

α , le rapport entre le moment du premier ordre, dû aux charges permanentes et le moment total du premier ordre (ces moments étant pris avant application des coefficients de majoration des charges γ) :

$$\alpha = \frac{M_{perm}}{M_{perm} + M_{expl}} \quad \text{ou encore} \quad \alpha = 10 \left[1 - \frac{M_u}{1,5 M_{ser}} \right].$$

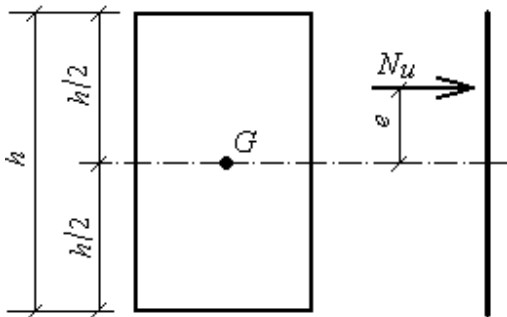


Fig.8.6

Donc, les sollicitations de calcul deviennent égale à :

$$N_u \text{ et } M_{Gu} = e_{tot} N_u.$$

La présente méthode peut être également appliquée lorsque l'effort N_u de compression est théoriquement centré (cas de compression simple). On a alors $e_1 = 0$, mais il faut toujours prendre en compte l'excentricité additionnelle.

Le calcul des poteaux soumis à la flexion composée est fait par les méthodes exposées dans le chapitre 4, mais en remplaçant $e = M_u / N_u$ par l'excentricité totale e_{tot} .

Exemple 8.2.

Déterminer les armatures d'un poteau à section rectangulaire de $b \times h = 300 \times 500 \text{ mm}$. Ce poteau fait partie de l'ossature d'un bâtiment à étages multiples, il est soumis à des charges verticales et à l'effort du vent. Les efforts dans la section la plus sollicitée ont pour valeurs: $N_u = 1200 \text{ kN}$ et $M_u = 120 \text{ kN m}$ (les moments avant application des coefficient γ sont :

$$M_{perm} = 30 \text{ kN m} ; M_{expl} = 53 \text{ kN m} ; M_{ser} = 83 \text{ kN m}).$$

La longueur du poteau et sa longueur de flambement sont toutes deux égales à $4,2 \text{ m}$. Les armatures longitudinales sont en acier de nuance $Fe E 500$, type 1 ($f_e / \gamma_s = 348 \text{ MPa}$), et on a pour le béton $f_{bc} = 14,2 \text{ MPa}$.

Solution. L'excentricité du premier ordre:

$$e_1 = M_u / N_u = 120 / 1200 = 0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm.}$$

L'excentricité additionnelle:

$$e_a \geq 2 \text{ cm}, \quad e_a \geq l / 250 = 420 / 250 = 1,68 \text{ cm}, \quad \text{soit } e_a = 2 \text{ cm.}$$

Le rapport des moments est :

$$\alpha = \frac{M_{perm}}{M_{perm} + M_{expl}} = \frac{30}{83} = 0,36$$

Alors l'excentricité du second ordre:

$$e_2 = \frac{3(l_f)^2}{10000h} (2 + 2\alpha) = \frac{3 \cdot 420^2}{10000 \cdot 50} (2 + 2 \cdot 0,36) = 2,88 \text{ cm.}$$

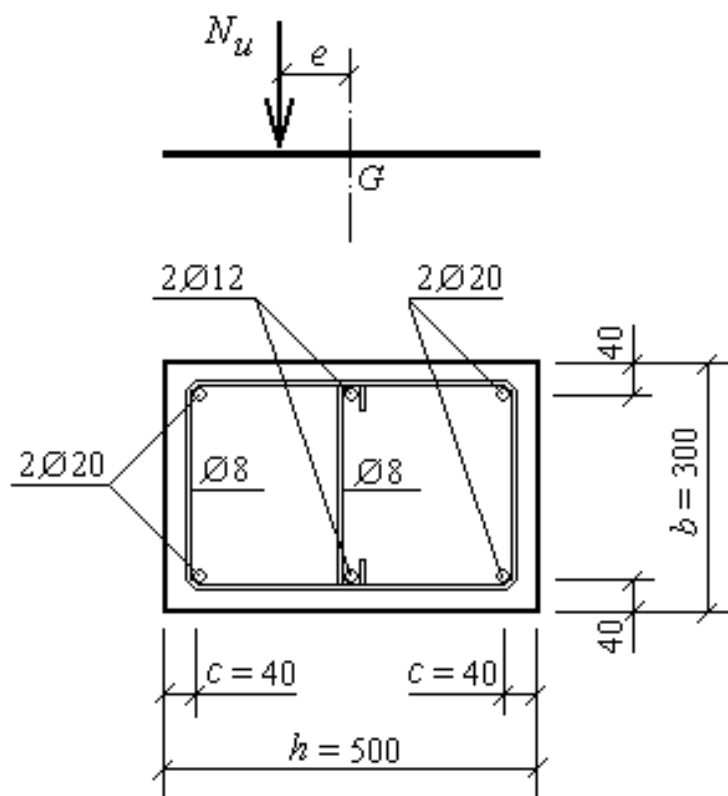


fig. 8.7

L'excentricité totale est égale à :

$$e_{tot} = e_1 + e_a + e_2 = 10 + 2 + 2,88 = 14,88 \text{ cm} .$$

Alors les efforts de calcul seront :

$$N_u = 1200 \text{ kN} ; \quad M_{Gu} = N_u e_{tot} = 1200 \times 0,1488 = 178,6 \text{ kNm} .$$

Pour calculer le ferrailage du poteau on peut utiliser la méthode exposée dans le chapitre 4.

Le moment par rapport aux armatures tendues (ou moins comprimées) est égal à :

$$M_{As} = M_{Gu} + N_u (h/2 - c) = 178,6 + 1200 (0,5/2 - 0,04) = 430,6 \text{ kNm} .$$

Pour continuer le calcul on vérifie la condition (4.6) :

$$N_u (d - d') - M_{As} < (0,337 - 0,81 d'/h) b h^2 f_{bc} ;$$

$$N_u (d - d') - M_{As} = 1200 (0,46 - 0,04) - 430,6 = 73,4 \text{ kNm} ;$$

$$(0,337 - 0,81 d'/h) b h^2 f_{bc} = (0,337 - 0,81 \times 40 / 500) 300 \times 500^2 \times 14,2 = \\ = 289,9 \times 10^6 \text{ Nmm} = 289,9 \text{ kNm} .$$

Vu que $73,4 \text{ kNm} < 289,9 \text{ kNm}$, la section est partiellement comprimée.

Comme pour une section fléchie on trouve la valeur :

$$\mu = \frac{M_{As}}{f_{bc} b d^2} = \frac{430,6 \cdot 10^6}{14,2 \cdot 300 \cdot 460^2} = 0,478 .$$

D'après le tableau A.1 on a $\mu_l = 0,372$. Donc on a que $\mu > \mu_l$, c'est-à-dire que l'armature comprimée est nécessaire .

On pose $\mu = \mu_l = 0,372$; $\beta_l = 0,753$; $\sigma_s' = \sigma_s = 435 \text{ MPa}$, et on calcule :

$$A_s' = \frac{M_{As} - f_{bc} b d^2 \mu_l}{\sigma_s (d - d')} = \frac{(430,6 \cdot 10^6) - (14,2 \cdot 300 \cdot 460^2 \cdot 0,372)}{435 (460 - 40)} = 521,5 \text{ mm}^2 ,$$

$$A_s = \frac{M_{As}}{\beta_l d \sigma_s} + \frac{A_s' \sigma_s' - N_u}{\sigma_s} = \\ = \frac{430,6 \cdot 10^6}{0,753 \cdot 460 \cdot 435} + \frac{521,5 \cdot 435 - 1200 \cdot 10^3}{435} = 620,7 \text{ mm}^2 .$$

On prend 2 \varnothing 20 avec $A_s' = 628 \text{ mm}^2$ dans la zone comprimée et
2 \varnothing 20 avec $A_s = 628 \text{ mm}^2$ dans la zone tendue.

CHAPITRE 9. DISPOSITIONS CONSTRUCTIVES ET CALCUL DES FONDATIONS

9.1. Généralités

Les fondations d'une construction sont constituées par les parties de l'ouvrage qui sont en contact avec le sol auquel elles transmettent les charges de la superstructure. Elles constituent donc la partie essentielle de l'ouvrage puisque de leur bonne conception et réalisation découle la bonne tenue de l'ensemble.

Les éléments de fondation transmettent les charges au sol, soit directement (cas des semelles reposant sur le sol ou cas des radiers), soit par l'intermédiaire d'autres organes (cas des semelles sur pieux par exemple). Le choix à faire entre les différents types des fondations dépend essentiellement de la résistance du sol.

En pratique, la valeur de la contrainte du sol à introduire dans le calcul (la contrainte limite admissible au sol), et qui est désignée par σ^* , est donnée par l'expérience, en raison de la connaissance que l'on peut avoir du terrain sur lequel les ouvrages ont déjà été réalisés ou à partir des résultats des sondages effectués. Dans ce qui suit, on suppose que cette valeur est connue. On distingue les types de fondations suivantes :

- *les fondations superficielles*, lorsque les couches de terrain susceptibles de supporter l'ouvrage sont à une faible profondeur ;
- *les fondations profondes*, lorsque ces couches sont à une grande profondeur ; on réalise des fondations profondes qui peuvent prendre appui sur une couche résistante ou "flotter" dans un terrain peu résistant. Dans ce dernier cas on mobilise alors les forces de frottement du sol sur la fondation pour soutenir l'ouvrage.

Ici on ne considère que des fondations superficielles.

Les fondations superficielles (les plus utilisables pour des bâtiments courants) sont des fondations dont la profondeur n'excède pas en général 2 à 3 mètres. On distingue :

- *les fondations fonctionnelles*, constituées par des semelles isolées sous poteaux ;
- *les fondations linéaires*, constituées par des semelles continues sous poteaux ou murs ;
- *les fondations surfaciques*, constituées par des radiers et cuvelages sous poteaux ou murs.

Dans le cas général les combinaisons d'actions à considérer pour déterminer les efforts transmis par les points d'application sont celles définies pour les poteaux et pour les poutres (voir chap. 8).

Les massifs de fondations doivent être en équilibre sous l'action :

- *des sollicitations dues à la superstructure* :
 - des forces verticales ascendantes ou descendantes ;
 - des forces obliques ;
 - des forces horizontales ;
 - des moments de flexion ;
- *des sollicitations dues au sol* :
 - des forces verticales ascendantes ou descendantes ;
 - des forces obliques (adhérence, remblais, etc.).

Les massifs de fondations doivent être stables, c'est-à-dire qu'ils ne doivent donner lieu à des tassements que si ceux-ci permettent la tenue de l'ouvrage. On peut admettre dans certaines limites des tassements uniformes des fondations, mais des tassements différentiels sont rarement compatibles avec la tenue de l'ouvrage. Il est donc nécessaire d'adopter le type de la structure des fondations à la nature du sol qui va supporter l'ouvrage.

D'après les Normes *B.A.E.L* on doit respecter les prescriptions suivantes :

- l'enrobage minimal des armatures doit être de 3 cm ;
- les armatures verticales des poteaux et des murs doivent être bien ancrées sur la semelle. Lorsqu'elles sont comprimées, elles doivent être prolongées jusqu'à la partie inférieure de la semelle, mais sans être

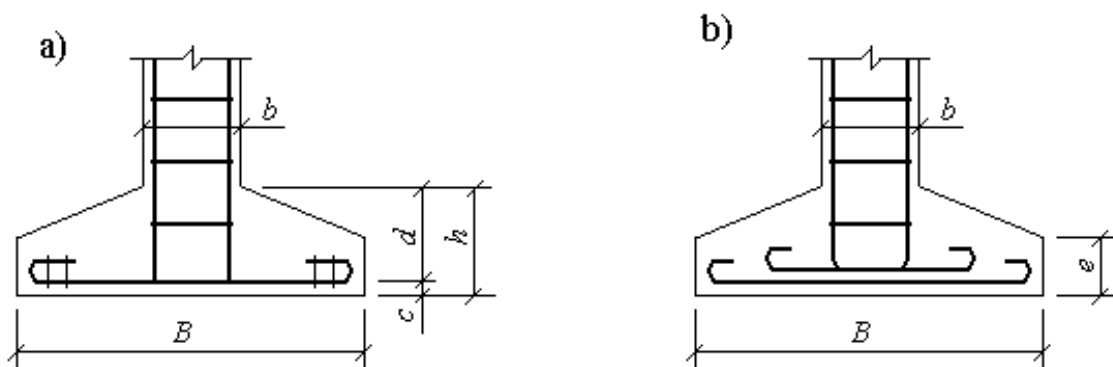


Fig. 9.1

munies de retour (fig. 9.1,a). Dans le cas où les poteaux de la structure seraient sollicités au niveau supérieur des semelles par des moments de flexion, les armatures du poteau peuvent être tendues, alors ces armatures doivent être munies de retours situés dans le plan des armatures inférieures de la semelle (fig.9.1,b) ;

- les armatures horizontales des semelles doivent être bien ancrées à ses extrémités. Si cet ancrage ne peut être réalisé en barres droites, il est nécessaire de prévoir des ancrages courbes qui pourront être des crochets éventuellement munis de ligatures pour éviter leur ouverture (fig. 9.1, a) ou des crochets munis de retours à 45° (fig. 9.1, b). L'emploi d'ancrage avec retours d'équerre, ou d'ancrages qui se trouveraient à proximité de la face supérieure de la semelle est à proscrire.

Les calculs des fondations sont effectués à l'état-limite de service pour le dimensionnement de la surface au sol (la portance du sol intégré déjà un coefficient de sécurité de l'ordre de 3).

Le dimensionnement vis-à-vis du comportement mécanique des fondations s'effectue à l'état-limite ultime.

9.2. Semelles continues sous murs

9.2.1. Dispositions constructives

Les semelles continues sous murs peuvent être flexibles (de faible épaisseur) et rigides. Une semelle est considérée comme rigide (fig. 9.2) si :

$$h \geq [(B - b) / 4] + 0,05 \text{ m} . \quad (9.1)$$

On ne prend jamais "h" inférieur à 15 cm. Donc, les petites semelles sur terrain très résistant ou peu chargé seront de section rectangulaire et de 15 cm d'épaisseur. La hauteur de rive "e" des semelles trapézoïdales est de 10 à 15 ou 20 cm.

Pour que les contraintes soient uniformément réparties sur le sol et les efforts dans les bielles de béton convenablement transmis aux armatures les dimensions de la semelle doivent satisfaire aux conditions suivantes :

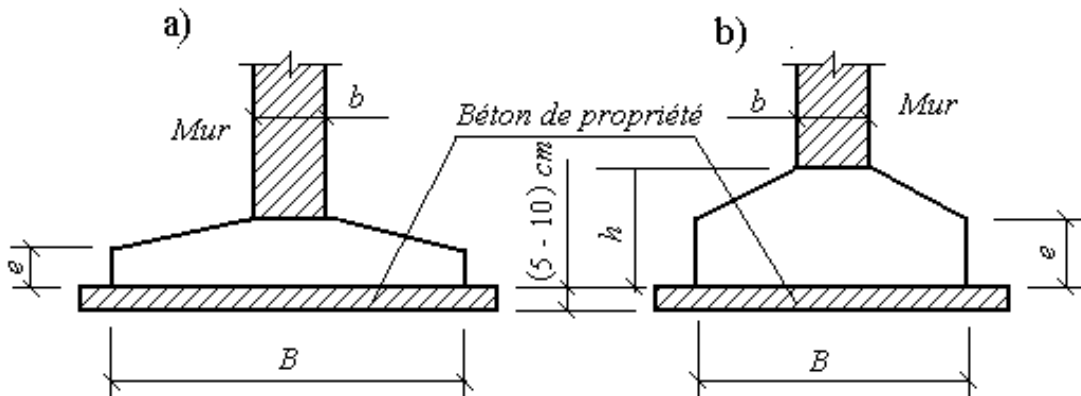


Fig. 9.2

- pour la hauteur utile "d" à l'aplomb du mur

$$d \geq (B - b) / 4; \quad (9.2)$$

- pour la hauteur "e" au bord libre

$$e \geq 6\varnothing + 6 \text{ cm},$$

(\varnothing , le diamètre des armatures en centimètres),

Les semelles reposent généralement sur une couche de béton de propreté de 5 à 10 cm d'épaisseur (dosé à 150 kg / m³ de ciment).

Si le mur est important, on peut le faire reposer sur la semelle par l'intermédiaire d'un libage qui a pour effet de raidir la semelle et permet de remédier aux légers tassements différentiels susceptibles de se produire. Ce libage est constitué par une poutre comportant des armatures longitudinales et des armatures transversales (fig.9.3).

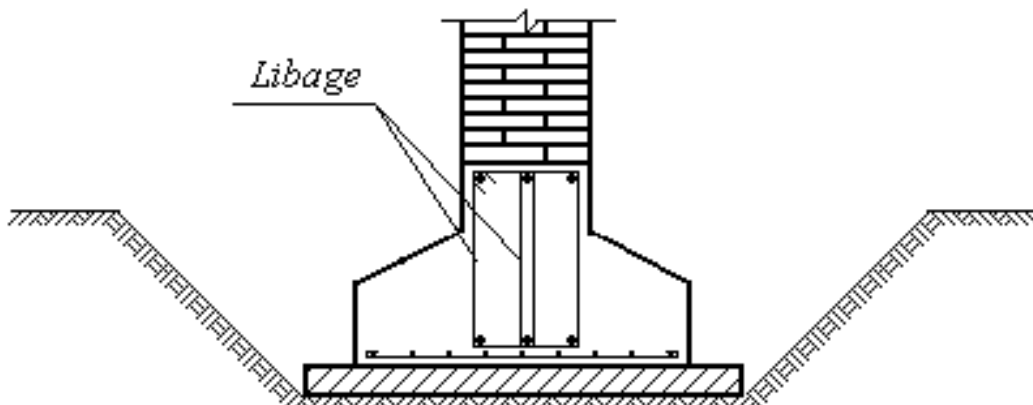


Fig. 9.3

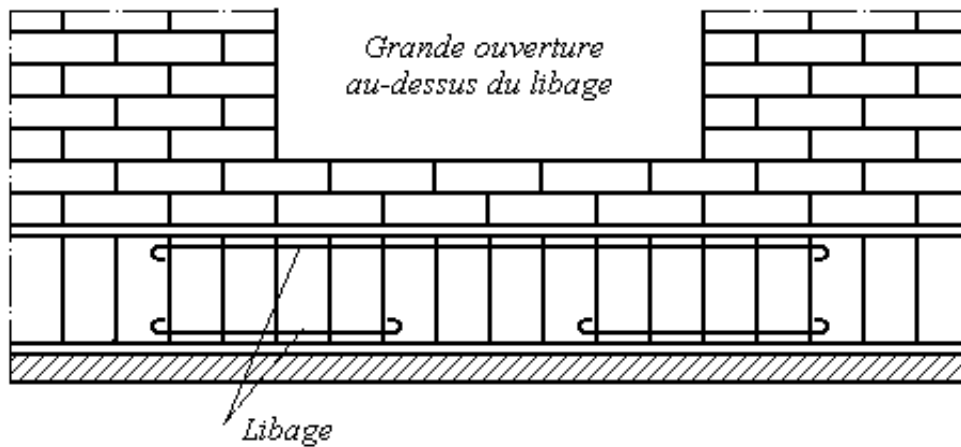


Fig. 9.4

S'il existe une grande ouverture au-dessus du libage, celui-ci va travailler, au droit de cette ouverture, comme une poutre chargée du bas vers le haut. On renforce alors les armatures du libage comme indiqué sur la figure (9.4).

Le diagramme de répartition des contraintes normales au contact sol-semelle dépend à la fois de la rigidité de la semelle et de la nature du sol. Dans les calculs courants, on peut admettre les répartitions suivantes :

sols rocheux :

- semelles rigides, diagramme bitriangulaire avec (fig. 9.5, a)

$$p = 2P/B;$$

- semelle flexible, diagramme rectangulaire avec (fig. 9.5, b)

$$p = P/B;$$

sols cohérents :

- semelle rigide, diagramme rectangulaire avec (fig. 9.5, b)

$$p = P/B;$$

- semelle flexible, diagramme triangulaire avec (fig. 9.5, c)

$$p = 2P/B.$$

Ici P , charge totale par mètre linéaire de mur ;

B , largeur de la semelle ;

p , pression maximale sous la semelle.

Les contraintes limites du sol, sous une fondation superficielle, doivent être prises dans les intervalles suivants :

- roches peu fissurées, saines, non désagrégées et de stratification favorable : 0,5 à 3,0 MPa ;

- terrains non cohérents, à bonne compacité : 0,25 à 0,5 MPa ;
- terrains non cohérents, à compacité moyenne : 0,05 à 0,25 MPa ;
- argiles : 0,02 à 0,2 MPa.

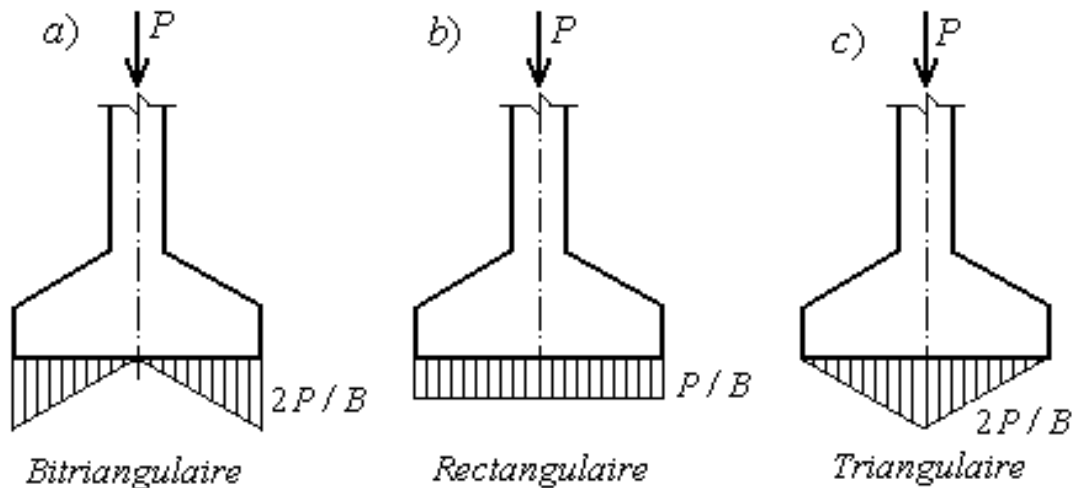


Fig. 9.5. Répartition des contraintes sous la semelle

9.2.2. Calcul des semelles flexibles sous murs

Le diagramme de répartition des contraintes normales au contact sol-semelle peut être soit rectangulaire (le plus souvent) soit triangulaire. La semelle flexible fonctionne par flexion en porte-à-faux le long des verticales de $c - c_1$ et $c' - c'_1$ (fig. 9.6).

Pour le cas de diagramme des contraintes rectangulaires sous la semelle, on peut calculer les moments de flexion " M_f " et les efforts tranchants " V " :

- sur la longueur $A c_1$: $M_f = p x^2 / 2$; $V = p x$;
- sur la longueur $c_1 O$:

$$M_f = (p x^2 / 2) - p' [x - (B - b) / 2]^2. \quad (9.3)$$

Les valeurs extrêmes sont (avec $p = P / B$ et $p' = P / b$) :

$$V_c = V_{\max} = [p(B - b)] / 2 = P[1 - (b / B)] / 2 ;$$

$$M_o = M_{\max} = (p B^2 / 8) - (p' b^2 / 8) = [P(B - b)] / 8. \quad (9.4)$$

Les armatures horizontales (principales) par mètre de longueur de la semelle sont calculées d'après le moment " M_{max} ". Si on prend le bras de couple des efforts interne $z_b = d$, on trouve :

$$A_s = \frac{M_{max}}{d \sigma_s} = \frac{P_u (B - b)}{8 d \sigma_s}.$$

L'effort tranchant maximal " V_{max} " conditionne la résistance au cisaillement, donc la vérification du béton et la détermination des étriers. Mais pour une semelle flexible, la composante verticale de la compression oblique du béton due à l'effort tranchant est très faible, c'est pourquoi il n'y a aucune vérification particulière à effectuer pour le poinçonnement ou la contrainte du béton.

Pour le cas de diagramme des contraintes triangulaires, sous la semelle (fig. 9.5, c), pour une même charge " P ", le calcul donne:

$$M_{max} = \frac{P[1 - (3b/2B)]}{12}; \quad V_{max} = \frac{P[1 - (b/B)]}{2}.$$

Donc l'effort tranchant maximal est du même ordre que dans le cas précédent, alors que le moment de flexion est réduit d'un tiers environ.

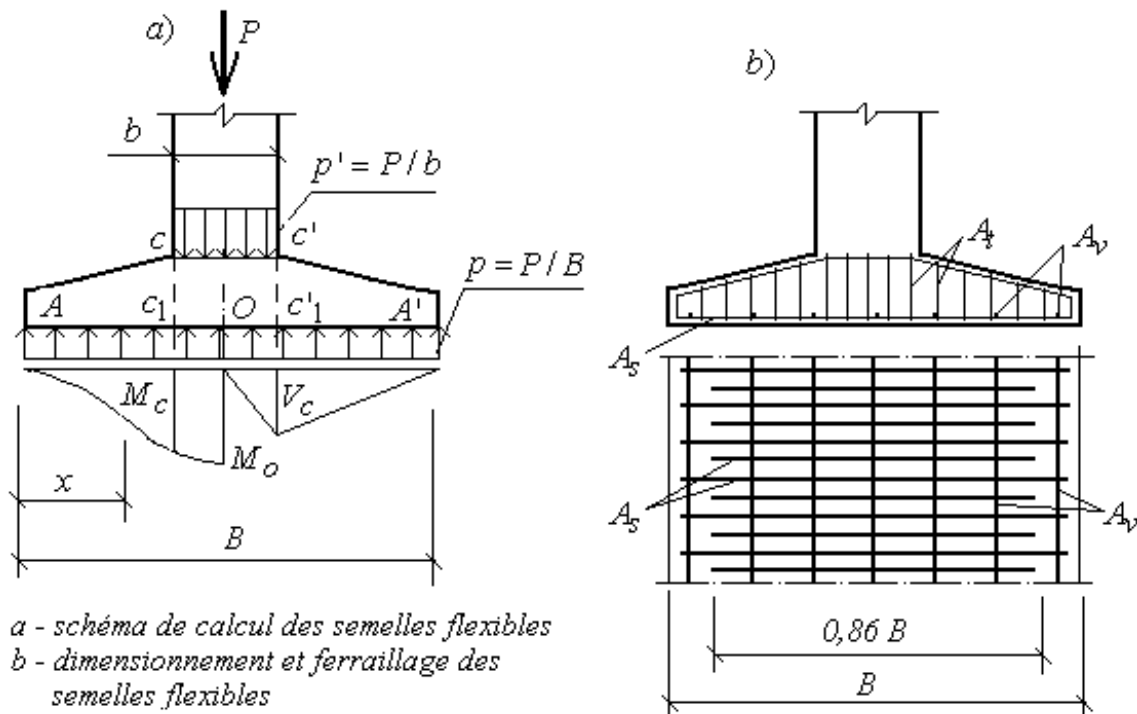


Fig.9.6

9.2.3. Calcul des semelles rigides sous murs

Les semelles sont considérées comme rigides si:

$$h \geq [(B - b)/4] + 0,05 \text{ m}, \quad \text{ou encore} \quad d \geq (B - b)/4.$$

Les contraintes sous une semelle rigide pleine ont une répartition rectangulaire (uniforme) pour tous les types de sol sauf pour le rocher et le béton de puits pour lesquels le diagramme est bitriangulaire. Lorsque la semelle est rigide, on ne peut plus considérer qu'elle travaille en flexion. Ainsi, pour ces semelles on utilise la méthode de bielles, mise au point à la suite d'essais, quand on considère la semelle comme une succession de bielles de béton travaillant en compression et transmettant aux aciers inférieurs des efforts de traction (fig. 9.7,a). On suppose que les bielles ont leur origine au point "A", intersection de la droite "CB" avec l'axe du mur.

La hauteur " h_o " peut être déterminée d'après les triangles semblables :

$$B/h_o = (B - b)/d, \quad \text{d'où on a :} \quad h_o = d B / (B - b).$$

On appelle :

σ^* est la contrainte limite admissible au sol ;

σ_{sol} , la contrainte effective appliquée.

La contrainte au sol est (pour une bande de largeur 1 m) :

$$\sigma_{sol} = P / (B \cdot 1 \text{ m}). \quad (9.5)$$

Sur un élément de semelle de largeur " dx " et de longueur unitaire (fig. 9.7, a), dont le centre de gravité " O " est situé à la distance " x " de l'axe du mur, le sol exerce une réaction élémentaire " dR ":

$$dR = \sigma_{sol} (1 \cdot dx) = P dx / B.$$

La valeur de " dR " peut être décomposée en une force de compression " dF_c " dirigée suivant l'axe "OA" de la bielle et une force de traction " dF " dirigée suivant les armatures.

D'après les triangles semblables on trouve :

$$dF / dR = x / h_o, \quad dF = (x \cdot dR) / h_o = (x \cdot dx \cdot P) / (B \cdot h_o).$$

Alors, pour l'effort de traction par unité de longueur de semelle on a :

$$F(x) = \int_0^{B/2} dF = P / B h_o \int_0^{B/2} x dx = \left[(B^2 / 4) - x^2 \right] (P / 2 B h_o).$$

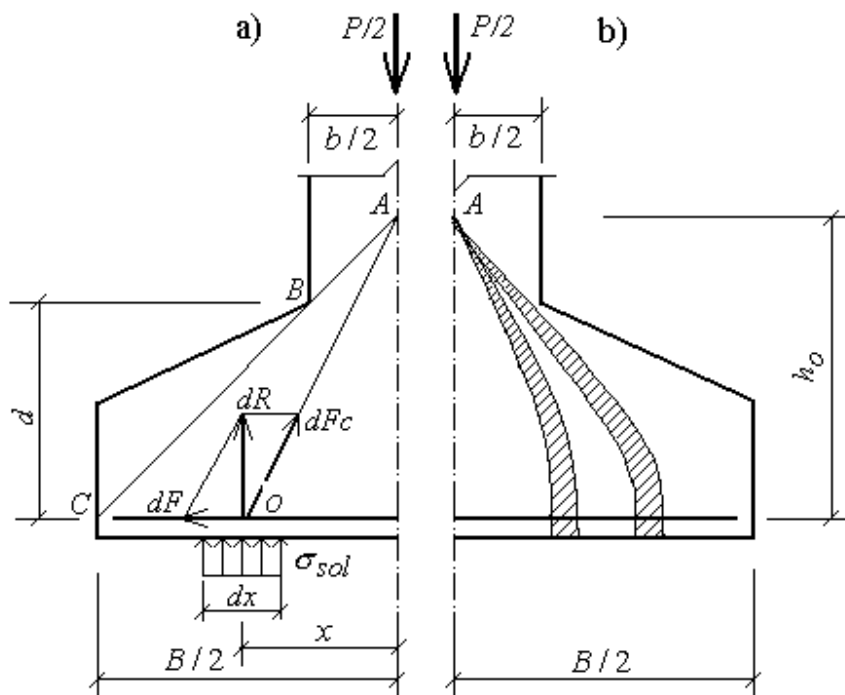


Fig.9.7

Pour $x = 0$ l'effort de traction maximal a pour valeur :

$$F = P B / 8 h_0. \quad (9.6)$$

Les triangles semblables ADC et BEC donnent :

$$\frac{DC}{AD} = \frac{EC}{BE}; \quad \frac{B}{2 h_0} = \frac{(B-b)}{2 d},$$

ou encore $B / h_0 = (B - b) / d$, alors on a $F = P (B - b) / 8 d$.

La section des armatures (la contrainte de traction de l'acier étant σ_s) par unité de longueur de semelle a donc pour valeur :

$$A_s = \frac{P_u (B - b)}{8 d \sigma_s}. \quad (9.7)$$

Les armatures principales seront complétées par des aciers longitudinaux de répartition dont la section totale sur la "B" sera :

$$A_r = A_s B / 4 \quad ("B" \text{ en mètres}) \quad (9.8)$$

(on dispose par mètre de largeur de semelle au moins 4 barres).

Pour déterminer la longueur des barres et leur mode d'ancrage, on calcule la longueur de scellement :

$$l_s = \emptyset f_e / 4 \tau_s, \text{ avec : } \tau_s = 0,6 (\psi_s)^2 f_{tj} \quad (\text{tableau 1.2}).$$

Si $B / 4 < l_s$, toutes les barres doivent être prolongées jusqu'aux extrémités de la semelle et comporter des ancrages courbes.

Si $B / 8 < l_s \leq B / 4$, toutes les barres doivent être prolongées jusqu'aux extrémités de la semelle, mais peuvent ne pas comporter de crochet.

Si $l_s \leq B / 8$, les barres ne comportent pas de crochet et on peut arrêter une barre sur deux à $(0,71B)$ ou alterner des barres de $(0,86B)$, figure 9.6, b.

Lorsqu'on utilise la méthode des bielles pour le calcul des semelles continues sous murs, il n'y a aucune vérification à effectuer pour le poinçonnement ou la contrainte du béton dans les bielles, en outre, il n'y a pas lieu de prévoir d'armatures transversales pour équilibrer l'effort tranchant.

Les formules précédentes (9.3, 9.4, 9.6, 9.7) ne tiennent pas compte de la butée des terres sur les faces obliques de la semelle (qui peut être négligée), ni des forces de frottement, à la base de la semelle, sur le sol, le béton de propreté ou le béton de puits. La partie inférieure de la semelle tend à s'allonger sur son appui, ce qui entraîne l'apparition de forces de frottement, donc, la diminution de l'effort de traction dû au moment de flexion. Alors on a :

$$F = F_o - P f / 2 = [P(B-b) / 8d] - P f / 2. \quad (9.9)$$

Le coefficient "f" (coefficient de frottement) peut prendre des valeurs élevées en particulier lorsque la semelle repose sur un massif de gros béton $f = 0,5$, alors on obtient $F \approx F_o / 2$. En fait, il faut que le massif sous-jacent puisse être capable d'absorber cet effort de traction sans se fissurer. Par prudence, il est donc conseillé de négliger les forces de frottement sur un massif de gros béton, mais sur les sols très frottants (sables, graviers) et avec des semelles enterrées (cas général) il est possible d'obtenir une réduction du ferrailage.

On conçoit à l'inverse que certains sols puissent fluer vers l'extérieur de la semelle (argiles et marnes dans certaines conditions de consolidation) et qu'il y ait alors augmentation des forces de traction par entraînement de la semelle par frottement (frottement inversé). Il convient donc d'être très prudent sur ce type de sol.

Exemple 9.1. Déterminer les dimensions et les armatures d'une semelle de fondation située sous un mur de 0,3 m d'épaisseur. Les charges transmises par le mur (valeurs caractéristiques) sont :

- permanente $G = 150 \text{ kN/m}$;
- d'exploitation $Q_B = 200 \text{ kN/m}$.

La contrainte limite admissible au sol $\sigma^* = 0,25 \text{ MPa}$.
Les armatures sont en acier $Fe E 400$. Le béton a la résistance caractéristique : $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$.

Solution. 1) Pour déterminer les dimensions de la semelle (dimensionnement de la surface au sol), on prend en considération des charges de service et le poids propre de la semelle et du sol. La profondeur de la fondation $H = 1 \text{ m}$, le poids apparent moyen du sol et de la fondation est pris approximativement $\rho_m = 20 \text{ kN/m}^3$. Pour la bande de longueur 1 m et de largeur "B" la charge totale agissant au niveau de la semelle de la fondation est égale à :

$$P_{ser} + B \rho_m H = G + Q_B + B \rho_m H$$

Alors la condition de la portance suffisante du sol peut s'écrire :

$$G + Q_B + B \rho_m H \leq \sigma^* B, \quad \text{d'où on trouve :}$$

$$B \geq \frac{G + Q_B}{\sigma^* - \rho_m H} = \frac{150 + 200}{400 - 20 \cdot 1} = 0,92 \text{ m}.$$

On prend $B = 1,0 \text{ m}$.

Pour une semelle rigide la hauteur "h" est prise d'après la condition (9.1) :

$$h \geq [(B-b)/4] + 0,05 \text{ m} = [(1,0-0,3)/4] + 0,05 = 0,23 \text{ m}.$$

On prend $h = 0,25 \text{ m}$, alors la hauteur utile de la semelle sera:

$$d = h - c = 0,25 - 0,05 = 0,20 \text{ m} \quad (\text{avec } c = 5 \text{ cm}).$$

2) La section de l'armature principale (disposée perpendiculairement au mur) est calculée pour état-limite ultime, c'est-à-dire d'après les charges de calcul :

$$P_u = 1,35G + 1,5Q_B = 1,35 \cdot 150 + 1,5 \cdot 200 = 502,5 \text{ kN/m}.$$

La résistance de calcul de l'armature de nuance $Fe E 400$ est :

$$\sigma_s = f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa}.$$

Alors, la section exigée de l'armature sera (formule 9.7) :

$$A_s = \frac{P_u (B-b)}{8 d \sigma_s} = \frac{502,5 \cdot 10^3 (1000 - 300)}{8 \cdot 200 \cdot 348} = 631,7 \text{ mm}^2.$$

3) La section de l'armature doit être également calculée pour l'état-limite de service. La fissuration de la semelle est considérée comme préjudiciable. Alors la contrainte de l'armature est limitée à :

$$\sigma_s \leq 2 f_e / 3 = 2 \cdot 400 / 3 = 267 \text{ MPa} ;$$

$$\sigma_s \leq \max(0,5 f_e = 200 \text{ MPa} ; 110 \sqrt{\eta f_{t28}} = 187 \text{ MPa}).$$

(Ici $\eta = 1,6$ pour des armatures à haute adhérence, $f_{t28} = 1,8 \text{ MPa}$, la résistance caractéristique du béton à la traction, tableau 1.1).

Donc on prend $\sigma_s = 200 \text{ MPa}$.

Pour état-limite de service les charges sont :

$$P_{ser} = G + Q_B = 150 + 200 = 350 \text{ kN/m}.$$

La section de l'armature exigée pour état-limite de service sera égale à :

$$A_s = \frac{P_{ser} (B-b)}{8 d \sigma_s} = \frac{350 \cdot 10^3 (1000 - 300)}{8 \cdot 200 \cdot 200} = 765,6 \text{ mm}^2.$$

Donc, l'armature déterminée pour l'état-limite ultime n'est pas suffisante. Alors on prend pour le ferrailage de la semelle l'armature d'après le calcul pour l'état-limite de service : $10 \text{ } \varnothing 10$ pour un mètre de longueur de la semelle avec $A_s = 875 \text{ mm}^2$. L'espacement des barres principales est $1000 / 10 = 100 \text{ mm}$.

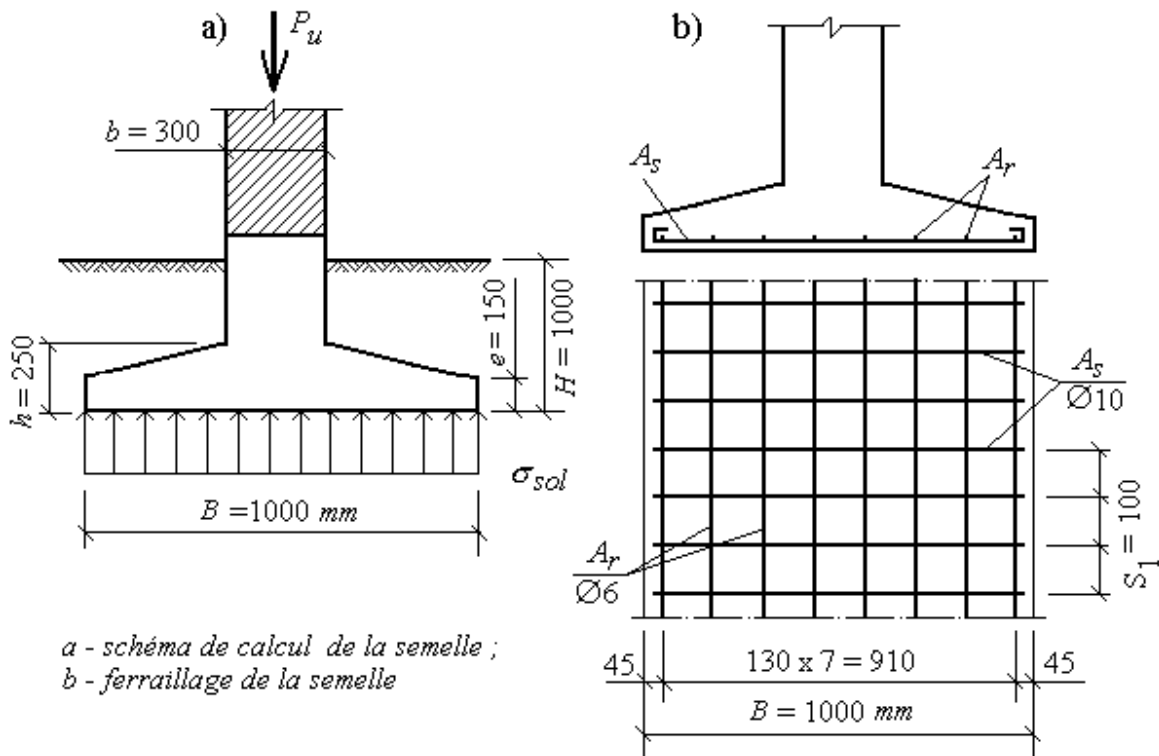


Fig.9.8

L'épaisseur de la semelle au bord libre est prise d'après les conditions :

$$e \geq 6 \varnothing + 6 \text{ cm} = 6 \cdot 1,0 + 6 = 12,0 \text{ cm} ; \quad e \geq 15 \text{ cm},$$

on prend $e = 15 \text{ cm}$.

4) *La longueur de scellement* des barres principales est calculée d'après la formule : $l_s = \varnothing f_e / 4 \tau_s$ avec :

$$\tau_s = 0,6 (\psi_s)^2 f_{t28} = 0,6 \cdot 1,5^2 \cdot 1,8 = 2,43 \text{ MPa}.$$

Dans cette formule $\psi_s = 1,5$ pour les armatures à haute adhérence.

$$l_s = 10 \times 400 / (4 \times 2,43) = 411 \text{ mm} = 41,1 \text{ cm}.$$

Comme $B / 4 = 100 / 4 = 25 \text{ cm} < l_s = 41,1 \text{ cm}$, toutes les barres doivent être prolongées jusqu'aux extrémités de la semelle et comporter des ancrages courbes.

5) *Pour les armatures de répartition* on prend (d'après la formule 9.8) :

$$A_r = A_s B / 4 = 785 \times 1 / 4 = 196,2 \text{ mm}^2.$$

On prend $8 \varnothing 6$ pour une largeur $B = 1 \text{ m}$, alors l'espacement des barres est

$$S = (B - 2 \times 4,5) / 7 = (100 - 9) / 7 = 13 \text{ cm}.$$

9.3. Semelles continues sous poteaux

Ces semelles peuvent être plus ou moins rigides, pleines ou évidées. Elles sont surmontées par une poutre de rigidité qui répartit les efforts concentrés transmis par les poteaux. La poutre peut être de hauteur constante (fig. 9.9,a) ou munie de goussets (fig. 9.9,b). Cette seconde disposition est plus rationnelle puisque les moments de flexion maximaux se produisent sous les poteaux (où la hauteur "d" est la plus grande), mais le plus souvent on préfère la première solution, plus coûteuse en matériau, mais plus simple dans son exécution (coffrage et ferrailage) donc plus économique en main-d'œuvre.

Le problème principal de ce genre d'ouvrage est de déterminer la répartition de la réaction du sol sous la semelle.

Dans la direction transversale de la semelle les résultats précédents concernant la semelle continue sous murs restent valables, il faut uniquement considérer que l'effort vertical intéressant une tranche de semelle varie d'une tranche à l'autre selon le schéma qui a été choisi (fig. 9.10).

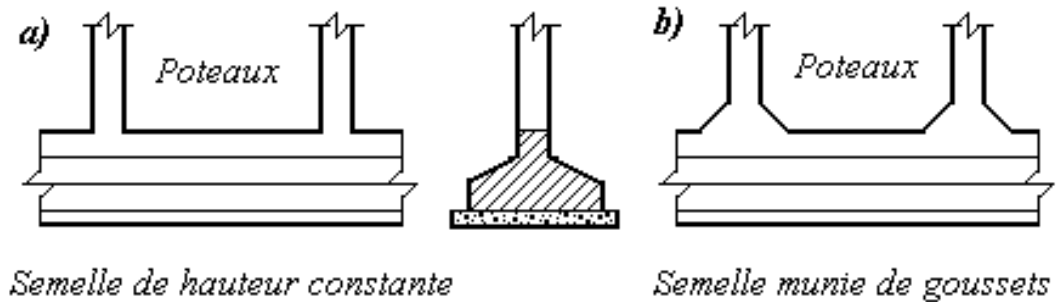


Fig. 9.9

Dans la direction longitudinale de la semelle la répartition des contraintes dépend de la rigidité longitudinale de la fondation, de la distance entre les poteaux et de la nature du sol. Cette répartition doit être telle que la déformation de la fondation et celle du sol coïncident sous l'action de l'ensemble des efforts. Dans le cas général ce problème ne peut se résoudre que par approximations successives.

Dans la pratique, à défaut de calcul plus précis, on admet les schémas suivants de répartition des contraintes du sol :

- *rectangulaire* (fig. 9.10, a), cette répartition est proche de la réalité lorsque les poteaux sont rapprochés, la fondation possède une grande rigidité et le sol est de mauvaise qualité ;

- *triangulaire* (fig. 9.10, b), cette répartition est proche de la réalité lorsque la semelle est flexible, les poteaux sont très écartés et le sol possède un grand frottement interne (la même peut être adoptée pour les semelles rigides).

Après avoir établi la répartition des contraintes, on fait le calcul statique de la semelle comme une poutre continue soumise à des charges (réaction du sol) distribuées suivant le diagramme rectangulaire (avec $p = P/B$) ou triangulaire (avec $p = 2P/B$).

Ainsi, pour une semelle sous deux poteaux également chargés par des charges verticales "P" (la semelle avec porte-à-faux de portée l' et l'écartement des poteaux l) et si cette semelle est considérée comme rigide, on peut admettre la répartition rectangulaire des contraintes sous la semelle (fig. 9.11, a). La pression sur le sol sera :

$$p = \frac{2P}{B(l + 2l')} ; \quad p_1 = p \cdot B = \frac{2P}{(l + 2l')} .$$

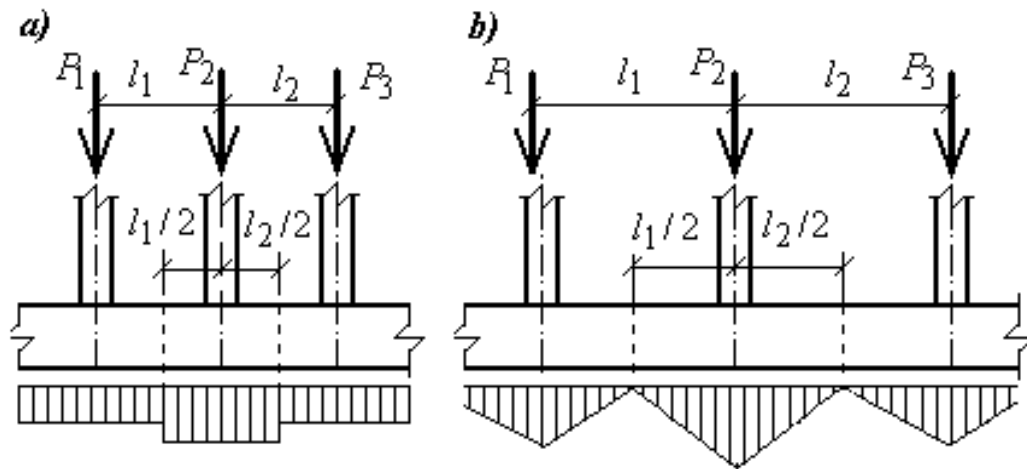


Fig. 9.10

(La valeur de p est en kN/m^2 , p_1 - en kN/m . Si le poids propre de la semelle n'est pas négligeable, il doit être compris dans $2P$).

Les moments de flexion seront :

$$M_A = -\frac{p_1(l')^2}{2} ; \quad M_B = \frac{p_1 \left[(l^2/4) - (l')^2 \right]}{2} . \quad (9.10)$$

Si $l' > l/2$, tous les moments sont de même signe (négatifs).

Les efforts tranchants sur l'appui "A" de gauche et de droite sont:

$$V_{Ag} = p_1 l' ; \quad V_{Ad} = p_1 l/2 .$$

Si la semelle est considérée comme flexible, on peut admettre la répartition triangulaire des contraintes sous la semelle (fig. 9.11,b). La pression sur le sol sera alors : $p_2 = 4P/(l + 2l')$.

Les moments de flexion et les efforts tranchants seront respectivement :

$$M_A = -\frac{p_2(l')^2}{6} ; \quad M_B = \frac{p_2 \left[(l^2/4) - (l')^2 \right]}{6} . \quad (9.11)$$

$$V_{Ag} = p_2 l'/2 ; \quad V_{Ad} = p_2 l/4 ;$$

Donc, les moments de flexion en "A" et "B" (M_A et M_B) sont égaux aux $2/3$ de ceux du cas précédent. Les efforts tranchants sont les mêmes.

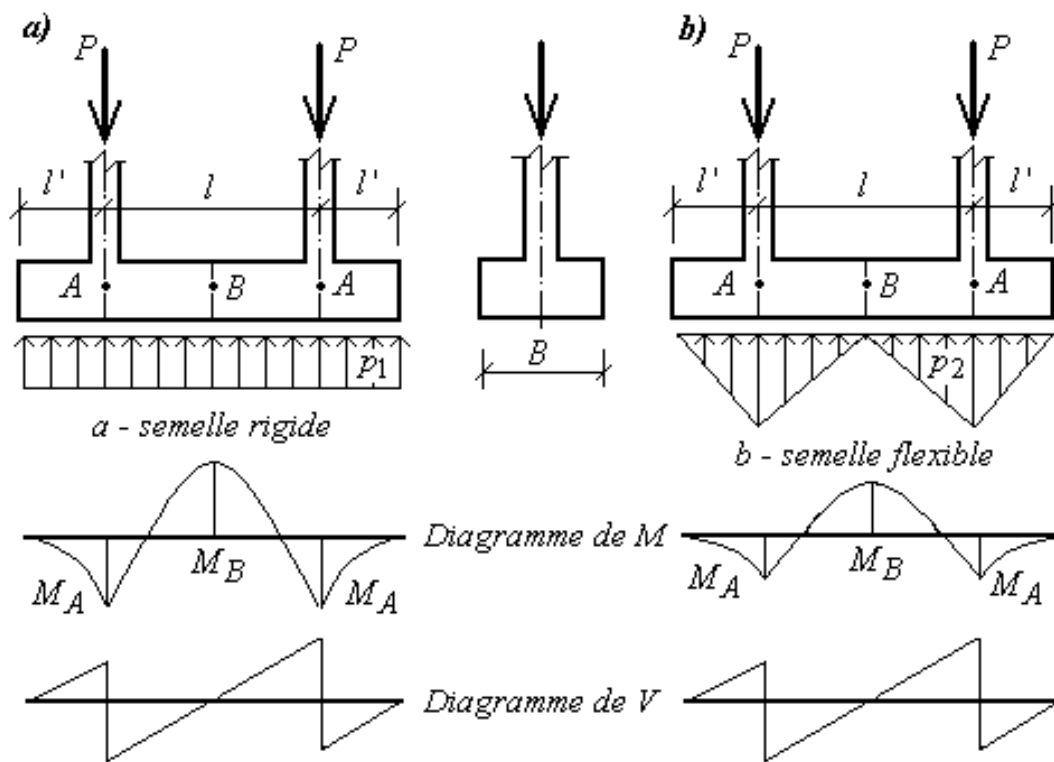


Fig. 9.11

9.4. Semelles sous poteaux soumis à un effort normal centré

9.4.1. Semelles rectangulaires sous poteaux rectangulaires

Une semelle rectangulaire sous poteau rectangulaire constitue un tronc de pyramide (fig. 9.12). On désigne :

P , charge à transmettre au sol ;

A et B , dimensions de la semelle à sa base ;

a et b , dimensions du poteau ;

σ^* , contrainte limite admissible au sol.

Dans le cas général, on choisit les dimensions de la semelle d'après la condition :

$$A \cdot B \geq P_{ser} / \sigma^*, \quad \text{d'où on a :}$$

$$B \geq \sqrt{b P_{ser} / a \sigma^*}, \quad \text{ou encore} \quad A \geq \sqrt{a P_{ser} / b \sigma^*}. \quad (9.12)$$

Les autres dimensions doivent respecter les conditions suivantes

$$A - a \geq d_b \text{ (ou } d_a) \geq (B - b) / 4,$$

$$e \geq 6 \varnothing + 6 \text{ cm}; \quad e \geq 15 \text{ cm},$$

(\varnothing est le diamètre des barres en centimètres).

Comme dans le cas de la semelle continue sous murs, on utilise la méthode des bielles. On détermine l'origine des bielles pour chaque direction d'après les conditions :

- pour les armatures parallèles au côté B :

$$B / h_b = (B - b) / d_b;$$

- pour les armatures parallèles au côté A :

$$A / h_a = (A - a) / d_a;$$

Comme $d_a \approx d_b$ et $a / A = b / B$, on pose que $h_a \approx h_b = h$.

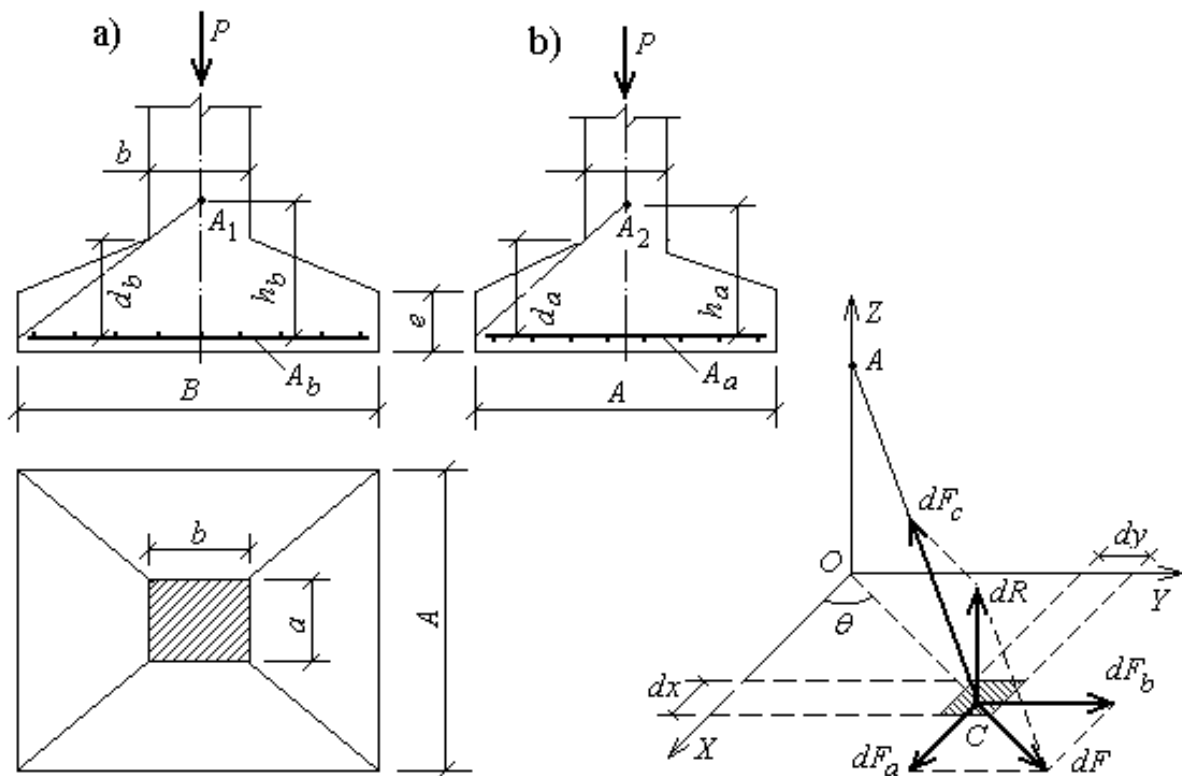


Fig. 9.12

- a - schéma de calcul des semelles rectangulaires sous poteau rectangulaire soumis à un effort normal centré;
 b - schéma de décomposition de réaction du sol pour le calcul d'après la méthode des bielles

Donc on admet que les bielles ont la même origine dans les deux directions : $A_1 = A_2 = A$.

Sur la figure 9.12, b , on a rapporté la semelle à trois axes rectangulaires ayant pour origine "O", centre de la semelle, et tels que OZ soit porté par l'axe du pilier, OX soit parallèle au côté A et OY au côté B . Le plan XOY étant confondu avec le plan moyen des armatures.

On porte sur OZ le point A (origine commune des bielles). En supposant que la répartition des contraintes sous la semelle est uniforme, on détermine la réaction du sol dR , exerçant sur un élément de semelle de dimensions dx et dy :

$$\sigma_{sol} = P / AB; \quad dR = P dx dy / AB.$$

La valeur de dR peut être décomposée en une force de compression dF_c portée par CA , axe de la bielle et une force de traction dF portée par OC . Les triangles semblables donnent :

$$dF / dR = OC / OA, \\ dF = (dR \cdot OC) / OA = (P / AB) \cdot (OC / OA) dx dy,$$

ou encore (avec $OA = h$): $dF = (P / AB) \cdot (OC / h) dx dy.$

Les composants dF_a et dF_b , parallèlement aux axes OX et OY sont :

$$dF_a = dF \cos \theta = (P / AB) \cdot (X / h) dx dy; \\ dF_b = dF \sin \theta = (P / AB) \cdot (Y / h) dx dy;$$

Alors les valeurs des efforts de traction F_a et F_b seront :

$$F_a = \frac{P}{AB \cdot h} \int_{-B/2}^{B/2} dy \cdot \int_0^{A/2} X dx = \frac{P \cdot A}{8 h} = \frac{P(A-a)}{8 d_a}; \quad (9.13)$$

$$F_b = \frac{P}{AB \cdot h} \int_{-A/2}^{A/2} dx \cdot \int_0^{B/2} Y dy = \frac{P \cdot B}{8 h} = \frac{P(B-b)}{8 d_b}, \quad (9.14)$$

avec $A / h = (A - a) / d_a; \quad B / h = (B - b) / d_b.$

Les sections d'armature sont donc A_a parallèlement au côté A et A_b parallèlement au côté B (avec $P = P_u$) :

$$A_a = \frac{P_u (A - a)}{8 d_a \sigma_s} ; \quad A_b = \frac{P_u (B - b)}{8 d_b \sigma_s} . \quad (9.15)$$

Les armatures sont réparties uniformément selon les deux directions. Les armatures parallèles au grand côté constituent toujours le lit inférieur. Ces armatures s'étendent, dans chaque direction, jusqu'aux extrémités de la semelle et sont ou non munies de crochets, en fonction des règles déjà énoncées, en comparant les longueurs de scellement $l_{s(a)}$ et $l_{s(b)}$ à des longueurs A et B .

Dans le cas de semelle sur sol donnant lieu à des contraintes de calcul du sol élevées, on doit justifier le comportement de la semelle au poinçonnement. La condition de non-poinçonnement s'écrit, comme pour les dalles (voir paragraphe 5.2.4) :

$$P_u' \leq 0,045 u_c h f_{bc} . \quad (9.16)$$

Avec :

h , épaisseur de la semelle dans la section au nu du poteau ;

u_c , périmètre de la surface d'impact au niveau du feuillet moyen de la

semelle: $u_c = 2 (a_1 + b_1) = 2 [(a + h) + (b + h)] ;$

$$a_1 = a + h, \quad b_1 = b + h ;$$

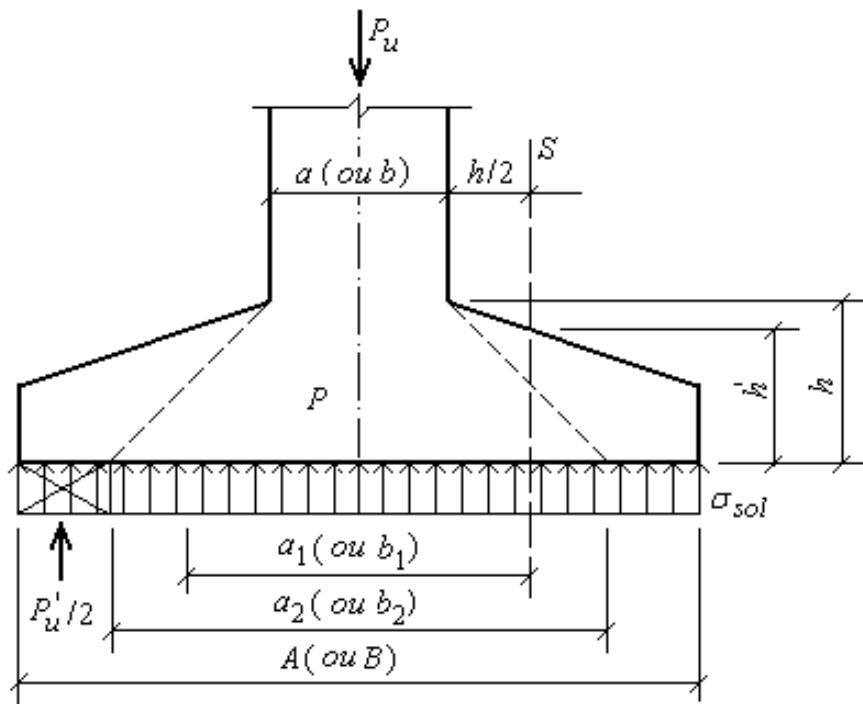


Fig. 9.13

P_u' , charge définie comme suit :

$$\begin{aligned} P_u &= P_u' + \sigma_{sol} a_2 b_2; \\ \sigma_{sol} &= (P_u + 1,35 G_o) / (A \cdot B); \\ P_u' &= P_u - [P_u + 1,35 G_o] \cdot (a_2 \cdot b_2) / (A \cdot B); \\ a_2 &= a + 2h; \quad b_2 = b + 2h; \end{aligned} \quad (9.17)$$

G_o , poids propre de la semelle et des terres qui la surmontent.

On note que dans le cas général, lorsqu'on utilise la méthode des bielles (pour les semelles rigides), il n'est pas nécessaire de vérifier le comportement de la semelle au poinçonnement, vu que ce comportement est presque toujours assuré.

Exemple 9.2.

Soit à déterminer la semelle de fondation d'un poteau rectangulaire de $a \times b = 30 \times 40 \text{ cm}$. Les valeurs caractéristiques des charges transmises au sol sont

- charge permanente $G = 200 \text{ kN}$;
- charge d'exploitation $Q_B = 300 \text{ kN}$.

La contrainte limite admissible au sol $\sigma^* = 0,5 \text{ MPa}$. L'armature est en acier $Fe E 400$, le béton a la résistance caractéristique $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$.

La fissuration est considérée comme préjudiciable.

Solution. 1) Les dimensions de la semelle sont déterminées d'après les charges de service P_{ser} et la contrainte admissible au sol $\sigma^* = 0,5 \text{ MPa}$.

$$P_{ser} = G + Q_B = 200 + 300 = 500 \text{ kN}.$$

Alors, les formules (9.12) donnent :

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{b P_{ser}}{a \sigma^*}} = \sqrt{\frac{400 \cdot 500 \cdot 10^3}{300 \cdot 0,5}} = 1155 \text{ mm}; \\ A &= \sqrt{\frac{a P_{ser}}{b \sigma^*}} = \sqrt{\frac{300 \cdot 500 \cdot 10^3}{400 \cdot 0,5}} = 866 \text{ mm}; \end{aligned}$$

On prend les dimensions $A \times B = 0,9 \times 1,2 = 1,08 \text{ m}^2$. Le rapport des dimensions $B/A = 1,2 / 0,9 = 1,33$ coïncide avec le rapport des dimensions du poteau : $b/a = 0,4 / 0,3 = 1,33$.

Les dimensions de la semelle "A" et "B" peuvent être précisées en prenant en compte le poids propre de la semelle et des terres qui la surmontent, d'après la condition : $\sigma_{sol} = (P_{ser} + G_o) / (A \cdot B) \leq \sigma^*$, avec

G_o , poids propre de la semelle et des terres qui la surmontent.

Dans le cas considéré la profondeur de la fondation est prise égale à $H = 0,8 \text{ m}$ et le poids volumique moyen du béton de la fondation et des terres $\rho_m = 20 \text{ kN/m}^3$.

Alors, on trouve : $G_o = H \cdot A \cdot B \cdot \rho_m = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 1,2 \cdot 20 = 17,28 \text{ kN}$.

La contrainte effective appliquée au sol sera égale à :

$$\sigma_{sol} = (500 + 17,28) 10^3 / (900 \times 1200) = 0,48 \text{ MPa} ;$$

Vu que $\sigma_{sol} = 0,48 \text{ MPa} < \sigma^* = 0,5 \text{ MPa}$, les dimensions sont suffisantes.

Les autres dimensions de la semelle sont prises d'après les conditions :

$$d_b \geq (B - b) / 4 = (1200 - 400) / 4 = 200 \text{ mm} ;$$

$$d_a \geq (A - a) / 4 = (900 - 300) / 4 = 150 \text{ mm} ;$$

$$h \geq [(B - b) / 4] + 50 \text{ mm} = [(1200 - 400) / 4] + 50 = 250 \text{ mm}.$$

On prend $h = 300 \text{ mm}$, $d_b = 250 \text{ mm}$, $d_a = 240 \text{ mm}$ (vu que l'armature parallèle au grand côté constitue le lit inférieur, on a pris que $d_b > d_a$. Cette différence dépend du diamètre des barres utilisées).

La hauteur de la fondation "h" doit être telle que la condition de non-poinçonnement (9.16) soit vérifiée. Pour le cas considéré on trouve:

$$a_1 = a + h = 30 + 30 = 60 \text{ cm} ;$$

$$b_1 = b + h = 40 + 30 = 70 \text{ cm} ;$$

$$a_2 = a + 2h = 30 + 2 \times 30 = 90 \text{ cm} ;$$

$$b_2 = b + 2h = 40 + 2 \times 30 = 100 \text{ cm} .$$

$$P_u = 1,35 G + 1,5 Q_B = 1,35 \times 200 + 1,5 \times 300 = 720 \text{ kN}.$$

$$P_u' = P_u - (P_u + 1,35 G_o) [(a_2 \cdot b_2) / (A \cdot B)] = \\ = 720 - (720 + 1,35 \times 17,28) [(0,9 \times 1,0) / (0,9 \times 1,2)] = 100,56 \text{ kN}.$$

Vu que $a_2 = A$ (fig. 9.14, b), le poinçonnement aura lieu suivant les surfaces avec les côtés supérieur et inférieur a et a_2 . Le périmètre de la surface de poinçonnement est égal à :

$$u_c = 2 a_1 = 2 \times 60 = 120 \text{ cm} ;$$

L'épaisseur de la semelle dans la section du nu du poteau $h = 30 \text{ cm}$.

La résistance de calcul du béton

$$f_{bc} = 0,85 f_{c28} / \gamma_b = 0,85 \times 20 / 1,5 = 11,3 \text{ MPa}.$$

Alors on vérifie la condition de non-poinçonnement :

$$P_u' \leq 0,045 \cdot u_c \cdot h \cdot f_{bc} ,$$

$$0,045 \cdot u_c \cdot h \cdot f_{bc} = 0,045 \cdot 1200 \cdot 300 \cdot 11,3 = 183060 \text{ N} .$$

On a que : $P_u' = 100,56 \text{ kN} < 0,045 u_c h f_{bc} = 183,06 \text{ kN}$.

La condition est assurée, donc, l'épaisseur de la semelle est suffisante.

2) *Calcul des armatures pour l'état-limite ultime.* La résistance de calcul des armatures $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa}$. Les charges de calcul sont :

$$P_u = 1,35 G + 1,5 Q_B = 1,35 \times 200 + 1,5 \times 300 = 720 \text{ kN}.$$

La section des armatures est calculée à l'aide des formules (9.15) :

$$A_a = \frac{P_u (A - a)}{8 d_a \sigma_s} = \frac{720 \cdot 10^3 (900 - 300)}{8 \cdot 240 \cdot 348} = 646,5 \text{ mm}^2;$$

$$A_b = \frac{P_u (B - b)}{8 d_b \sigma_s} = \frac{720 \cdot 10^3 (1200 - 400)}{8 \cdot 250 \cdot 348} = 827,6 \text{ mm}^2;$$

3) *Calcul des armatures pour l'état-limite de service.* La fissuration est considérée comme préjudiciable, alors la contrainte de l'armature est limitée par $\sigma_s = 200 \text{ MPa}$ (voir l'exemple 9.1 et le tableau 2.1). Alors on trouve :

$$A_a = \frac{P_{ser} (A - a)}{8 d_a \sigma_s} = \frac{500 \cdot 10^3 (900 - 300)}{8 \cdot 240 \cdot 200} = 781,2 \text{ mm}^2;$$

$$A_b = \frac{P_{ser} (B - b)}{8 d_b \sigma_s} = \frac{500 \cdot 10^3 (1200 - 400)}{8 \cdot 250 \cdot 200} = 1000 \text{ mm}^2.$$

Donc, l'armature déterminée pour l'état-limite ultime n'est pas suffisante, alors on doit prendre l'armature correspondante au calcul pour l'état-limite de service. Pour le ferrailage on prend (fig. 9.14, a) :

$$10 \varnothing 10 \text{ avec } A_{a,r\acute{e}el} = 785 \text{ mm}^2, \quad 7 \varnothing 14 \text{ avec } A_{b,r\acute{e}el} = 1077 \text{ mm}^2.$$

L'épaisseur de la semelle au bord libre est prise d'après la condition:

$$e \geq 6 \varnothing + 6 \text{ cm} = 6 \cdot 1,4 + 6 = 14,4 \text{ cm}, \text{ soit } e = 15 \text{ cm}.$$

Pour les barres $\varnothing 14 \text{ mm}$ et $\varnothing 10 \text{ mm}$ avec $\tau_s = 2,43 \text{ MPa}$ (tableau 1.2) la longueur de scellement est égale à :

$$l_s(b) = \frac{\varnothing f_e}{4 \tau_s} = \frac{14 \cdot 400}{4 \cdot 2,43} = 576 \text{ mm}; \quad l_s(a) = \frac{\varnothing f_e}{4 \tau_s} = \frac{10 \cdot 400}{4 \cdot 2,43} = 411 \text{ mm}.$$

Comme $l_s = 57,6 \text{ cm} > B / 4 = 120 / 4 = 30 \text{ cm}$,

et $l_s = 41,1 \text{ cm} > A / 4 = 90 / 4 = 22,5 \text{ cm}$,

toutes les barres doivent être prolongées jusqu'aux extrémités de la semelle et comportées des ancrages courbes.

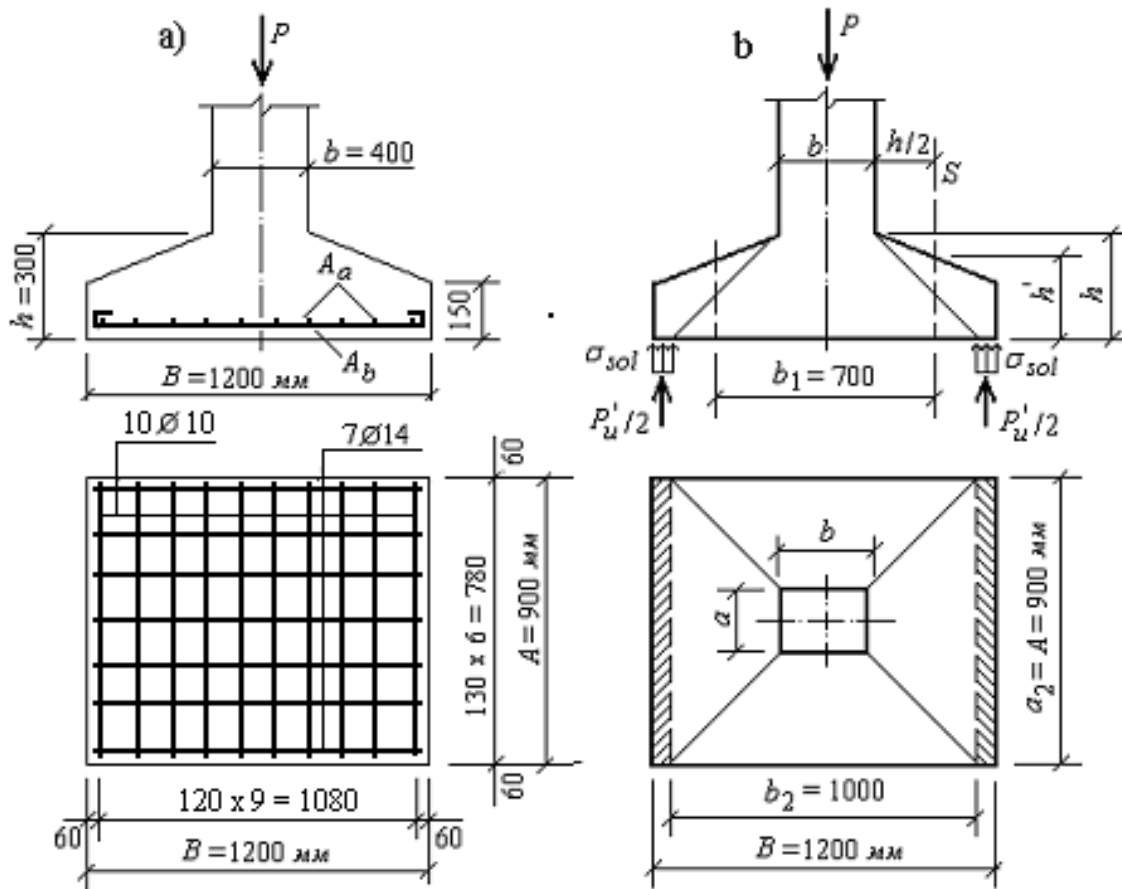


Fig. 9.14

9.4.2. Semelles circulaires sous poteaux circulaires

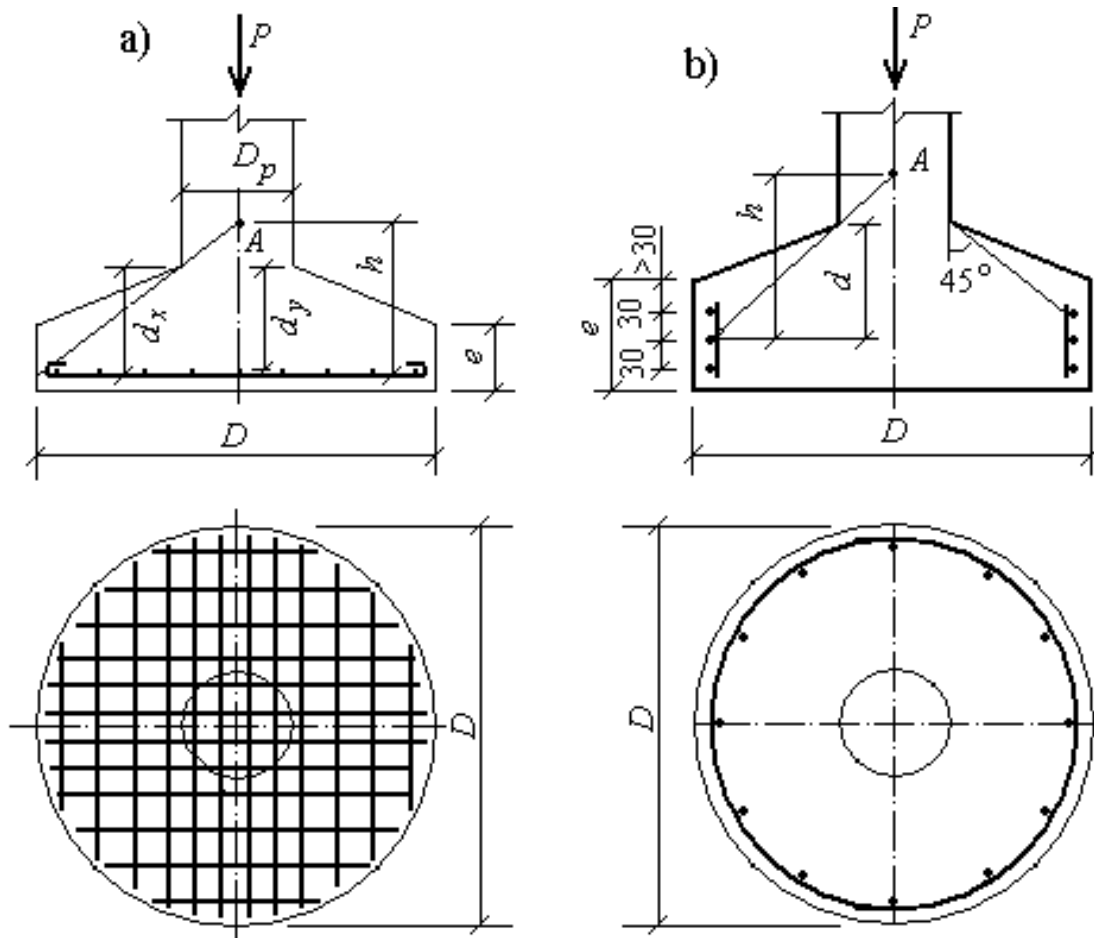
Une semelle circulaire sous poteau circulaire constitue un tronc de cône et peut être armée par un quadrillage de deux nappes orthogonales ou par des cercles et des barres verticales.

Avec des notations indiquées sur la figure 9.15, on doit avoir :

$$(\pi D^2 / 4) \sigma_{sol} = P. \quad (9.18)$$

Il faut que $\sigma_{sol} \leq \sigma^*$ (sous l'action de la charge P_{ser}), alors :

$$D \geq 1,13 \sqrt{P_{ser} / \sigma^*} \quad \text{et} \quad d_x \text{ (ou } d_y) \geq (D - D_p) / 4.$$



a - ferrailage de la semelle par des barres orthogonales

b - ferrailage de la semelle par des cerces

Fig. 9.15

1) Lorsque la semelle est armée par deux nappes orthogonales (fig. 9.15, a), on doit avoir : $e \geq 6\varnothing + 6\text{ cm}$ (\varnothing en centimètre).

L'origine "A" des bielles se détermine comme dans le cas des semelles rectangulaires sous poteaux rectangulaires, et comme dans ce cas, on peut admettre que l'origine "A" est la même pour les deux nappes d'armatures orthogonales. D'après le schéma de calcul (fig.9.16,a) on trouve :

$$dR = \sigma_{sol} r dr d\theta, \text{ comme } \sigma_{sol} = 4 P_u / \pi D^2,$$

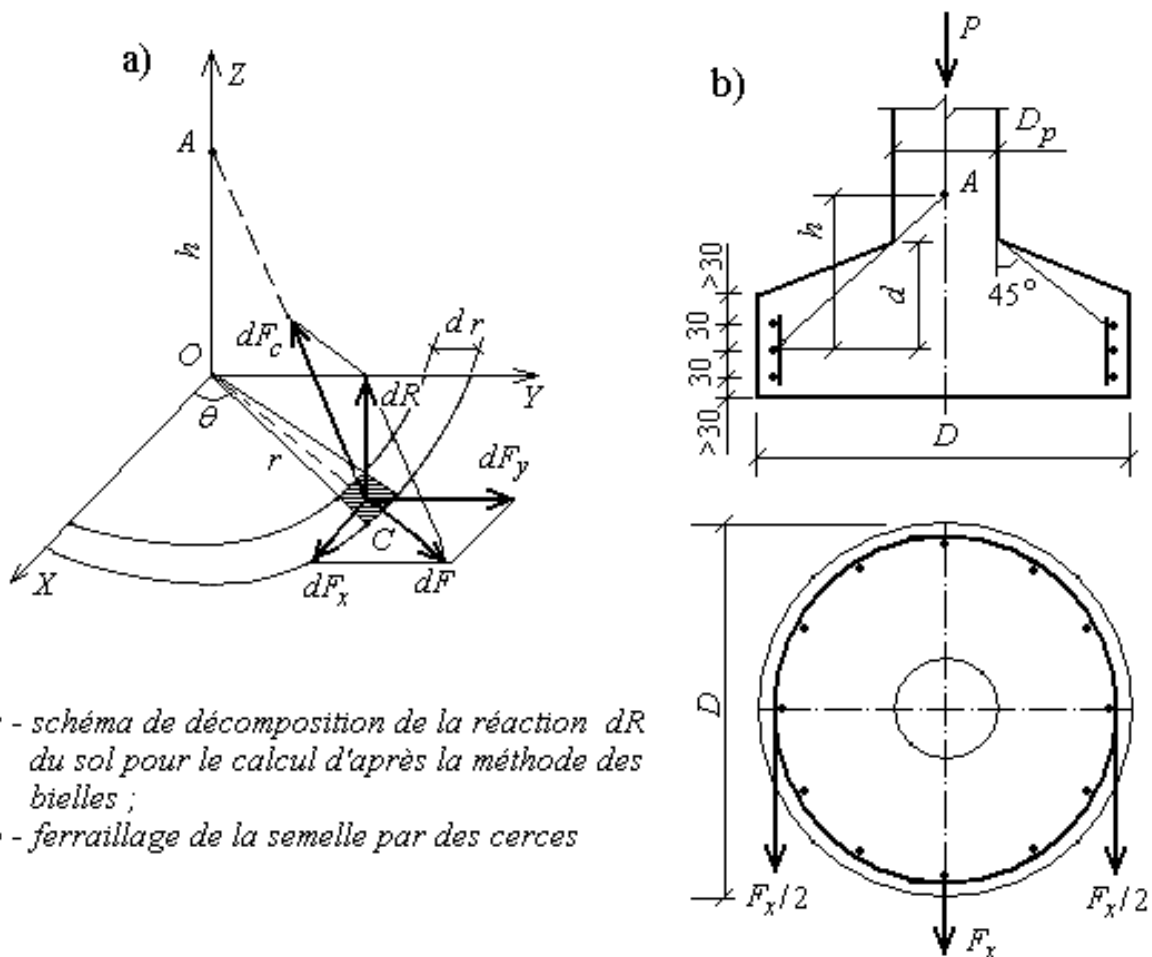
$$dR = (4 P_u / \pi D^2) r dr d\theta. \quad (9.19)$$

On décompose dR en une force de compression dF_c portée par CA , axe de la bielle, et une force de traction dF portée par OC . D'après les triangles semblables, on trouve :

$$dF / dR = OC / OA = r / h_x, \quad \text{d'où} \quad dF = dR r / h_x.$$

Pour déterminer dF_x et dF_y , on décompose la valeur dF (parallèlement aux axes Ox et Oy) :

$$dF_x = dF \cos \theta = (4P_u / \pi D^2 h_x) r^2 dr \cos \theta d\theta, \quad \text{d'où on a :}$$



a - schéma de décomposition de la réaction dR du sol pour le calcul d'après la méthode des bielles ;

b - ferrailage de la semelle par des cerces

Fig. 9.16

$$F_x = \frac{4P_u}{\pi D^2 h_x} \int_0^r r^2 dr \cdot \int_0^\pi \cos \theta d\theta = \frac{4P_u}{\pi D^2 h_x} \cdot \frac{D^3}{24} \cdot 2 =$$

$$= \frac{P_u (D - D_p)}{3 \pi d_x}. \quad (9.20)$$

De la même manière on trouve :

$$dF_y = dF \sin \theta; \quad F_y = \frac{P_u (D - D_p)}{3 \pi d_y}. \quad (9.21)$$

Les armatures seront calculées :

- pour la section des armatures du lit inférieur (avec d_i) :

$$A_i = \frac{P_u (D - D_p)}{3 \pi d_i \sigma_s}; \quad (9.22)$$

- pour la section des armatures du lit supérieur (avec d_s) :

$$A_s = \frac{P_u (D - D_p)}{3 \pi d_s \sigma_s}. \quad (9.23)$$

Vu la petite différence entre d_i et d_s , on peut prendre $d_i = d_s = d$.

Si le diamètre $D \leq 1 m$, on admet que l'effort est uniformément réparti et on dispose les barres avec un écartement constant dans chaque direction. Comme les barres situées aux extrémités sont souvent trop courtes pour être efficaces, on ne prend pas en compte dans la valeur trouvée pour A_i (ou pour A_s) les deux barres d'extrémité que l'on considère comme des barres de répartition.

Si le diamètre $1 m < D \leq 3 m$, on divise deux diamètres perpendiculaires en trois parties égales (fig. 9.17,a) et on place :

- dans la zone centrale : $0,50 A_i$ et $0,50 A_s$;
- dans chaque zone intermédiaire : $0,25 A_i$ et $0,25 A_s$.

Si le diamètre $D > 3 m$, on divise deux diamètres perpendiculaires en cinq parties égales (fig. 20.17,b) et on place :

- dans la zone centrale : $0,30 A_i$ et $0,30 A_s$;
- dans chaque zone intermédiaire : $0,25 A_i$ et $0,25 A_s$;
- dans chaque zone latérale : $0,10 A_i$ et $0,10 A_s$;

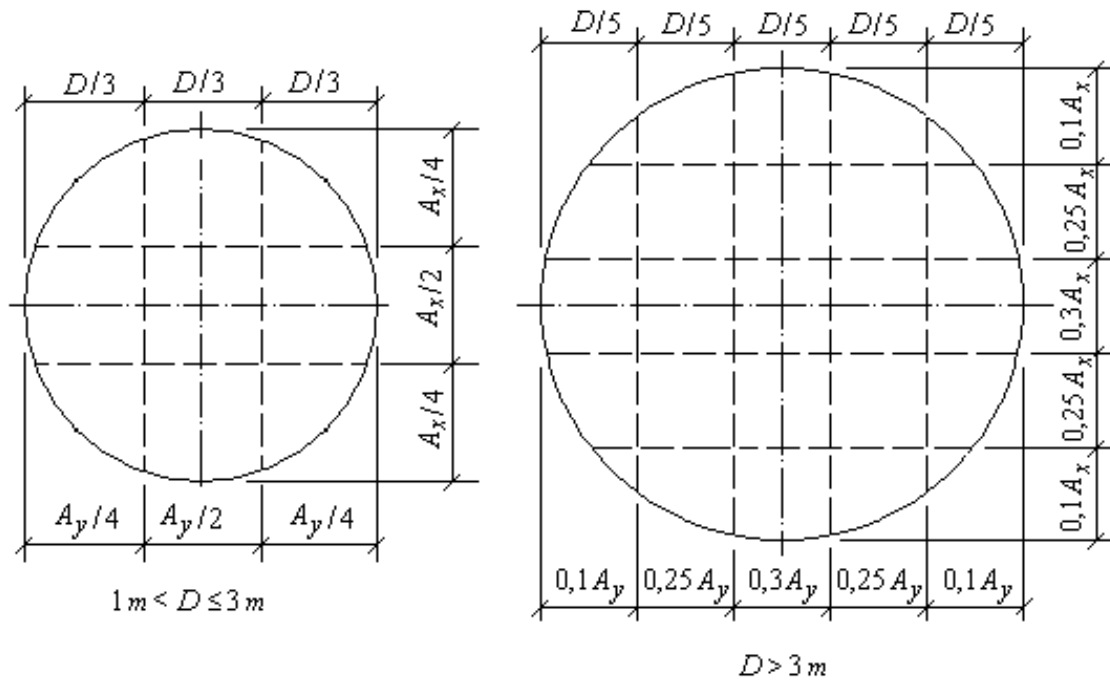


Fig. 9.17. Répartition des barres orthogonales des semelles

2) Lorsque la semelle est armée par des cerces (fig. 9.16, b), l'épaisseur en rive "e" est prise telle qu'il y ait 3 cm entre chaque cerce et au moins 3 cm d'enrobages supérieur et inférieur. Si "m" est le nombre de cerces : $e \geq m \varnothing + 3(m + 1)$, en centimètres,

avec \varnothing , le diamètre (en centimètres) des barres de cerces.

Les efforts F_x et F_y sont calculés d'après les formules (9.20) et (9.21) :

$$F_x = F_y = \frac{P_u (D - D_p)}{3 \pi d} \quad (9.24)$$

La section totale des cerces A_c devra donc pouvoir équilibrer un effort

$$F_x / 2 \text{ (fig. 9.16, b) : } A_c = \frac{F_x}{2 \sigma_s} = \frac{P_u (D - D_p)}{6 \pi d \sigma_s} \quad (9.25)$$

Les cerces sont liées entre elles par des armatures verticales qu'on a disposé pour assurer leur maintien pendant le bétonnage et constituer en outre une butée efficace pour les bielles de béton comprimé. On dispose la cerce supérieure de manière que son axe se trouve sur une droite passant par le collet de la semelle et faisant un angle de 45° avec la verticale (fig. 9.15,b).

Exemple 9.3. Soit à déterminer les dimensions et les armatures d'une semelle de fondation d'un poteau circulaire de $D_p = 50 \text{ cm}$ de diamètre. Les charges transmises au sol sont :

- charge permanente $G = 250 \text{ kN}$;
- charge d'exploitation $Q_B = 320 \text{ kN}$.

La contrainte limite admissible au sol $\sigma^* = 0,35 \text{ MPa}$.

Les armatures sont en acier $Fe E 400$, le béton a la résistance caractéristique $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$.

La fissuration est considérée comme préjudiciable.

La profondeur de la fondation $H = 1,5 \text{ m}$.

Solution. Les dimensions de la semelle sont calculées d'après les charges de service P_{ser} et de la contrainte admissible au sol σ^* . Dans le calcul des dimensions on prend en considération le poids propre de la semelle. Alors la formule 9.18 s'écrit :

$$(\pi D^2 / 4) \sigma^* = P_{ser} + (\pi D^2 / 4) \rho_m H.$$

Ou encore : $(\pi D^2 / 4) (\sigma^* - \rho_m H) = P_{ser}$, d'où on trouve :

$$D = \sqrt{\frac{4 P_{ser}}{\pi (\sigma^* - \rho_m H)}} = 1,13 \sqrt{\frac{P_{ser}}{\sigma^* - \rho_m H}}.$$

Avec $H = 1,5 \text{ m}$, $\rho_m = 20 \text{ kN/m}^3$, $P_{ser} = 250 + 320 = 570 \text{ kN}$, on trouve :

$$D = 1,13 \sqrt{\frac{570}{0,35 \cdot 10^3 - 20 \cdot 1,5}} = 1,5 \text{ m}.$$

On prend $D = 1,5 \text{ m}$. Les autres dimensions sont :

$$d > (D - D_p) / 4 = (1,5 - 0,5) / 4 = 0,25 \text{ m}.$$

On prend $d_i = 0,30 \text{ m}$, $d_s = 0,30 - 0,01 = 0,29 \text{ m}$,

$$h = d + c = 0,30 + 0,05 = 0,35 \text{ m}, \quad e = 0,15 \text{ m}.$$

1) *Calcul des armatures pour l'état-limite ultime.*

Charge de calcul :

$$P_u = 1,35 G + 1,5 Q_B = 1,35 \times 250 + 1,5 \times 320 = 817,5 \text{ kN}.$$

Armature inférieure (avec $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa}$) :

$$A_i = \frac{P_u (D - D_p)}{3 \pi d_i \sigma_s} = \frac{817,5 \cdot 10^3 (1500 - 500)}{3 \cdot 3,14 \cdot 300 \cdot 348} = 831,2 \text{ mm}^2.$$

Armature supérieure :

$$A_s = \frac{P_u (D - D_p)}{3 \pi d_s \sigma_s} = \frac{817,5 \cdot 10^3 (1500 - 500)}{3 \cdot 3,14 \cdot 290 \cdot 348} = 860 \text{ mm}^2 .$$

2) Calcul des armatures pour l'état-limite de service.

La résistance des armatures est prise :

$$\sigma_s < 2 f_e / 3 = 2 \times 400 / 3 = 267 \text{ MPa} ;$$

$$\sigma_s \leq \max(0,5 f_e = 200 \text{ MPa} ; 110 \sqrt{\eta f_{t28}} = 187 \text{ MPa}) .$$

Donc, on prend $\bar{\sigma}_s = 200 \text{ MPa}$.

$$A_i = \frac{P_{ser} (D - D_p)}{3 \pi d_i \bar{\sigma}_s} = \frac{570 \cdot 10^3 (1500 - 500)}{3 \cdot 3,14 \cdot 300 \cdot 200} = 1008,5 \text{ mm}^2 .$$

$$A_s = \frac{P_{ser} (D - D_p)}{3 \pi d_s \bar{\sigma}_s} = \frac{570 \cdot 10^3 (1500 - 500)}{3 \cdot 3,14 \cdot 290 \cdot 200} = 1043,3 \text{ mm}^2 .$$

Donc, les armatures déterminées pour l'état-limite ultime ne sont pas suffisantes.

On prend celles déterminées pour l'état-limite de service : dans chaque direction 10 $\varnothing 12$ avec $A_i = A_s = 1130 \text{ mm}^2$.

Vu que le diamètre de la semelle $1 \text{ m} < D = 1,5 \text{ m} < 3 \text{ m}$, on doit admettre la disposition des barres d'après le schéma (fig. 9.18, b).

En tenant compte que les barres situées aux extrémités sont trop courtes pour être efficaces, on ne prend pas en compte dans la valeur trouvée pour A_i et A_s les deux barres d'extrémité que l'on considère comme des barres de répartition. Donc, on prend définitivement dans chaque direction 12 $\varnothing 12 \text{ mm}$.

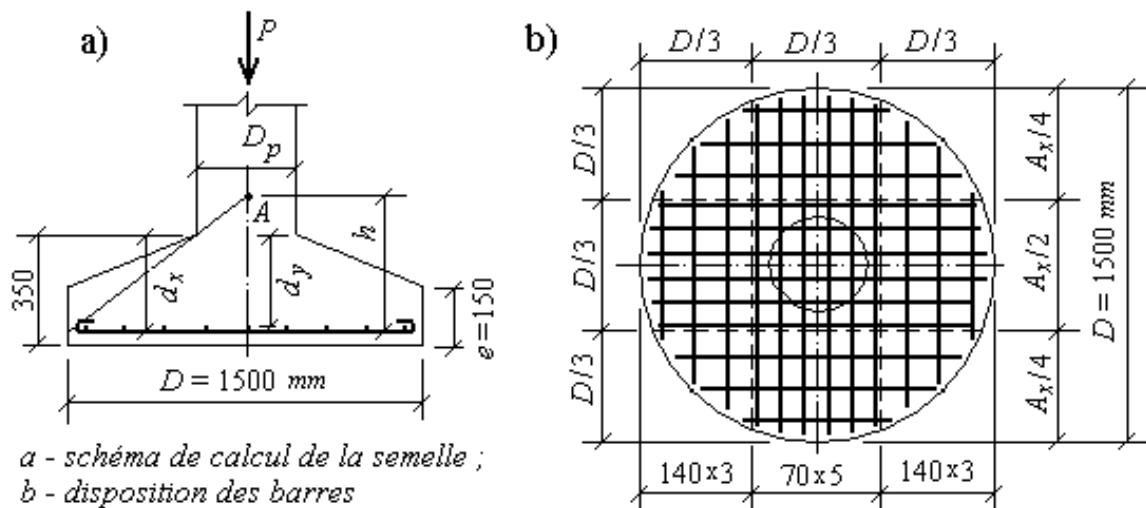


Fig. 9.18

Exemple 9.4. Soit d'après les données de l'exemple 20.3, on demande de calculer des armatures constituées par des cerces.

Solution. Le diamètre de la semelle est le même, donc $D = 1,5 \text{ m}$. On suppose que l'armature des cerces est constituée par 3 barres. Avec la disposition de figure 9.16, *b*, on doit avoir la hauteur "e" au moins égale à : $4 \times 3 + 3 d \approx 15 \text{ cm}$. D'après la figure (9.19) on trouve : $d = 490 \text{ mm}$, et la hauteur $h + c = 570 \text{ mm}$.

La section totale des armatures de cerces A_c est calculée à l'aide de la formule (9.22) :

- pour l'état-limite ultime :

$$A_c = \frac{P_u (D - D_p)}{6 \pi d \sigma_s} = \frac{817,5 \cdot 10^3 (1500 - 500)}{6 \cdot 3,14 \cdot 490 \cdot 348} = 254,4 \text{ mm}^2 .$$

- pour l'état-limite de service :

$$A_c = \frac{P_{ser} (D - D_p)}{6 \pi d \bar{\sigma}_s} = \frac{570 \cdot 10^3 (1500 - 500)}{6 \cdot 3,14 \cdot 490 \cdot 200} = 308,7 \text{ mm}^2 .$$

On prend 3 $\emptyset 12 \text{ mm}$ avec $A_c = 339 \text{ mm}^2$ (fig. 9.19).

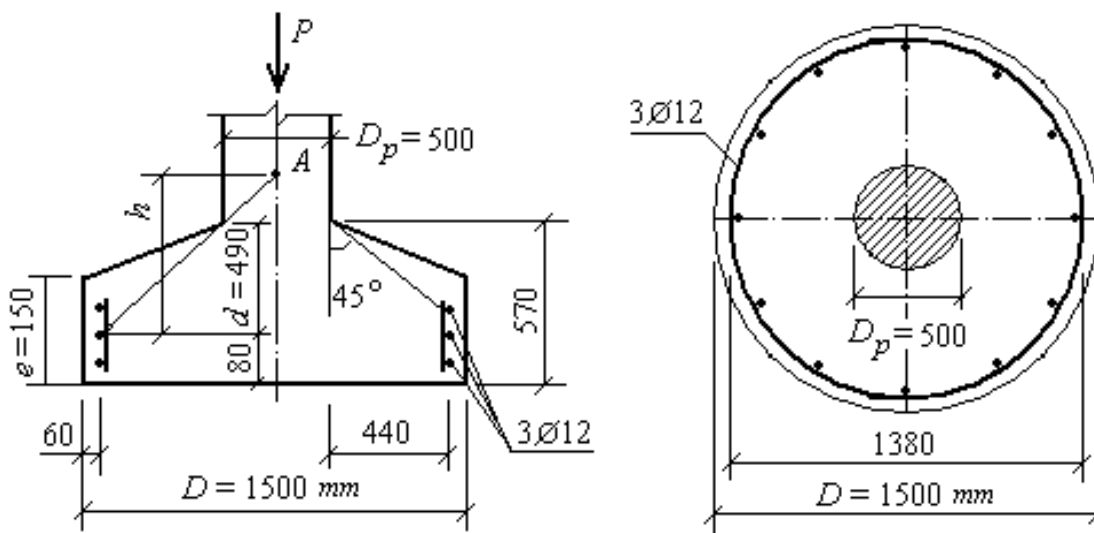


Fig. 9.19

9.5. Semelles soumises à un effort normal et à un moment de flexion

9.5.1. Etude du diagramme des contraintes

Dans ce qui précède, on a considéré des semelles soumises uniquement à une charge centrée " P ". Dans le cas le plus général les éléments supportés par la semelle lui transmettent une charge centrée " P " et un moment de flexion " M " (moment rapporté au centre de gravité de la section du béton située à la base du mur ou du poteau). Le système constitué par M et P peut être remplacé par une force unique P , appliquée au centre de pression, distant d'une quantité $e_o = M/P$ de l'axe du mur ou du poteau.

Lorsque la semelle repose sur le sol, le diagramme des contraintes du sol a la forme d'un trapèze (sur toute la surface) ou éventuellement, d'un triangle sur une partie de la surface de contact sol-semelle car aucune traction du sol n'est admise (fig. 9.20).

Pour une semelle rectangulaire de dimensions $B \times A$ soumise à un effort normal P et à un moment de flexion M on peut déterminer les contraintes du sol :

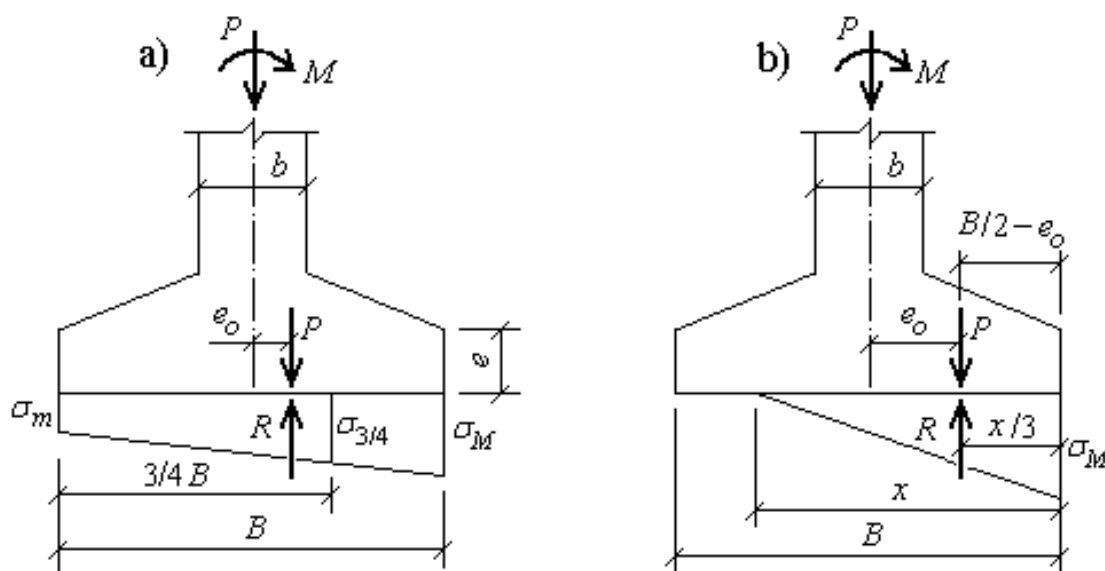


Fig.9.20

$$\sigma_{M(m)} = \frac{P}{A \cdot B} \pm \frac{M}{W_s} = \frac{P}{A \cdot B} \pm \frac{6M}{A \cdot B^2},$$

avec $W_s = A \cdot B^2 / 6$.

En introduisant la valeur $e_o = M/P$, on aura :

$$\sigma_{M(m)} = \frac{P}{A \cdot B} \left(1 \pm \frac{6 e_o}{B} \right). \quad (9.26)$$

D'après cette équation on trouve :

$$\sigma_M = \frac{P}{A \cdot B} \left(1 + \frac{6 e_o}{B} \right), \quad \sigma_m = \frac{P}{A \cdot B} \left(1 - \frac{6 e_o}{B} \right) \quad (9.27)$$

Si $e_o \leq B / 6$ (donc P tombe à l'intérieur du noyau central de la semelle), le diagramme des contraintes du sol à la forme d'un trapèze (fig. 9.20, a).

Si $e_o > B / 6$ (donc P tombe à l'extérieur du noyau central), le diagramme des contraintes à la forme d'un triangle (fig. 9.20, b).

Lorsque la semelle est entièrement comprimée (diagramme des contraintes trapézoïdal avec les valeurs σ_M et σ_m positives ou triangulaire avec $\sigma_m = 0$), on admet que la contrainte située aux trois quarts de la semelle, du côté de σ_M , ne doit pas dépasser la contrainte admissible σ^* :

$$\sigma_{3/4} = \frac{(3\sigma_M + \sigma_m)}{4} = \left(1 + \frac{3e_o}{B} \right) \frac{P}{A \cdot B} \leq \sigma^*, \quad (9.27')$$

d'où on trouve (en posant $P = P_{ser}$) :

$$A \cdot B \geq \left(1 + \frac{3e_o}{B} \right) \frac{P_{ser}}{\sigma^*}. \quad (9.28)$$

Lorsque le diagramme de répartition des contraintes du sol est triangulaire avec $x < B$ (donc, lorsque $e_o > B / 6$), dans ce cas la résultante R des contraintes du sol a pour valeur (avec les notations de la figure 9.20, b) :

$$R = (\sigma_M / 2) x A.$$

La résultante R passe par le centre de gravité du triangle des contraintes, donc à la distance $x / 3$ de l'extrémité droite de la

semelle. Comme la résultante R doit être égale et opposée à P_{ser} , dans ce cas $x / 3 = (B / 2) - e_o$, d'où $x = 3 [(B / 2) - e_o]$. Alors la valeur de R devient égale à :

$$R = P_{ser} = 3 (\sigma_M / 2) [(B / 2) - e_o] A, \quad \text{d'où}$$

$$\sigma_M = \frac{2 P_{ser}}{3 A [(B / 2) - e_o]} \quad (9.29)$$

Les contraintes au sol sont limitées par :

$\sigma_M \leq 1,33 \sigma^*$ dans les cas généraux ;

$\sigma_M \leq \sigma^*$ si le moment M est dû à un vent dominant agissant la majorité du temps ;

$\sigma_{3/4} \leq \sigma^*$ dans les cas généraux (la contrainte située aux trois quarts de la semelle, du côté de σ_M).

Les relations (9.28) et (9.29) permettent de déterminer les dimensions A et B de la semelle.

9.5.2. Calcul des armatures pour les semelles sous poteaux

Le calcul des semelles supportant un effort normal et un moment de flexion peut être effectué des manières suivantes.

1) *Lorsque la semelle est entièrement comprimée (donc $e_o < B / 6$) et lorsque la différence entre la contrainte maximale et celles minimale est inférieure à la moitié de la contrainte moyenne, c'est-à-dire que :*

$$\sigma_M - \sigma_m \leq 0,5 (\sigma_M + \sigma_m) / 2, \quad (9.30)$$

on peut, pour les semelles reposant sur le sol, utiliser la méthode des bielles. Compte tenu des valeurs indiquées ci-dessus pour σ_M et σ_m (formules 9.27) on obtient d'après la condition (9.30) :

$$e_o \leq B / 24 .$$

La condition (9.30) est parfois remplacée par :

$$\sigma_M - \sigma_m \leq 2 / 3 (\sigma_M + \sigma_m) / 2,$$

ce qui donne $e_o \leq B / 18$.

Donc, lorsque $e_o \leq B / 24$ (ou parfois $e_o \leq B / 18$) on utilise la méthode des bielles en considérant que tout se passe comme si la

semelle recevait une contrainte uniforme égale à $\sigma_{3/4}$. Pour le calcul on remplace la charge réelle P par une charge fictive P' , c'est-à-dire la charge qui correspond à la contrainte $\sigma_{3/4}$ supposée uniformément répartie sur toute la surface de la semelle. La charge fictive P' peut être calculée d'après la contrainte $\sigma_{3/4}$ (fig. 9.20, a) :

$$\sigma_{3/4} = (1/4) \sigma_m + (3/4) \sigma_M ;$$

$$P' = A \cdot B \cdot \sigma_{3/4} = [(1/4) \sigma_m + (3/4) \sigma_M] A \cdot B .$$

En prenant les contraintes σ_m et σ_M d'après les formules (9.27) on trouve :

$$P' = \frac{1}{4} \cdot \frac{P}{A \cdot B} \left(1 - \frac{6e_o}{B} \right) A \cdot B + \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{A \cdot B} \left(1 + \frac{6e_o}{B} \right) A \cdot B =$$

$$= \frac{1}{4} \left(P - \frac{6 P e_o}{B} \right) + \frac{3}{4} \left(P + \frac{6 P e_o}{B} \right) ,$$

$$\text{ou définitivement } P' = P + \left(\frac{3 P e_o}{B} \right) = P \left(1 + \frac{3 e_o}{B} \right) . \quad (9.31)$$

En utilisant la méthode des bielles, on calcule les armatures :

$$A_a = \frac{P'(A-a)}{8 d_a \sigma_s} = \frac{P_u [1 + (3 e_o / B)] (A-a)}{8 d_a \sigma_s} ; \quad (9.32)$$

$$A_b = \frac{P'(B-b)}{8 d_b \sigma_s} = \frac{P_u [1 + (3 e_o / B)] (B-b)}{8 d_b \sigma_s} . \quad (9.33)$$

2) Lorsque la semelle est entièrement comprimée (donc $e_o \leq B / 6$) mais la condition (9.30) n'est pas satisfaite, donc

$$\sigma_M - \sigma_m > 0,5 (\sigma_M + \sigma_m) / 2 ,$$

c'est-à-dire $B / 6 \geq e_o \geq B / 24$ (ou parfois $e_o \geq B / 18$), les armatures dans la direction " B " sont calculées pour équilibrer le moment qui s'applique dans la section S_1 située à une distance $0,35 b$ de l'axe du poteau du côté de σ_M (fig. 9.21, a).

La résultante des efforts à droite vaut :

$$R_d = [(B / 2 - 0,35 b) (\sigma_M + \sigma_1) / 2] A . \quad (9.34)$$

La résultante R_d est appliquée à la distance :

$$x_d = \frac{\sigma_1 + 2 \sigma_M}{\sigma_M + \sigma_1} \cdot \frac{(B/2) - 0,35b}{3} \quad (9.35)$$

La contrainte σ_1 est calculée d'après la figure (9.21, a) :

$$\sigma_1 = \sigma_m + (\sigma_M - \sigma_m) \cdot \frac{(B/2) + 0,35b}{B}$$

Avec les valeurs de σ_m et σ_M (formule 9.27) on a :

$$\sigma_1 = \left(1 + \frac{4,2 e_o b}{B^2}\right) \frac{P}{A \cdot B} \quad (9.36)$$

Alors, le moment dans la section S_1 sera égal à :

$$M_1 = x_d R_d = A \left(\frac{B}{2} - 0,35b\right) \cdot \left(\frac{\sigma_1 + 2 \sigma_M}{6}\right),$$

ou encore (en remplaçant σ_M et σ_1 par leurs valeurs):

$$M_1 = \left(\frac{B}{2} - 0,35b\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{4 e_o}{B} + \frac{1,4 e_o b}{B^2}\right) \frac{P_u}{2B} \quad (9.37)$$

Les armatures dans la direction "B" est calculées comme pour un élément fléchi de largeur "A" (pour les semelles de hauteur constante)

$$\mu = \frac{M_1}{f_{bc} A d^2} ; \quad A_s = \frac{M_1}{d \beta \sigma_s} \quad (9.38)$$

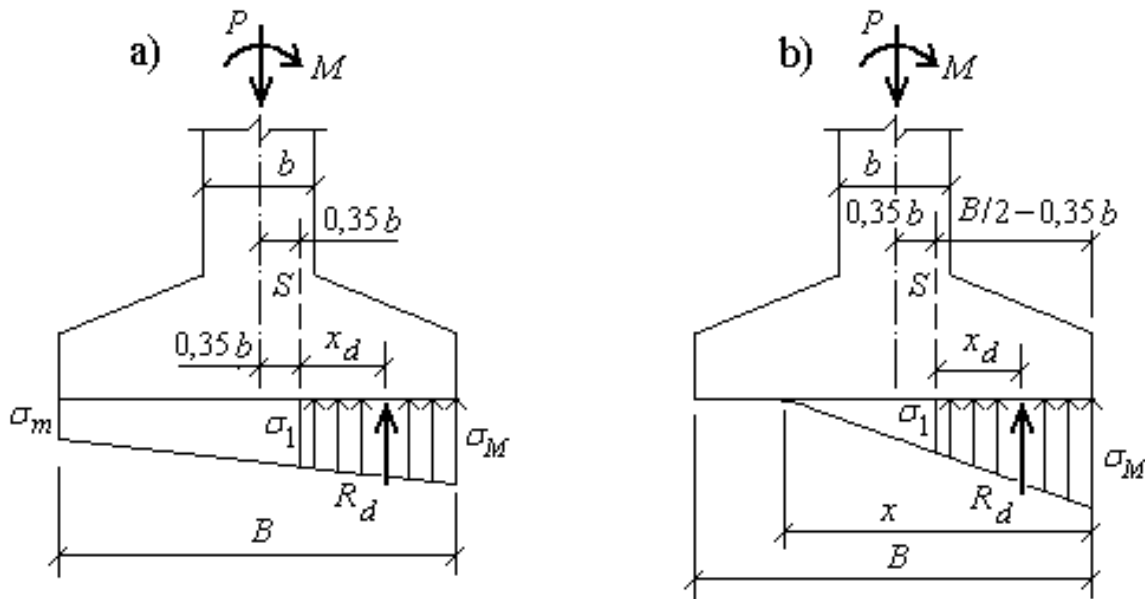


Fig. 9.21

Pour des semelles de hauteur variable (fig. 9.21), on doit préciser la largeur du béton de la zone comprimée par approximation successive ou on prend $\beta \approx 0,9$.

Dans la direction "A" (suivant laquelle il n'existe pas de moment) les armatures A_a sont calculées selon la méthode des bielles en considérant l'effort fictif :

$$P' = P [1 + (3 e_o / B)].$$

$$A_a = \frac{P'(A-a)}{8 d_a \sigma_s} = \frac{P_u [1 + (3 e_o / B)] (A-a)}{8 d_a \sigma_s}.$$

3) Lorsque la résultante des efforts P est appliquée hors du noyau central, donc $e_o > B / 24$, on procède comme précédemment (au point 2), mais avec :

$$\sigma_1 = \frac{x - [(B/2) - 0,35 b]}{x} \sigma_M.$$

La distance $x = 3 [(B/2) - e_o]$, alors :

$$\sigma_1 = \frac{B + 0,35b - 3e_o}{3 [(B/2) - e_o]} \sigma_M, \quad (9.39)$$

avec :

$$\sigma_M = \frac{2P}{xA} = \frac{2P}{3 [(B/2) - e_o] A}. \quad (9.40)$$

Le moment M_1 dans la section S_1 située à une distance $0,35 b$ de l'axe du poteau (en remplaçant P par P_u) :

$$M_1 = (4B + 0,35b - 9e_o) \left[\frac{(B/2) - 0,35 b}{(B/2) - e_o} \right]^2 \cdot \frac{P_u}{27}. \quad (9.41)$$

Les armatures dans la direction "B" sont calculées comme pour un élément fléchi sous l'action M_1 . Dans la direction "A" on calcule les armatures A_a à l'aide de la formule (9.32), donc en utilisant la méthode des bielles.

9.5.3. Calcul des armatures pour les semelles sous murs

Un mur n'est généralement pas armé ou est peu armé, c'est pourquoi on prend de préférence $B \geq 6 e_o$ et on fixe la largeur "B" de la semelle en la rectifiant ultérieurement si nécessaire et on vérifie (avec $A = 1 m$) :

- si $e_o \leq B / 6$, on a : $B \geq \frac{P_{ser} [1 + (3 e_o / B)]}{\sigma^*}$;
- si $e_o > B / 6$, on a : $\sigma_M = \frac{2 P_{ser}}{3[(B/2) - e_o]} \leq 1,33 \sigma^*$.

La hauteur utile de la semelle est prise d'après la condition :

$$d \geq (B - b) / 4$$

Pour le calcul des armatures, on distingue deux cas :

1) Si $e_o \leq B / 24$ (ou $e_o \leq B / 18$), les armatures perpendiculaires au mur, par unité de longueur de semelle, sont :

$$A_s = \frac{P_u [1 + (3 e_o / B)] \cdot (B - b)}{8 d \sigma_s}$$

Les armatures de répartition parallèles au mur sont prises :

$$A_r = A_s B / 4 \quad (\text{réparties sur la largeur "B", "B" en mètres}).$$

2) Si la condition $e_o \leq B / 24$ n'est pas remplie, on calcule les armatures A_s à l'aide des formules du paragraphe 9.5.2 pour équilibrer le moment M_1 , avec $A = 1 m$.

9.5.4. Précision de calcul des fondations

1. La hauteur des fondations doit être suffisante pour bien ancrer les armatures du poteau. Les armatures verticales des murs et des poteaux, lorsqu'elles sont comprimées, n'ont pas à être munies de retours, mais elles doivent être prolongées jusqu'à la base de la semelle (fig. 9.22, a). Dans ce cas la longueur de scellement est prise

égale au moins $20\varnothing_l$, donc $d \geq 20\varnothing_l$ (\varnothing_l , est le diamètre des barres du poteau ou du mur).

Si dans la section d'encastrement du poteau à la semelle, les armatures du poteau peuvent être tendues (le poteau transmet un effort normal et un moment de flexion), elles doivent être munies de retours situés dans le plan des armatures inférieures de la semelle (fig. 9.22, b).

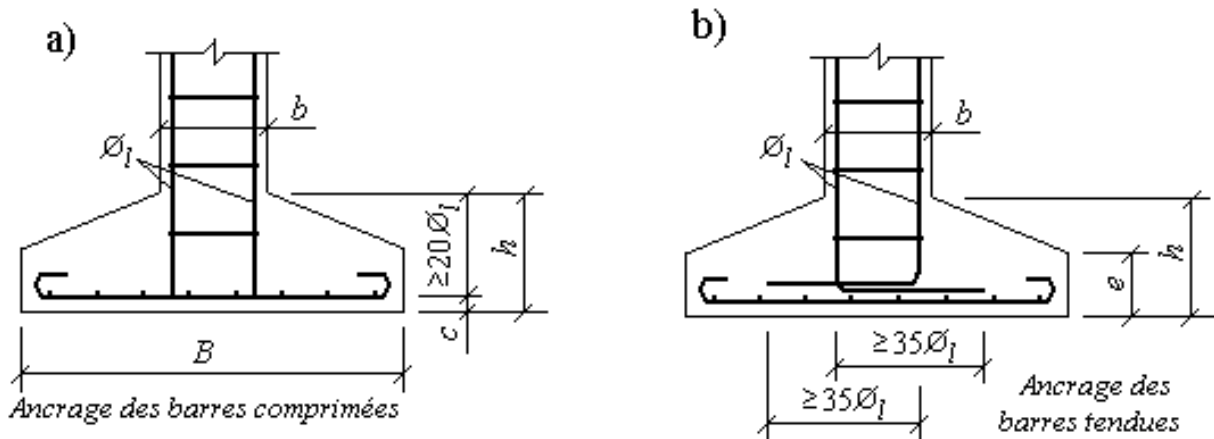


Fig. 9.22

2. Les contraintes du sol sous une semelle sont déterminées d'après les efforts agissant au niveau de la base de la semelle (fig. 9.23, a). Alors dans le cas de la semelle soumise à un effort centré, on pose, dans les formules précédentes (9.12) :

$$P_{ser} = G + Q_B + G_o, \quad (9.42)$$

avec G_o , le poids propre de la semelle et des terres qui la surmonte.

Pour la semelle soumise à un effort centré "P" et à un moment de flexion "M" (fig. 9.23, b), les efforts agissants au niveau de base de la semelle seront (formule 9.27, 9.28, 9.29) :

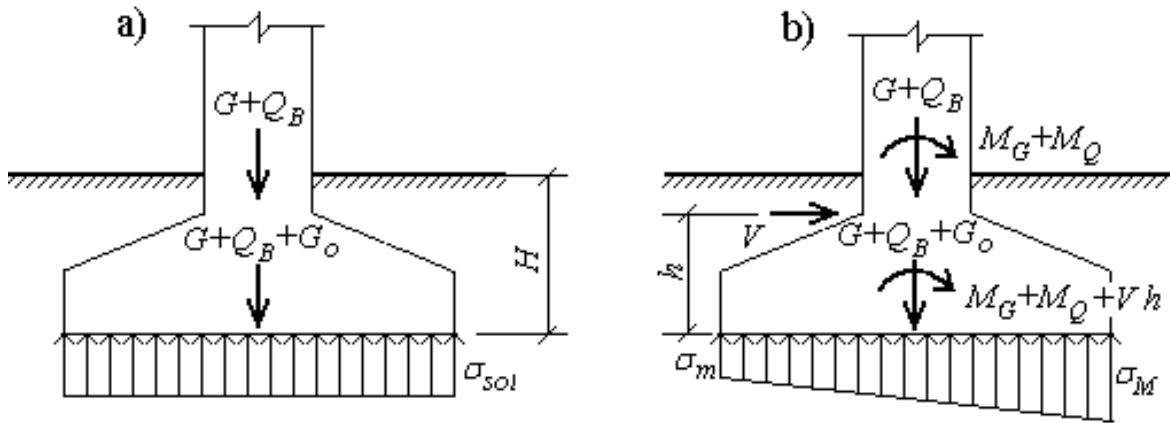
$$P_{ser} = G + Q_B + G_o ;$$

$$M_{ser} = M_G + M_Q + V h.$$

Dans ce cas l'excentricité devient égale à :

$$e_o = e_{o(ser)} = \frac{M_G + M_Q + V \cdot h}{G + Q_B + G_o},$$

et les contraintes sous la semelle :



a - schéma de calcul des semelles soumises à un effort centré ; b - schéma de calcul des semelles sollicitées par un effort normal et un moment de flexion

Fig. 9.23

$$\sigma_M = \sigma_{M(ser)} = \left(1 + \frac{6 e_{o(ser)}}{B} \right) \cdot \frac{P}{A \cdot B} ;$$

$$\sigma_m = \sigma_{m(ser)} = \left(1 - \frac{6 e_{o(ser)}}{B} \right) \cdot \frac{P}{A \cdot B} .$$

3. Le ferrailage des semelles est calculé à partir des efforts ultimes, dont les valeurs sont déterminées sans tenir compte le poids propre de la semelle et des terres qui la surmonte (puisque'ils ne participent pas dans ce mode de travail de la semelle). On prend:

$$P_u = 1,35 G + 1,5 Q_B ;$$

$$M_u = 1,35 M_G + 1,5 M_Q + (1,35 V_G + 1,5 V_Q) h ,$$

et on détermine :

$$e_o = e_{o(u)} = \frac{1,35 M_G + 1,5 M_Q + (1,35 V_G + 1,5 V_Q) \cdot h}{1,35 G + 1,5 Q_B} ;$$

$$\sigma_M = \sigma_{M(u)} = \left(1 + \frac{6 e_{o(u)}}{B} \right) \cdot \frac{P}{A \cdot B} ;$$

$$\sigma_m = \sigma_{m(u)} = \left(1 - \frac{6 e_{o(u)}}{B} \right) \cdot \frac{P}{A \cdot B} .$$

Exemple 9.5.

Soit un poteau de section $a \cdot b = 30 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm}$ qui transmet à la semelle :

- des efforts verticaux :

$$G = 1200 \text{ kN} - \text{ permanents ;}$$

$$Q_B = 600 \text{ kN} - \text{ provisoires ;}$$

- des moments de flexion :

$$M_G = 60 \text{ kNm} - \text{ permanents ;}$$

$$M_Q = 30 \text{ kNm} - \text{ provisoires ;}$$

- des efforts horizontaux :

$$V_G = 10 \text{ kN} - \text{ permanents ;}$$

$$V_Q = 3 \text{ kN} - \text{ provisoires ;}$$

Les caractéristiques des matériaux de la semelle :

- béton, $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ ($f_{bc} = 14,2 \text{ MPa}$) ;

- acier, Fe E 400 ($\sigma_s = 348 \text{ MPa}$).

La contrainte admissible au sol $\sigma^* = 0,7 \text{ MPa}$.

La fissuration de la semelle est peu préjudiciable.

On demande de déterminer les dimensions et le ferrailage de la semelle.

Solution. 1. *Détermination des dimensions de la semelle.*

Les dimensions de la semelle sont calculées d'après les efforts de service. En première approximation on néglige le poids propre de la semelle (inconnu à ce stade de calcul). De plus, on dimensionne la semelle comme si l'effort P_{ser} était centré. Donc on prend :

$$P_{ser} = G + Q_B = 1200 + 600 = 1800 \text{ kN}.$$

Pour une semelle supposée être soumise à un effort centré, on peut trouver (avec $\sigma^* = 0,7 \text{ MPa} = 700 \text{ kN/m}^2$) :

$$A \cdot B = C = \frac{G + Q_B}{\sigma^*} = \frac{1800}{700} = 2,57 \text{ m}^2.$$

Dans le cas d'un poteau rectangulaire, on préfère choisir une semelle homothétique du poteau, donc avec le rapport des dimensions :

$$k = b/a = 0,4 / 0,3 = 1,33. \quad \text{Alors } B = kA = 1,33 A.$$

Pour tenir compte du moment de flexion, on rajoute $2 e_o$ à la dimension de la semelle dans le plan de flexion. Donc on peut prendre : $B = A + 2 e_o$.

L'excentricité d'application des efforts " e_o " pour ce stade de calcul est :

$$e_o = \frac{M_G + M_Q}{G + Q_B} = \frac{60 + 30}{1200 + 600} = 0,05 \text{ m}.$$

Vu que $A = B - 2 e_o$, et $B = kA$, on a :

$$C = AB = A(kA - 2 e_o) \quad \text{ou encore} \quad A^2 - (2 e_o A/k) - C/k.$$

Alors on trouve :

$$A = e_o / k + \sqrt{(e_o / k)^2 + C / k} =$$

$$= 0,05 / 1,33 + \sqrt{(0,05 / 1,33)^2 + 2,57 / 1,33} = 1,428 \text{ m},$$

$$B = kA = 1,33 \times 1,428 = 1,899 \text{ m}.$$

On prend en première approximation $A \times B = 140 \times 190 \text{ cm}$.

La hauteur utile de la semelle est prise d'après les conditions :

$$d_b \geq (B - b) / 4 = (190 - 40) / 4 = 37,5 \text{ cm};$$

$$d_a \geq (A - a) / 4 = (140 - 30) / 4 = 27,5 \text{ cm}.$$

La hauteur totale de la semelle $h \geq d_b + 5 \text{ cm} = 42,5 \text{ cm}$.

Nous prenons la hauteur $h = 60 \text{ cm}$, avec $d_b = d_a = 60 - 5 = 55 \text{ cm}$.

Pour préciser les dimensions, on vérifie les contraintes sous la semelle en prenant en compte tous les efforts, y compris le poids propre de la semelle. Au niveau de la base de la semelle agissent les efforts (fig. 9.24) :

$$P_{ser} = G + Q_B + G_o,$$

où G_o , le poids propre de la semelle (ici le poids des terres qui surmontent la semelle, n'est pas pris en compte, vu sa petitesse) :

$$G_o = A \cdot B \cdot h \cdot \rho_b = 1,4 \cdot 1,9 \cdot 0,6 \cdot 25 = 39,9 \text{ kN} \approx 40 \text{ kN}.$$

Avec $\rho_b = 25 \text{ kN/m}^3$, le poids volumique du béton armé.

Donc on a : $P_{ser} = 1200 + 600 + 40 = 1840 \text{ kN}$;

$M_{ser} = M_G + M_Q + (V_G + V_Q) h = 60 + 30 + (10 + 3) 0,6 = 97,8 \text{ kNm}$
(le moment M_{ser} est appliqué au niveau de la base de la semelle).

L'excentricité d'application des efforts au niveau de la base de la semelle :

$$e_{o(ser)} = M_{ser} / P_{ser} = 97,8 / 1840 = 0,0531 \text{ m}.$$

Les contraintes au sol sont (formule 9.27) :

$$\sigma_M = \frac{P_{ser}}{A \cdot B} \left(1 + \frac{6 e_{o(ser)}}{B} \right) = \frac{1840}{1,4 \cdot 1,9} \left(1 + \frac{6 \cdot 0,0531}{1,9} \right) = 807 \text{ kN/m}^2.$$

$$\sigma_m = \frac{P_{ser}}{A \cdot B} \left(1 - \frac{6 e_{o(ser)}}{B} \right) = \frac{1840}{1,4 \cdot 1,9} \left(1 - \frac{6 \cdot 0,0531}{1,9} \right) = 576 \text{ kN/m}^2.$$

Vu que $\sigma_m > 0$, le diagramme de répartition des contraintes est trapézoïdal. La contrainte maximale σ_M ne doit pas dépasser la valeur $1,33 \sigma^*$:

$$\sigma_M = 0,807 \text{ MPa} < 1,33 \times 0,7 = 0,93 \text{ MPa}.$$

La condition est satisfaite.

On doit également vérifier la contrainte à la distance $3/4$ de la semelle du côté de σ_m , dont la valeur ne doit pas dépasser la contrainte admissible σ^* (formule 9.27') :

$$\begin{aligned}\sigma_{3/4} &= \frac{3 \sigma_M + \sigma_m}{4} = \left(1 + \frac{3 e_{o(ser)}}{B}\right) \cdot \frac{P_{ser}}{A \cdot B} = \\ &= \left(1 + \frac{3 \cdot 0,0531}{1,9}\right) \cdot \frac{1840}{1,4 \cdot 1,9} = 750 \text{ kN/m}^2.\end{aligned}$$

Donc la condition $\sigma_{3/4} \leq \sigma^*$ n'est pas satisfaite, alors on doit augmenter les dimensions de la semelle. Prenons $A \cdot B = 1,5 \text{ m} \times 2,0 \text{ m}$, le rapport est :

$$B/A = 2,0 / 1,5 = 1,33.$$

Avec ces dimensions on a : $G_o = 2 \times 1,5 \times 0,6 \times 25 = 45 \text{ kN}$;

$P_{ser} = 1200 + 600 + 45 = 1845 \text{ kN}$; $e_{o(ser)} = 97,8 / 1845 = 0,0530 \text{ m}$;

$$\sigma_{3/4} = \left(1 + \frac{3 \cdot 0,0530}{2,0}\right) \frac{1845}{1,5 \cdot 2,0} = 664 \text{ kN/m}^2 < \sigma^* = 700 \text{ kN/m}^2.$$

Donc les dimensions $A \times B = 1,5 \text{ m} \times 2,0 \text{ m}$ sont suffisantes.

2. Calcul des armatures de la semelle.

Les armatures sont calculées d'après les efforts de calculs (efforts ultimes). La valeur de ces efforts au niveau de la base de la semelle est calculée sans tenir compte du poids propre de la semelle.

$$P_u = 1,35 G + 1,5 Q_B = 1,35 \times 1200 + 1,5 \times 600 = 2520 \text{ kN} ;$$

$$\begin{aligned}M_u &= 1,35 M_G + 1,5 M_Q + (1,35 V_G + 1,5 V_Q) h = \\ &= 1,35 \times 60 + 1,5 \times 30 + (1,35 \times 10 + 1,5 \times 3) 0,6 = 136,8 \text{ kNm}\end{aligned}$$

L'excentricité des efforts est :

$$e_{o(u)} = M_u / P_u = 136,8 / 2520 = 0,0543 \text{ m}.$$

On a que $e_{o(u)} = 0,0543 \text{ m} < B / 24 = 2,0 / 24 = 0,0833 \text{ m}$.

Donc la différence entre la contrainte maximale et la contrainte minimale ne dépasse pas la moitié de la contrainte moyenne (condition 9.30). Alors pour calculer l'armature dans la direction "B" on peut utiliser la méthode des bielles, en considérant que tout se passe comme si la semelle recevait une contrainte uniforme égale à $\sigma_{3/4}$. On remplace la charge réelle P_u par une charge fictive P_u' , dont la valeur est égale à (formule 9.31) :

$$P_u' = P_u \left(1 + \frac{3 e_{o(u)}}{B}\right) = 2520 \left(1 + \frac{3 \cdot 0,0543}{2,0}\right) = 2725 \text{ kN}.$$

La section de l'armature dans la direction "B" (formule 9.33) :

$$A_b = \frac{P_u' (B - b)}{8 d_b \sigma_s} = \frac{2725 \cdot 10^3 (2000 - 400)}{8 \cdot 550 \cdot 348} = 2847 \text{ mm}^2.$$

Dans la direction "A" l'armature est aussi calculée selon la méthode des bielles (formule 9.32) :

$$A_a = \frac{P_u' (A - a)}{8 d_a \sigma_s} = \frac{2725 \cdot 10^3 (1500 - 300)}{8 \cdot 550 \cdot 348} = 2135 \text{ mm}^2..$$

Pour le ferrailage on prend :

- dans la direction "B" : 15 \varnothing 16 avec $A_b = 3016 \text{ mm}^2$;

- dans la direction "A" : 19 \varnothing 12 avec $A_a = 2147 \text{ mm}^2$.

La longueur de scellement des barres de 16 mm de diamètre est égale à (avec $\tau_s = 2,83 \text{ MPa}$, tableau 1.2) :

$$l_{s(b)} = (\varnothing f_e) / (4 \tau_s) = (16 \times 400) / (4 \times 2,83) = 565 \text{ mm} = 56,5 \text{ cm}.$$

De la même manière on calcule la longueur l_s dans la direction "A" (pour des barres de 12 mm de diamètre) :

$$l_{s(a)} = (\varnothing f_e) / (4 \tau_s) = (12 \times 400) / (4 \times 2,83) = 424 \text{ mm} = 42,4 \text{ cm}.$$

Comme $l_{s(b)} = 56,5 \text{ cm} > B / 4 = 200 / 4 = 50 \text{ cm}$,

et $l_{s(a)} = 42,4 \text{ cm} > A / 4 = 150 / 4 = 37,5 \text{ cm}$,

dans ce cas les barres doivent être prolongées jusqu'aux extrémités de la semelle et comportées des ancrages courbes (fig. 9.24).

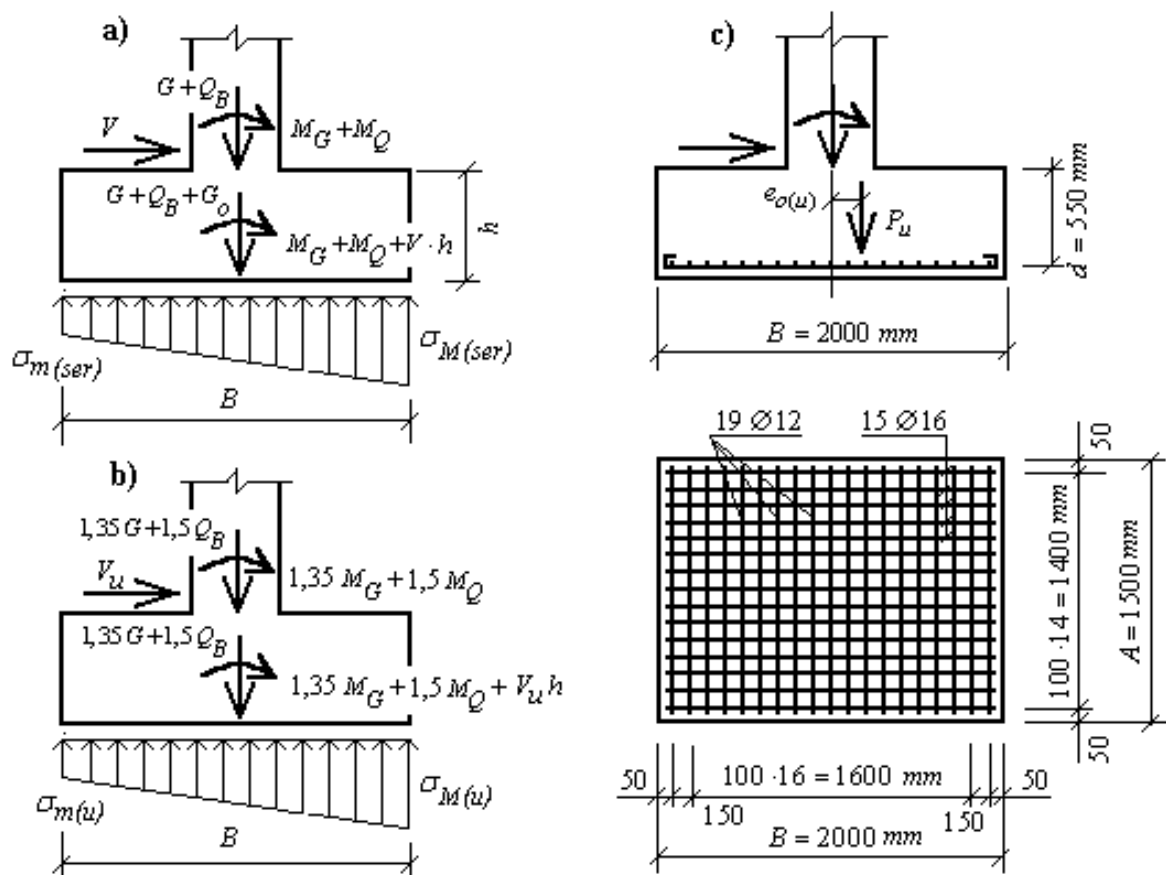


Fig. 9.24

a - schéma de calcul des dimensions de la semelle ; b - schéma des efforts pour calculer le ferrailage de la semelle ; c - ferrailage de la semelle

Exemple 9.6.

Soit un poteau de section $a \times b = 30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ transmet à la semelle :

- des efforts verticaux :

$$G = 600 \text{ kN} - \text{permanentes ;}$$

$$Q_B = 300 \text{ kN} - \text{provisoires ;}$$

- des moments de flexion :

$$M_G = 60 \text{ kNm} - \text{permanents ;}$$

$$M_Q = 30 \text{ kNm} - \text{provisoires ;}$$

- des efforts horizontaux :

$$V_G = 10 \text{ kN} - \text{permanents ;}$$

$$V_Q = 3 \text{ kN} - \text{provisoires ;}$$

Les caractéristiques des matériaux de la semelle :

- béton, $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$ ($f_{cb} = 11,3 \text{ MPa}$) ;

- acier, Fe E 400 ($\sigma_s = 348 \text{ MPa}$).

La contrainte admissible au sol $\sigma^* = 0,7 \text{ MPa}$.

La fissuration de la semelle est peu préjudiciable.

On demande de déterminer les dimensions et le ferrailage de la semelle.

Solution. 1. *Détermination des dimensions de la semelle.*

Pour commencer le calcul on prend la hauteur de la semelle $h = 0,5 \text{ m}$. Les dimensions $A \times B$ en première approximation peuvent être calculées comme pour une semelle soumise à des charges centrées. Le poids propre de la semelle est égal à :

$$G_o = A \cdot B \cdot h \cdot \rho_b.$$

Pour une semelle axialement chargée il faut que :

$$P_{ser} = G + Q_B + G_o = G + Q_B + (A \cdot B \cdot h \cdot \rho_b) \leq A \cdot B \cdot \sigma^*,$$

$$\text{d'où on trouve : } A \cdot B \geq \frac{G + Q_B}{\sigma^* - \rho_b h} = \frac{600 + 300}{700 - 25 \cdot 0,5} = 1,31 \text{ m}^2.$$

Vu que le poteau a une section carrée on trouve :

$$A = \sqrt{A \cdot B} = \sqrt{1,31} = 1,14 \text{ m}.$$

Pour tenir compte du moment de flexion, on augmente la dimension " B " à la valeur $2 e_o$. Le moment de flexion au niveau de base de la semelle est égal à :

$$M_{ser} = M_G + M_Q + (V_G + V_Q) h = 60 + 30 + (10 + 3) 0,5 = 96,5 \text{ kNm} ;$$

$$e_o = M_{ser} / P_{ser} = 96,5 / (600 + 300 + 1,31 \times 25 \times 0,5) = 0,105 \text{ m}.$$

Avec cette valeur on a : $B = A + 2 e_o = 1,14 + 2 \times 0,105 = 1,35 \text{ m}$.

Donc, dans la première approximation on prend :

$$A \times B = 115 \text{ cm} \times 135 \text{ cm}.$$

La hauteur utile de la semelle doit être au moins égale à :

$$d \geq (B - b) / 4 = (135 - 30) / 4 = 26,2 \text{ cm}.$$

C'est-à-dire que la hauteur de la semelle $h = 50 \text{ cm}$ prise préalablement est suffisante, avec la hauteur utile $d = 50 - 5 = 45 \text{ cm}$.

Pour vérifier les dimensions $A \times B$, on calcule les contraintes sous la semelle (en précisant la valeur de G_o) :

$$G_o = 1,15 \times 1,35 \times 25 \times 0,5 = 19,4 \text{ kN};$$

$$P_{ser} = 600 + 300 + 19,4 = 919,4 \text{ kN}; \quad M_{ser} = 96,5 \text{ kNm}.$$

$$e_{o(ser)} = M_{ser} / P_{ser} = 96,5 / 919,4 \approx 0,105 \text{ m};$$

$$\sigma_M = \frac{P_{ser}}{A \cdot B} \left(1 + \frac{6 e_{o(ser)}}{B} \right) = \frac{919,4}{1,15 \cdot 1,35} \left(1 + \frac{6 \cdot 0,105}{1,35} \right) = 868,6 \text{ kN/m}^2;$$

$$\sigma_m = \frac{P_{ser}}{A \cdot B} \left(1 - \frac{6 e_{o(ser)}}{B} \right) = \frac{919,4}{1,15 \cdot 1,35} \left(1 - \frac{6 \cdot 0,105}{1,35} \right) = 315,8 \text{ kN/m}^2;$$

$$\sigma_{3/4} = \frac{P_{ser}}{A \cdot B} \left(1 + \frac{3 e_{o(ser)}}{B} \right) = \frac{919,4}{1,15 \cdot 1,35} \left(1 + \frac{3 \cdot 0,105}{1,35} \right) = 730 \text{ kN/m}^2;$$

On a que $\sigma_M = 868,6 \text{ kN/m}^2 < 1,33 \sigma^* = 1,33 \times 700 = 931 \text{ kN/m}^2$;

$$\sigma_m = 315,8 \text{ kN/m}^2 > 0;$$

$$\sigma_{3/4} = 730 \text{ kN/m}^2 > \sigma^* = 700 \text{ kN/m}^2.$$

La dernière condition montre que les dimensions de la semelle ne sont pas suffisantes, donc il faut les augmenter. On prend $A \times B = 1,2 \text{ m} \times 1,4 \text{ m}$.

Dans ce cas on trouve:

$$G_o = 1,2 \times 1,4 \times 25 \times 0,5 = 21 \text{ kN}; \quad P_{ser} = 600 + 300 + 21 = 921 \text{ kN}$$

$$e_{o(ser)} = 96,5 / (900 + 21) \approx 0,105 \text{ m};$$

$$\sigma_{3/4} = \frac{921}{1,2 \cdot 1,4} \left(1 + \frac{3 \cdot 0,105}{1,4} \right) = 671 \text{ kN/m}^2 < \sigma^* = 700 \text{ kN/m}^2.$$

Ainsi on prend définitivement : $A \times B = 1,2 \text{ m} \times 1,4 \text{ m}$.

2. Calcul des armatures de la semelle.

Les efforts ultimes au niveau de la base de la semelle sont :

$$P_u = 1,35 G + 1,5 Q_B = 1,35 \times 600 + 1,5 \times 300 = 1260 \text{ kN} ;$$

$$\begin{aligned} M_u &= 1,35 M_G + 1,5 M_Q + (1,35 V_G + 1,5 V_Q) h = \\ &= 1,35 \times 60 + 1,5 \times 30 + (1,35 \times 10 + 1,5 \times 3) 0,5 = 135 \text{ kNm} ; \end{aligned}$$

$$e_{o(u)} = M_u / P_u = 135 / 1260 = 0,107 \text{ m}.$$

Vu que $e_{o(u)} = 0,107 \text{ m} > B / 24 = 1,4 / 24 = 0,058 \text{ m}$, l'armature dans la direction " B " est calculée pour équilibrer le moment M_1 qui s'applique dans la section (S) située à une distance $0,35 b$ de l'axe du poteau du côté de σ_M , formule 9.37 (fig. 9.21 et 9.24) :

$$\begin{aligned} M_1 &= \left(\frac{B}{2} - 0,35b \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{4e_{o(u)}}{B} + \frac{1,4e_{o(u)}b}{B^2} \right) \cdot \frac{P_u}{2B} = . \\ &= \left(\frac{1,4}{2} - 0,35 \cdot 0,3 \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot 0,107}{1,4} + \frac{1,4 \cdot 0,107 \cdot 0,3}{1,4^2} \right) \cdot \frac{1260}{2 \cdot 1,4} = \\ &= 211,6 \text{ kNm} . \end{aligned}$$

Comme pour les éléments fléchis on trouve :

$$\mu = \frac{M_1}{f_{bc} \cdot A \cdot d^2} = \frac{211,6 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 1200 \cdot 450^2} = 0,077 .$$

D'après le tableau A.1 on trouve : $\alpha = 0,1002$; $\beta = 0,9595$.

La section exigée de l'armature dans la direction " B " :

$$A_b = \frac{M_1}{\beta \cdot d \cdot \sigma_s} = \frac{211,6 \cdot 10^6}{0,9595 \cdot 450 \cdot 348} = 1408 \text{ mm}^2$$

Cette armature doit être distribuée suivant la dimension " A " (dirigées dans la direction B, fig. 9.25).

L'armature dans la direction " A " perpendiculaire au plan de flexion du poteau (la charge P_u étant centrée) est calculée d'après la méthode des bielles. Dans ce cas on remplace la charge réelle P_u par une charge fictive P_u' correspondant à la contrainte $\sigma_{3/4}$ supposée uniformément répartie sur toute la surface de la semelle. Donc on utilise la formule 9.32 :

$$A_a = \frac{P_u [1 + (3e_{o(u)})/B] \cdot (A - a)}{8 d \sigma_s} =$$

$$= \frac{1260 \cdot 10^3 [1 + (3 \cdot 0,107)/1400] \cdot (1200 - 300)}{8 \cdot 450 \cdot 348} = 905,38 \text{ mm}^2.$$

On prend : dans la direction "B" 10 \varnothing 14 mm avec $A_b = 1540 \text{ mm}^2$;
dans la direction "A" 14 \varnothing 10 mm avec $A_a = 1099 \text{ mm}^2$.

La longueur de scellement des barres sera égale (avec $\tau_s = 2,43 \text{ MPa}$ pour le béton $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$ et acier lisse Fe E 400, tableau 1.2) :

$$l_{s(b)} = (\varnothing f_e) / (4 \tau_s) = (14 \times 400) / (4 \times 2,43) = 576 \text{ mm} > B / 4 ;$$

$$l_{s(a)} = (\varnothing f_e) / (4 \tau_s) = (10 \times 400) / (4 \times 2,43) = 411 \text{ mm} > A / 4 .$$

Donc les barres doivent être prolongées jusqu'aux extrémités et comportées des ancrages courbes.

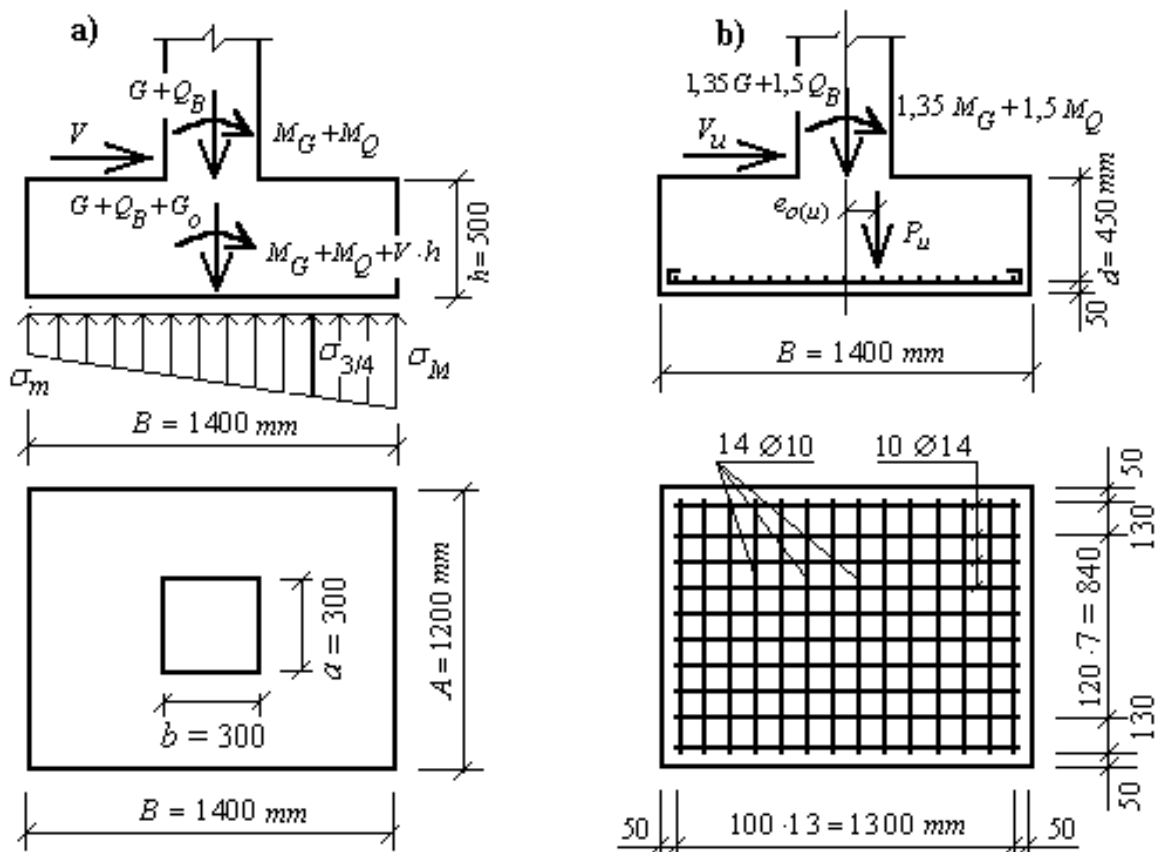


Fig. 9.25

CHAPITRE 10. EXEMPLE DE CALCUL D'UN BATIMENT

On se propose d'étudier les éléments principaux d'un bâtiment à deux niveaux (un hôtel) représenté sur la figure 10.1. Le plancher intermédiaire et le plancher de couverture sont en hourdis avec des poutrelles en béton coulé sur place. Les éléments principaux du bâtiment sont des cadres transversaux formés par des poutres et des poteaux encastés dans les fondations. La rigidité spatiale et la stabilité du bâtiment sont assurées par des cadres transversaux et par des diaphragmes verticaux, ces derniers étant formés par des cloisons et des murs disposés dans les directions transversale et longitudinale du bâtiment.

Les éléments principaux du bâtiment (poteaux, poutres, fondations) sont faits en béton de la qualité $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$. Les armatures principales sont en acier $Fe E 400$, et les armatures secondaires en acier $Fe E 235$. Pour le ferrailage des planchers on utilise les treillis soudés en fils $TLE 500$. La charge verticale d'exploitation pour le plancher intermédiaire est prise comme suit :

- pour des locaux d'habitation $1,75 \text{ kN/m}^2$;
- pour des balcons $3,50 \text{ kN/m}^2$.

10.1. Calcul des planchers du bâtiment

10.1.1. Plancher intermédiaire des locaux d'habitation

Le plancher intermédiaire est fait avec des corps creux en béton léger, de la dalle de compression et des poutrelles en béton ordinaire (lourd). La hauteur réelle totale du plancher est 24 cm (l'épaisseur de la dalle de compression 4 cm). Le revêtement de plancher est fait avec un carrelage céramique (grès cérame $\delta = 0,9 \text{ cm}$, format $10 \times 10 \text{ cm}$, la couche de mortier de pose est de 2 cm). Pour déterminer les charges permanentes appliquées au plancher, on doit prendre en compte le poids propre de la couche d'enduit en plâtre ($\delta = 1,5 \text{ cm}$) et le poids propre des cloisons $0,75 \text{ kN/m}^2$.

1. Pour calculer la dalle de compression, on découpe une bande imaginaire de 1 m de largeur appuyée sur des poutrelles (fig. 10.1 et 10.4). La charge permanente de la dalle est composée par le poids propre des éléments suivants

Tableau 10.1

- revêtement céramique (y compris la couche de mortier)	$0,60 \text{ kN/m}^2$
- dalle de compression $\delta = 4 \text{ cm}$, $\rho = 25 \text{ kN/m}^3$	$1,00 \text{ kN/m}^2$
- cloisons	$0,75 \text{ kN/m}^2$
totale	$2,35 \text{ kN/m}^2$
La charge d'exploitation est prise égale à :	$1,75 \text{ kN/m}^2$.

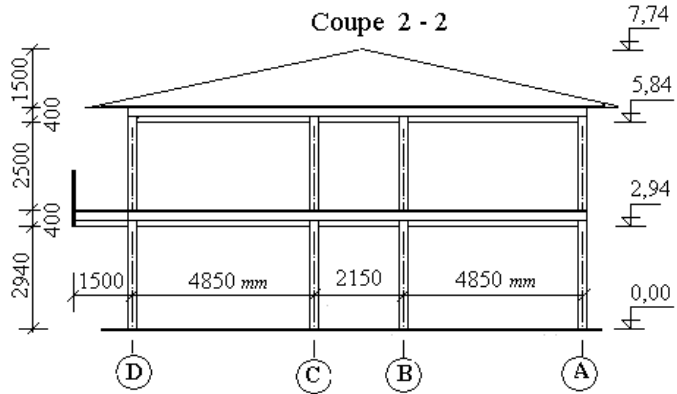
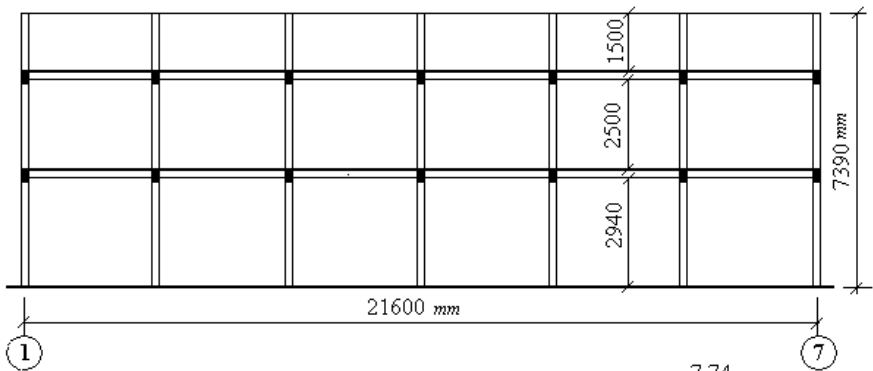
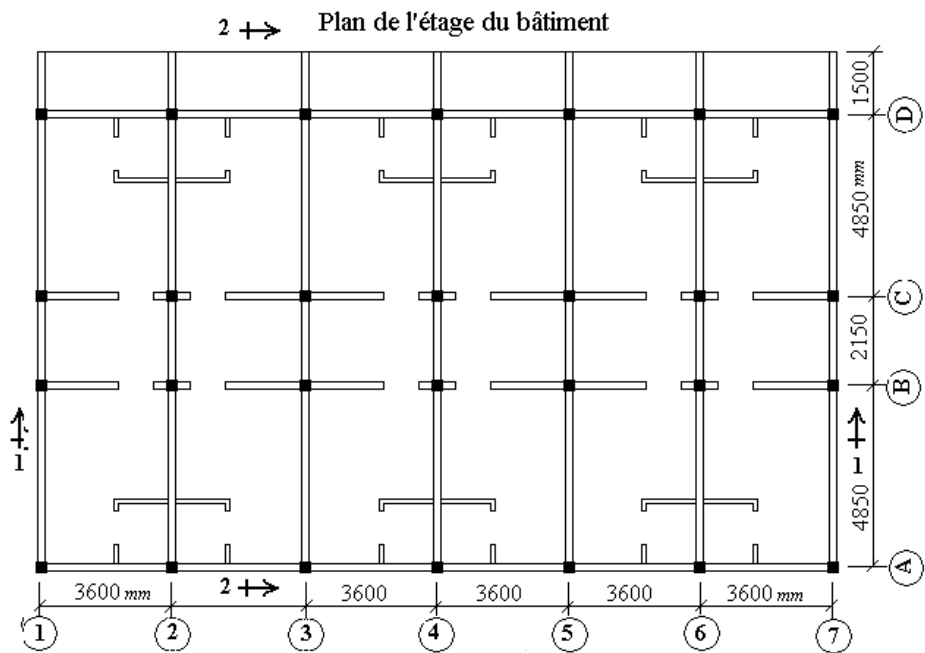


Fig. 10.1

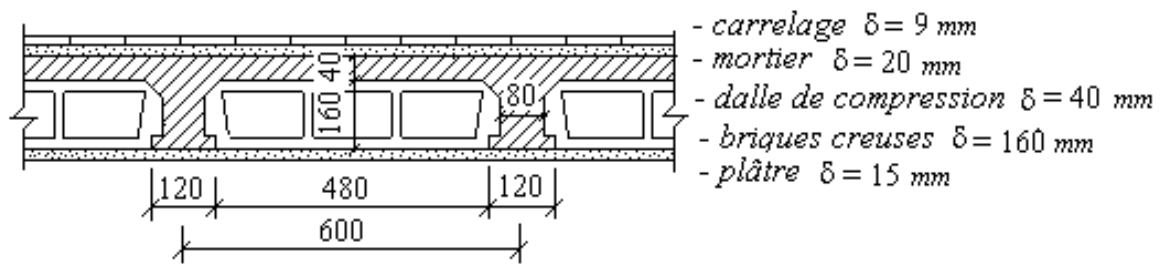


Fig. 10.2. Construction du plancher intermédiaire

Pour une bande de largeur 1 m , la charge par m^2 de la dalle est en même temps la charge par mètre courant de la dalle :

charge permanente $G = 2,35 \times 1,0 = 2,35\text{ kN/m}$;

charge d'exploitation $Q_B = 1,75 \times 1,0 = 1,75\text{ kN/m}$.

La dalle est considérée comme une poutre continue supportant des charges uniformément réparties. La valeur de calcul de ces charges est égale à :

$$1,35 G + 1,5 Q_B = 1,35 \times 2,35 + 1,5 \times 1,75 = 5,8\text{ kN/m}.$$

Vu que la charge d'exploitation peut être considérée comme une charge modérée (voir le chapitre 7), on peut déterminer les valeurs des moments par une méthode simplifiée forfaitaire. En prenant la portée de calcul de la dalle l_d égale à l'écartement des poutrelles, donc $l_d = 60 - 8 = 52\text{ cm}$ (fig. 10.4), on détermine le moment pour une poutre indépendante ayant la même portée que la dalle considérée :

$$M_o = \frac{(1,35G + 1,5Q_B) \cdot (l_d)^2}{8} = \frac{5,8 \cdot 0,52^2}{8} = 0,196\text{ kNm}.$$

Pour ce cas la dalle peut être considérée comme une poutre partiellement encastrée sur les appuis de rive, on prend :

- les moments dans chacune des travées :

$$M_{tr} = 0,8 M_o = 0,8 \times 0,196 = 0,157\text{ kNm} ;$$

- les moments sur des appuis intermédiaires :

$$M_{app} = 0,5 M_o = 0,5 \times 0,196 = 0,098\text{ kNm}.$$

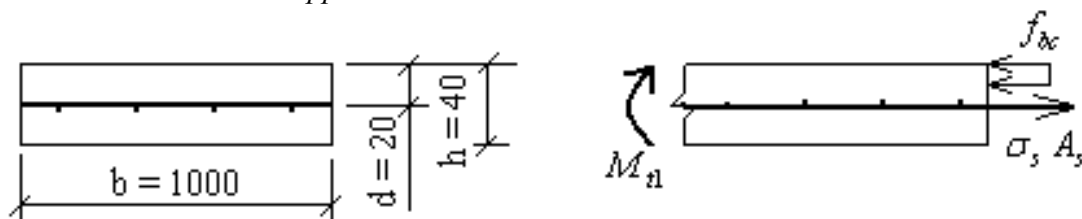


Fig.10.3. Schéma de calcul des armatures de la dalle

En supposant que l'armature est disposée au milieu de l'épaisseur de la dalle, on prend la hauteur utile de la section $d = 0,5 \delta_d = 0,5 \times 40 = 20 \text{ mm}$. Pour le béton ayant la résistance caractéristique à la compression $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$, la résistance de calcul est $f_{bc} = 11,3 \text{ MPa}$.

Alors on calcule comme pour une section rectangulaire de largeur 1 m

$$\mu = \frac{M_{tr}}{f_{bc} b d^2} = \frac{0,157 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 1000 \cdot 20^2} = 0,0347^{*)}$$

L'armature de la dalle est en treillis soudés TLE 500 avec :

$$\sigma_s = f_e / \gamma_s = 500 / 1,15 = 435 \text{ MPa}$$

D'après le tableau A.3 on trouve : $\alpha = 0,0445$; $\beta = 0,9825$. On calcule :

$$A_s = \frac{0,8 \alpha f_{bc} b d}{\sigma_s} = \frac{0,8 \cdot 0,0445 \cdot 11,3 \cdot 1000 \cdot 20}{435} = 18,5 \text{ mm}^2$$

On prend 4 $\emptyset 3$ pour une bande de 1 m de largeur ($A_s = 28 \text{ mm}^2$) avec un espacement $S = 250 \text{ mm}$. Le même ferrailage on prend dans la direction perpendiculaire (fig. 10.4).

2. Les poutrelles du plancher travaillent comme une poutre continue, dont la portée est égale à l'écartement des poutres principales. Les poutrelles sont chargées par des charges uniformément réparties. La charge permanente est composée par le poids propre des éléments suivants :

Tableau 10.2

- revêtement en céramique	0,60 kN / m ²
- plancher (poids propre de la dalle de compression, des briques, des poutrelles)	2,66 kN / m ²
- cloisons	0,75 kN / m ²
- couche d'enduit $\delta = 1,5 \text{ cm}$ (mortier de ciment avec le poids volumique $\rho = 20 \text{ kN / m}^3$)	0,30 kN / m ²
totale	4,31 kN / m ²
- charge utile (d'exploitation) est 1,75 kN / m ² .	

Avec l'écartement des poutrelles $0,6 \text{ m}$, les charges linéaires sont :

- permanente : $G_{(ps)} = (0,60 + 2,66 + 0,75 + 0,30) \times 0,6 = 2,586 \text{ kN / m}$;

- d'exploitation : $Q_{B(ps)} = 1,75 \times 0,6 = 1,05 \text{ kN / m}$.

*) Pour $\mu = 0,0347 < 0,104$ la contrainte du béton $\sigma_{bc} < f_{bc}$, mais dans ce cas la précision de calcul n'influence trop sur les résultats (le ferrailage est tout-à fait faible).

Pour le calcul statique de la poutrelle, on utilise la méthode forfaitaire (la charge d'exploitation étant modérée, chapitre 7). Les moments sur les appuis de la poutrelle sont pris d'après la figure 10.5 : $M_B = 0,5 M_O$, $M_C = 0,4 M_O$.

La largeur de la poutre principale est prise égale à 20 cm, alors la portée des poutrelles (l'écartement des poutres principales) est :

$$l_{ps} = 3,6 - 0,2 = 3,4 \text{ m}.$$

Le moment de flexion dans la travée de la poutre isostatique est :

$$\begin{aligned} M_O &= \frac{[1,35 G_{(ps)} + 1,5 Q_{B(ps)}] (l_{ps})^2}{8} = \\ &= \frac{(1,35 \cdot 2,586 + 1,5 \cdot 1,05) 3,4^2}{8} = 7,32 \text{ kN m}. \end{aligned}$$

Alors les moments sur les appuis intermédiaires seront :

$$M_B = 0,5 \times 7,32 = 3,660 \text{ kN m} ;$$

$$M_C = 0,4 \times 7,32 = 2,928 \text{ kN m}.$$

On suppose aussi qu'il existe, sur l'appui de rive, un moment d'encastrement partiel égal à $0,2 M_O$:

$$M_A = 0,2 \times 7,32 = 1,464 \text{ kN m}.$$

Les moments dans les travées de la poutre sont pris d'après les conditions :

$$M_t + [(M_w + M_e) / 2] \geq (1 + 0,3 \alpha) M_O ;$$

$$M_t + [(M_w + M_e) / 2] \geq 1,05 M_O ;$$

$$M_t \geq [(1,2 + 0,3 \alpha) / 2] M_O.$$

Le rapport des charges d'exploitation à la somme des charges permanentes et des charges d'exploitation (les valeurs nominales) est :

$$\alpha = \frac{Q_{B(ps)}}{G_{(ps)} + Q_{B(ps)}} = \frac{1,05}{2,586 + 1,05} = 0,289.$$

Le moment pour la travée de rive est alors (avec $M_w = M_A = 1,464 \text{ kN m}$ et $M_e = M_B = 3,660 \text{ kN m}$) :

$$\begin{aligned} M_{t1} &\geq (1 + 0,3 \alpha) M_O - [(M_w + M_e) / 2] = \\ &= (1 + 0,3 \times 0,289) 7,32 - [(1,464 + 3,660) / 2] = 5,39 \text{ kN m} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{t1} &\geq 1,05 M_O - [(M_w + M_e) / 2] = \\ &= 1,05 \times 7,32 - [(1,464 + 3,660) / 2] = 5,12 \text{ kN m} ; \end{aligned}$$

$$M_{t1} \geq [(1,2 + 0,3 \alpha) / 2] M_O = [(1,2 + 0,3 \times 0,289) / 2] 7,32 = 4,709 \text{ kN m}.$$

Donc on prend pour la travée de rive $M_{t1} = 5,39 \text{ kN m}$.

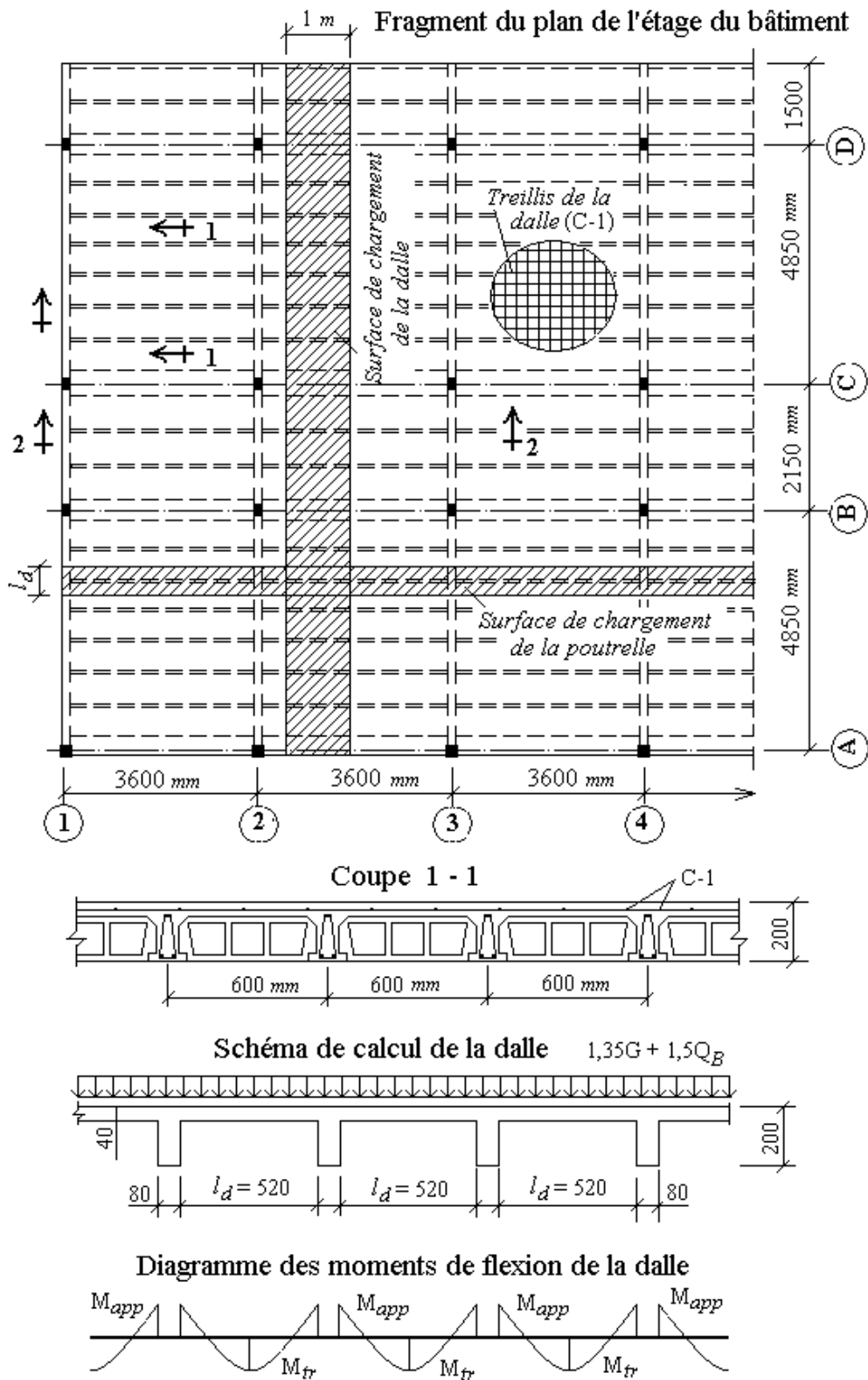


Fig.10.4. Schémas de calcul du plancher intermédiaire du bâtiment

Schéma d'application des charges des poutrelles

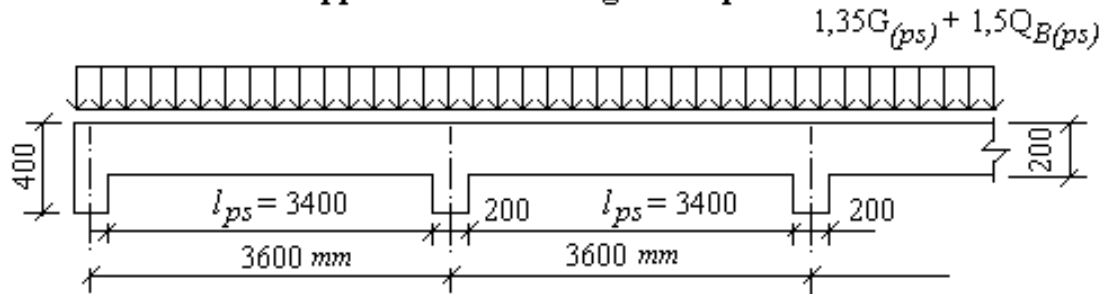
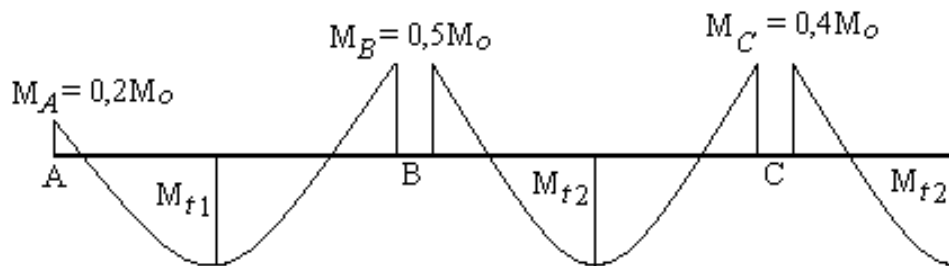


Diagramme des moments de flexion des poutrelles



Ferrailage des poutrelles du plancher intermédiaire

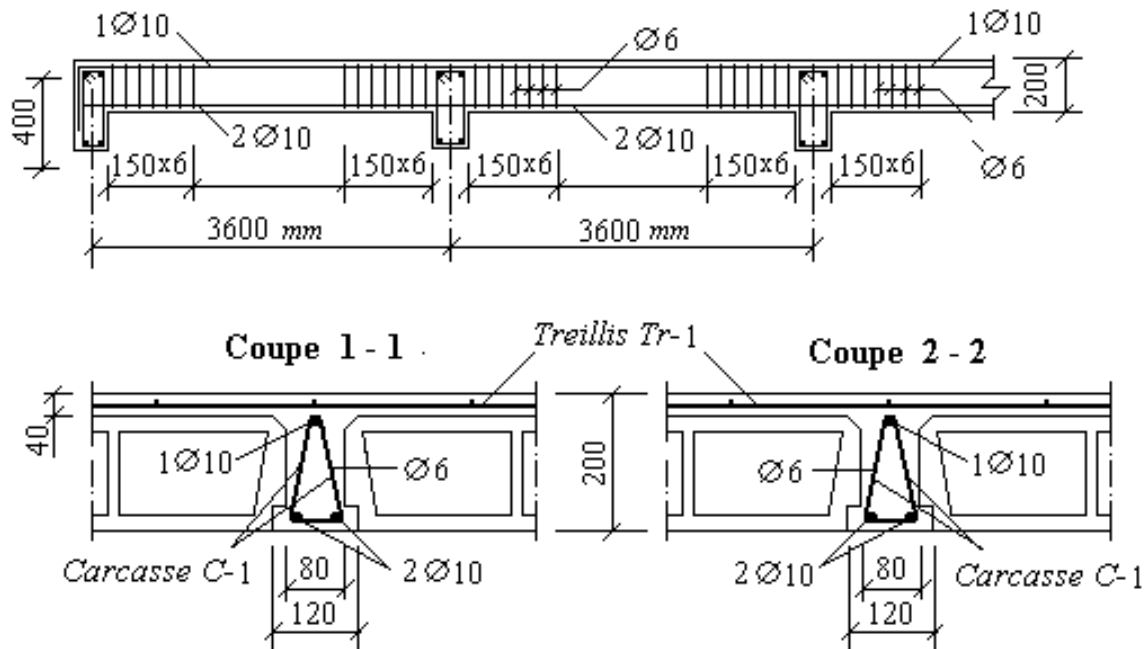


Fig.10.5. Schémas de calcul des poutrelles

Pour la travée voisine de celle de rive on a (avec $M_w = M_B = 3,660 \text{ kN m}$ et $M_e = M_C = 2,928 \text{ kN m}$) :

$$M_{t2} \geq (1 + 0,3\alpha)M_o - \frac{M_w + M_e}{2} =$$

$$= (1 + 0,3 \cdot 0,289) 7,32 - \frac{3,660 + 2,928}{2} = 4,661 \text{ kN m};$$

$$M_{t2} \geq 1,05M_o - \frac{M_w - M_e}{2} = 1,05 \cdot 7,32 + \frac{3,660 - 2,928}{2} = 4,392 \text{ kN m};$$

$$M_{t2} \geq \frac{1 + 0,3\alpha}{2} M_o = \frac{1 + 0,3 \cdot 0,289}{2} 7,32 = 3,977 \text{ kN m}.$$

On prend pour cette travée $M_{t2} = 4,661 \text{ kN m}$.

Calcul de l'armature pour la section dans la première travée. La section à calculer est en T avec la table dans la zone comprimée. La largeur de la table ne doit pas dépasser les valeurs suivantes :

$$b \leq l_d = 60 \text{ cm};$$

$$b \leq [(l_{ps} / 10) 2] + b_o = [(340 / 10) 2] + 8 = 76 \text{ cm},$$

où $b_o = b_{ps} = 8 \text{ cm}$, la largeur de la poutrelle ;

$l_{ps} = 340 \text{ cm}$, la portée de la poutrelle.

On prend pour le calcul $b = 60 \text{ cm} = 600 \text{ mm}$.

Dans la première travée $M_{t1} = 5,39 \text{ kN m}$. En supposant que la hauteur de la zone comprimée $0,8 y \leq h_o$ (figure 10.6), on calcule l'armature comme pour une section rectangulaire de dimension $b \times d$ (avec $d = 20 - 3 = 17 \text{ cm}$) :

$$\mu = \frac{M_{t1}}{f_{bc} b d^2} = \frac{5,39 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 600 \cdot 170^2} = 0,0275 \approx 0,028. **)$$

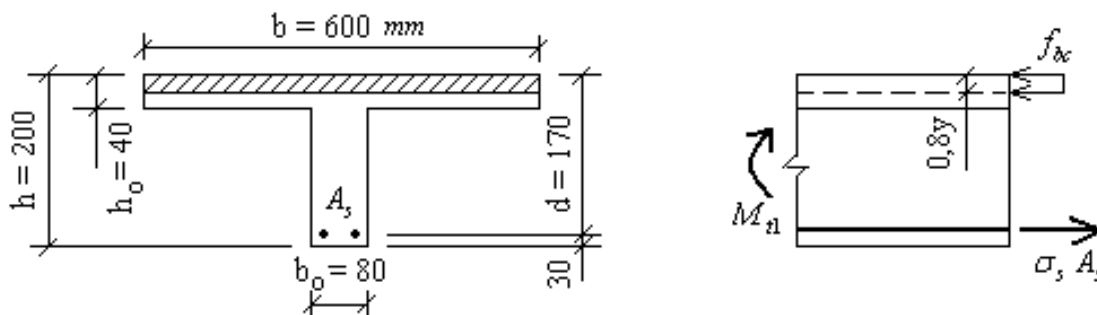


Fig. 10.6. Schéma de calcul de la poutrelle dans la travée

D'après le tableau A.3 on trouve : $\alpha = 0,0355$, $\beta = 0,986$, alors la hauteur de la zone comprimée est : $0,8 y = 0,8 \alpha d = 0,8 \times 0,0355 \times 170 = 4,8 \text{ mm} < h_0$. Donc l'axe neutre est dans la table de compression. Comme armature on utilise l'acier de nuance Fe E 400 avec $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa}$:

$$A_s = \frac{M_{t1}}{\beta d \sigma_s} = \frac{5,39 \cdot 10^6}{0,986 \cdot 170 \cdot 348} = 92,4 \text{ mm}^2.$$

On prend : 2 \varnothing 10 mm avec $A_s = 157 \text{ mm}^2$.

Calcul de l'armature pour la deuxième travée. Le moment dans la travée est $M_{t2} = 4,661 \text{ kNm}$. Avec les mêmes dimensions on a :

$$\mu = \frac{M_{t2}}{f_{bc} b d^2} = \frac{4,661 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 600 \cdot 170^2} = 0,0238 \approx 0,024. **)$$

D'après le tableau A.3 on trouve : $\alpha = 0,0304$, $\beta = 0,988$ et on calcule :

$$A_s = \frac{M_{t2}}{\beta d \sigma_s} = \frac{4,661 \cdot 10^6}{0,988 \cdot 170 \cdot 348} = 79,7 \text{ mm}^2.$$

Donc, on a les mêmes : 2 \varnothing 10 mm, avec $A_s = 157 \text{ mm}^2$.

Calcul de la section sur l'appui "B". Le moment $M_B = 3,660 \text{ kNm}$.

La zone comprimée se trouve en bas, donc la section à calculer est rectangulaire avec les dimensions $b_0 \times d = 8 \text{ cm} \times 17 \text{ cm}$ (figure 10.7).

Pour calculer les armatures tendues sur l'appui "B" on prend en compte les armatures comprimées qui sont constituées par le prolongement des barres d'armatures prévues dans la partie centrale de la travée et destinées à reprendre les moments M_{t1} et M_{t2} . Vu que ces armatures existent, il est intéressant de les prendre en compte dans le calcul, même si la section pouvait être armée uniquement par des armatures tendues *).

D'après les normes, la part du moment de flexion équilibré par les armatures comprimées ne peut dépasser 40 % du moment total (voir paragraphe 3.1.6).

Alors, en posant $\sigma_s' = \sigma_s = 348 \text{ MPa}$ et $A_s' = 157 \text{ mm}^2$, on calcule le moment qui peut être équilibré par la section fictive (fig. 3.7, c) :

$$M_2^f = A_s' (d - d') \sigma_s' = 157 (170 - 30) 348 = 7,649 \times 10^6 \text{ Nmm}.$$

*) Il est à noter qu'on ne peut pas prendre en compte les armatures comprimées pour une section en travée, malgré qu'en réalité elles existent, parce que ces armatures ne sont pas maintenues par des barres transversales, voir la figure 10.5. Dans ce cas ces armatures sont considérées comme simples barres de montage.

***) Pour le cas considéré on néglige la précision de la contrainte du béton comprimé, malgré que $\mu = 0,028 < 0,104$ (voir l'exemple de calcul 3.9).

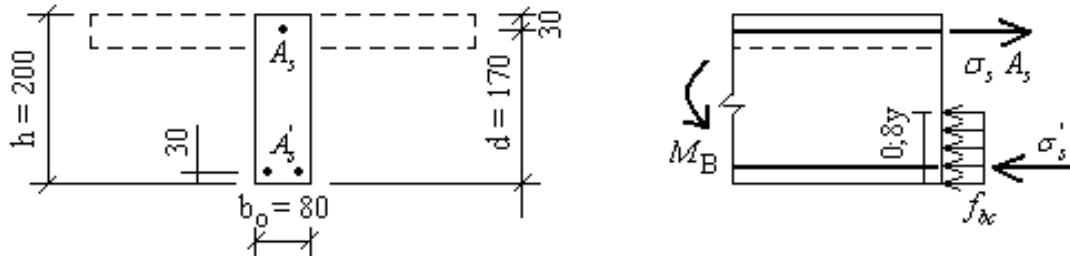


Fig. 10.7. Schéma de calcul de la poutrelle sur l'appui

On a que $M_2^f = 7,649 \text{ kN m} > 0,4 M_B = 0,4 \times 3,660 = 1,464 \text{ kN m}$, donc on prend $M_2^f = 1,464 \text{ kN m}$. Pour la section fictive (fig. 3.7, b) on a :

$$M_1^f = M_B - M_2^f = 3,660 - 1,464 = 2,196 \text{ kN m.}$$

$$\mu_1 = \frac{M_1^f}{f_{bc} b_o d^2} = \frac{2,196 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 80 \cdot 170^2} = 0,084 .$$

Les coefficients correspondants sont : $\alpha = 0,1099$; $\beta = 0,956$.

La hauteur de la zone comprimée dans ce cas est égale à :

$$y = \alpha d = 0,1099 \times 170 = 18,7 \text{ mm} < d' = 30 \text{ mm},$$

c'est-à-dire que l'armature A_s' devient tendue mais avec faible contrainte. Alors on calcule A_s comme pour une section avec des armatures dans la zone tendue seulement (en négligeant d'armature comprimée) :

$$\mu = \frac{M_B}{f_{bc} b_o d^2} = \frac{3,660 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 80 \cdot 170^2} = 0,140;$$

$$\alpha = 0,1895, \quad \beta = 0,924,$$

$$A_s = \frac{M_B}{\beta d \sigma_s} = \frac{3,660 \cdot 10^6}{0,924 \cdot 170 \cdot 348} = 66,95 \text{ mm}^2 .$$

De la même manière on calcule l'armature sur l'appui "C".

Le moment $M_C = 2,928 \text{ kN m} < M_B = 3,660 \text{ kN m}$. donc on néglige d'armature A_s' :

$$\mu = \frac{M_C}{f_{bc} b_o d^2} = \frac{2,928 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 80 \cdot 170^2} = 0,112;$$

$\alpha = 0,1489$, $\beta = 0,94$ et on calcule :

$$A_s = \frac{M_C}{\beta d \sigma_s} = \frac{2,928 \cdot 10^6}{0,94 \cdot 170 \cdot 348} = 52,65 \text{ mm}^2 .$$

On prend 1 $\varnothing 10 \text{ mm}$ sur l'appui "B" et "C" avec $A_s = 78,5 \text{ mm}^2$ (fig. 10.5).

Les poutrelles doivent être calculées à l'action des efforts tranchants.

Les dimensions de la section transversale des poutrelles sont vérifiées à partir des efforts tranchants sur l'appui. Dans le cas considéré l'effort tranchant maximal a lieu sur le premier appui intermédiaire de gauche.

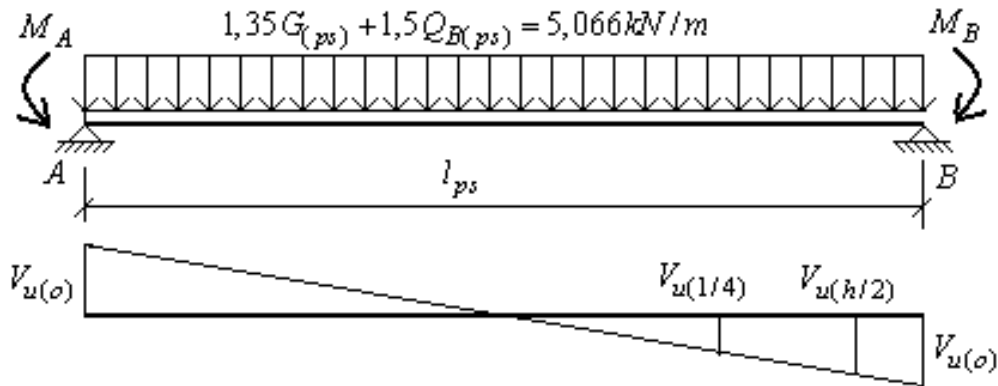


Fig. 10.8

Cet effort a pour valeur (fig. 10.8) :

$$V_{u(o)} = \frac{(1,35 G_{(ps)} + 1,5 Q_{B(ps)}) l_{ps}}{2} + \frac{M_B - M_A}{l_{ps}} =$$

$$= \frac{5,066 \cdot 3,4}{2} + \frac{3,660 - 1,464}{3,4} = 9,258 \text{ kN}.$$

La contrainte tangentielle maximale est :

$$\tau_{u(o)} = \frac{V_{u(o)}}{b_o d} = \frac{9,258 \cdot 10^3}{80 \cdot 170} = 0,68 \text{ MPa}.$$

Pour le cas des armatures droites et quand la fissuration est non préjudiciable, il faut que les conditions suivantes soient satisfaites (5.3) :

$$\tau_{u(o)} = 0,68 \text{ MPa} \leq 0,2 f_{c28} / \gamma_b = 0,2 \times 20 / 1,5 = 2,67 \text{ MPa} ;$$

$$\tau_{u(o)} = 0,68 \text{ MPa} \leq 5,0 \text{ MPa}.$$

Les conditions sont satisfaites, c'est-à-dire que les dimensions de la section transversale sont suffisantes.

Pour calculer le ferrailage de la section inclinée on prend en considération l'effort tranchant à la distance $h/2$ de l'appui :

$$V_{u(h/2)} = V_{u(o)} - \frac{(1,35 G_{(ps)} + 1,5 Q_{B(ps)}) h}{2} = 9,258 - \frac{5,066 \cdot 0,2}{2} = 8,751 \text{ kN}.$$

La contrainte tangentielle alors sera égale à :

$$\tau_{u(h/2)} = V_{u(h/2)} / b_o d = (8,751 \times 10^3) / (80 \times 170) = 0,643 \text{ MPa}.$$

Le coefficient de ferrailage de la section par des barres droites est calculé à l'aide de la formule (5.12) :

$$\rho_t = \frac{A_t}{b_o S_t} = \frac{\tau_{u(h/2)} - \tau_o}{0,8 f_e} = \frac{0,643 - 0,54}{0,8 \cdot 235} = 0,000548.$$

où $f_e = 235 \text{ MPa}$, est la résistance caractéristique de l'acier $Fe E 235$;

$$\tau_o = 0,3 f_{t28}^* k = 0,3 \times 1,8 \times 1,0 = 0,54 \text{ MPa} ;$$

$f_{ij}^* = f_{t28} = 1,8 \text{ MPa}$, la résistance du béton prise égale à la résistance caractéristique du béton à la traction ;

$k = 1,0$, pour le cas de la flexion simple sans reprise de bétonnage.

La valeur de ρ_t doit être supérieure aux valeurs minimales (condition 5.14) :

$$\rho_{t,\min} = \frac{0,5 \tau_{u(h/2)}}{f_e} = \frac{0,5 \cdot 0,643}{235} = 0,00137 ;$$

$$\rho_{t,\min} = \frac{0,4}{f_e} = \frac{0,4}{235} = 0,0017.$$

On prend la plus grande valeur parmi les trois : $\rho_t = 0,0017$.

Comme armature transversale on utilise les barres droites de 6 mm de diamètre (d'après la condition $\varnothing_t \geq \varnothing_l / 3 = 10/3$). Dans la section transversale de la poutrelle on dispose un cadre à deux branches, donc $A_t = 56,6 \text{ mm}^2$. L'espacement exigé des barres verticales est :

$$S_t = \frac{A_t}{\rho_t b_o} = \frac{56,6}{0,0017 \cdot 80} = 416 \text{ mm}.$$

D'après les exigences constructives cet espacement ne doit pas dépasser :

$$S_t \leq 0,9 d = 0,9 \times 170 = 153 \text{ mm}, \quad S_t \leq 15 \varnothing_l = 15 \times 10 = 150 \text{ mm}.$$

On prend définitivement $S_t = 150 \text{ mm}$ sur le 1/4 de la portée adjacente à un appui des poutrelles. Dans la moitié centrale des poutrelles on peut admettre ne pas prévoir d'armature transversale puisque les conditions suivantes sont remplies :

- le plancher n'est pas soumis à des efforts dynamiques ;
- la hauteur totale des poutrelles est inférieure à 40 cm ;
- la contrainte tangentielle dans la zone considérée (à la distance 1/4 de l'appui) ne dépasse pas $0,03 f_{c28}$. En effet :

$$V_{u(1/4)} = V_{u(o)} - [(1,35 G_{(ps)} + 1,5 Q_{B(ps)}) l_{ps}] / 4 =$$

$$= 9,258 - (5,066 \times 3,4) / 4 = 4,952 \text{ kN} ;$$

$$\tau_{u(1/4)} = (4,952 \times 10^3) / (80 \times 170) = 0,364 \text{ MPa}.$$

Donc $\tau_{u(1/4)} = 0,364 \text{ MPa} < 0,03 f_{c28} = 0,03 \times 20 = 0,6 \text{ MPa}$.

10.1.2. Plancher des balcons

1) *La construction du plancher des balcons* est la même que celle des locaux d'habitation (avec corps creux, dalle de compression et poutrelles, figure 10.2). La charge permanente (sans tenir compte du poids propre des cloisons, qui sont absentes dans les balcons) par 1 m^2 du plancher est égale à $0,60 + 1,0 = 1,60 \text{ kN/m}^2$ et la charge d'exploitation $3,50 \text{ kN/m}^2$. Donc pour une bande de largeur 1 m les valeurs caractéristiques des charges sont :

$G = (0,60 + 1,00) \times 1,0 = 1,60 \text{ kN/m}$, $Q_B = 3,5 \times 1,0 = 3,5 \text{ kN/m}$,
Pour la même bande la valeur totale des charges de calcul est :

$$1,35 G + 1,5 Q_B = 1,35 \times 1,60 + 1,5 \times 3,5 = 7,41 \text{ kN/m}.$$

Les moments sont calculés comme pour une poutre continue par la méthode forfaitaire :

$$M_o = \frac{(1,35 G + 1,5 Q_B) l_d^2}{8} = \frac{7,41 \cdot 0,52^2}{8} = 0,25 \text{ kNm};$$
$$0,8 M_o = 0,8 \times 0,250 = 0,20 \text{ kNm};$$
$$0,5 M_o = 0,5 \times 0,250 = 0,125 \text{ kNm}.$$

Les armatures exigées dans la travée (avec $b = 100 \text{ cm}$, $h = 4 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$)

$$\mu = \frac{M_{tr}}{f_{bc} b d^2} = \frac{0,20 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 1000 \cdot 20^2} = 0,0442$$

Pour $\mu = 0,044$, on trouve (tableau A.3): $\alpha = 0,0562$; $\beta = 0,978$.

$$A_s = \frac{M_{tr}}{\beta d \sigma_s} = \frac{0,20 \cdot 10^6}{0,978 \cdot 20 \cdot 435} = 23,5 \text{ mm}^2.$$

Pour le ferrailage on prend les mêmes treillis dans les travées et sur les appuis avec $4 \text{ } \varnothing 3 \text{ mm}$ dans la direction de la travée et $4 \text{ } \varnothing 3 \text{ mm}$ dans la direction perpendiculaire (donc le même ferrailage que celui de la dalle des locaux d'habitation).

2) *Les poutrelles dans les balcons* sont calculées de la même manière que celles pour le plancher des locaux d'habitation. D'après les données du tableau 10.1 on calcule la charge permanente par 1 m de la poutrelle (l'écartement des poutrelles étant $0,6 \text{ m}$) :

$$G_{(ps)} = 0,6 (2,66 + 0,6 + 0,3) = 2,136 \text{ kN/m}.$$

La charge d'exploitation est $Q_{B(ps)} = 0,6 \times 3,50 = 2,10 \text{ kN/m}$.

La charge totale de calcul :

$$1,35 G_{(ps)} + 1,5 Q_{B(ps)} = 1,35 \times 2,136 + 1,5 \times 2,10 = 6,03 \text{ kN/m}.$$

Les moments de flexion sont (avec $l_{ps} = 3,4 \text{ m}$) :

$$M_o = \frac{[1,35 G_{(ps)} + 1,5 Q_{B(ps)}] (l_{ps})^2}{8} = \frac{6,03 \cdot 3,4^2}{8} = 8,713 \text{ kN m};$$

$$M_A = 0,2 M_o = 0,2 \times 8,713 = 1,743 \text{ kN m};$$

$$M_B = 0,5 M_o = 0,5 \times 8,713 = 4,356 \text{ kN m};$$

$$M_C = 0,4 M_o = 0,4 \times 8,713 = 3,485 \text{ kN m}.$$

Le rapport des charges caractéristiques :

$$\alpha = \frac{Q_{B(ps)}}{G_{(ps)} + Q_{B(ps)}} = \frac{2,1}{2,136 + 2,1} = 0,496.$$

Le moment fléchissant dans la première travée ($M_w = M_A = 1,743 \text{ kN m}$ et $M_e = M_B = 4,356 \text{ kN m}$) :

$$\begin{aligned} M_{t1} &\geq (1 + 0,3 \alpha) M_o - [(M_w + M_e) / 2] = \\ &= (1 + 0,3 \times 0,496) 8,713 - [(1,743 + 4,356) / 2] = 6,959 \text{ kN m}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{t1} &\geq 1,05 M_o - [(M_w + M_e) / 2] = \\ &= (1,05 \times 8,713) - [(1,743 + 4,356) / 2] = 6,099 \text{ kN m}; \end{aligned}$$

$$M_{t1} \geq [(1,2 + 0,3 \alpha) / 2] M_o = [(1,2 + 0,3 \times 0,496) / 2] 8,713 = 5,876 \text{ kN m}.$$

On prend pour le calcul $M_{t1} = 6,959 \text{ kN m}$.

Le moment fléchissant dans la deuxième travée ($M_w = M_B = 4,356 \text{ kN m}$ et $M_e = M_C = 3,485 \text{ kN m}$) :

$$\begin{aligned} M_{t2} &\geq (1 + 0,3 \alpha) M_o - [(M_w + M_e) / 2] = \\ &= (1 + 0,3 \times 0,496) 8,713 - [(4,356 + 3,485) / 2] = 6,089 \text{ kN m}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{t2} &\geq 1,05 M_o - [(M_w + M_e) / 2] = \\ &= (1,05 \times 8,713) - [(4,356 + 3,485) / 2] = 5,228 \text{ kN m}; \end{aligned}$$

$$M_{t2} \geq [(1 + 0,3 \alpha) / 2] M_o = [(1 + 0,3 \times 0,496) / 2] 8,713 = 5,004 \text{ kN m}$$

On prend pour cette travée $M_{t2} = 6,089 \text{ kN m}$.

L'armature dans la première travée est calculée d'après $M_{t1} = 6,959 \text{ kN m}$:

$$\mu = \frac{M_{t1}}{f_{bc} b d^2} = \frac{6,959 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 600 \cdot 170^2} = 0,0355 \approx 0,036.$$

Pour $\mu = 0,036$, on trouve (tableau A.3) : $\alpha = 0,0459$; $\beta = 0,982$.

$0,8 y = 0,8 \alpha d = 0,8 \times 0,0459 \times 170 = 6,2 \text{ mm} < h_o = 40 \text{ mm}$, donc la section à calculer est rectangulaire avec $b \times d = 600 \times 170 \text{ (mm)}$.

$$A_s = \frac{M_{t1}}{\beta d \sigma_s} = \frac{6,959 \cdot 10^6}{0,982 \cdot 170 \cdot 348} = 120 \text{ mm}^2.$$

On prend pour ferrailage 2 $\varnothing 10 \text{ mm}$ avec $A_s = 157 \text{ mm}^2$.

Dans la deuxième travée $M_{t2} = 6,089 \text{ kNm}$.

$$\mu = \frac{M_{t2}}{f_{bc} b d^2} = \frac{6,089 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 600 \cdot 170^2} = 0,031.$$

Pour $\mu = 0,0342$, on trouve (tableau A.3): $\alpha = 0,0432$; $\beta = 0,984$.

$$A_s = \frac{M_{t2}}{\beta d \sigma_s} = \frac{6,089 \cdot 10^6}{0,984 \cdot 170 \cdot 348} = 104,6 \text{ mm}^2.$$

Soit : 2 $\varnothing 10 \text{ mm}$ avec $A_s = 157 \text{ mm}^2$.

Sur l'appui intermédiaire "B" la section à calculer est rectangulaire avec les dimensions (en mm) $b_o \times d = 80 \times 170$ et armée dans la zone comprimée par 2 barres de 10 mm de diamètre ($A_s' = 157 \text{ mm}^2$). Le moment $M_B = 4,356 \text{ kNm}$.

D'après les calculs précédents (plancher pour les locaux d'habitation) on prend le moment $M_2^f = 0,4 M_B = 0,4 \times 4,356 = 1,742 \text{ kNm}$, et le moment :

$$M_1^f = M_B - M_2^f = 4,356 - 1,742 = 2,614 \text{ kNm}.$$

On calcule :

$$\mu_1 = \frac{M_1^f}{f_{bc} b_o d^2} = \frac{2,614 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 80 \cdot 170^2} = 0,10.$$

$\alpha = 0,132$; $\beta = 0,947$; $y = \alpha d = 0,132 \times 170 = 22,4 \text{ mm} > d' = 30 \text{ mm}$, donc on ne prend pas en compte l'armature A_s' . On calcule :

$$\mu = \frac{M_B}{f_{bc} b_o d^2} = \frac{4,356 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 80 \cdot 170^2} = 0,1667;$$

$\alpha = 0,2294$; $\beta = 0,908$, avec ces valeurs on trouve :

$$A_s = \frac{M_B}{\beta d \sigma_s} = \frac{4,356 \cdot 10^6}{0,908 \cdot 170 \cdot 348} = 81,1 \text{ mm}^2;$$

On prend 1 $\varnothing 12 \text{ mm}$ avec $A_s = 131 \text{ mm}^2$.

Sur l'appui intermédiaire "C" le moment $M_C = 3,485 \text{ kN m}$. De la même manière on calcule :

$$\mu = \frac{M_C}{f_{bc} b_o d^2} = \frac{3,485 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 80 \cdot 170^2} = 0,13,$$

$$\alpha = 0,179 ; \quad \beta = 0,9285 ;$$

$$A_s = \frac{M_C}{\beta d \sigma_s} = \frac{3,485 \cdot 10^6}{0,9285 \cdot 170 \cdot 348} = 63,4 \text{ mm}^2.$$

On prend 1 \varnothing 10 mm avec $A_s = 78,5 \text{ mm}^2$.

Calcul des sections inclinées sous l'action des efforts tranchants L'effort tranchant maximal pour des poutrelles considérées est égal à (fig. 10.8) :

$$\begin{aligned} V_{u(o)} &= \frac{(1,35 G_{(ps)} + 1,5 Q_{B(ps)}) l_{ps}}{2} + \frac{M_B - M_A}{l_{ps}} = \\ &= \frac{6,03 \cdot 3,4}{2} + \frac{4,356 - 1,743}{3,4} = 11,019 \text{ kN}. \end{aligned}$$

La contrainte tangentielle due à l'effort tranchant est :

$$\tau_{u(o)} = \frac{V_{u(o)}}{b_o d} = \frac{11,019 \cdot 10^3}{80 \cdot 170} = 0,81 \text{ MPa}.$$

Pour le cas des armatures droites et quand la fissuration est non préjudiciable, il faut que les conditions suivantes soient satisfaites (5.3) :

$$\tau_{u(o)} = 0,81 \text{ MPa} < 0,2 f_{bc} / \gamma_b = 0,2 \times 20 / 1,5 = 2,67 \text{ MPa} ;$$

$$\tau_{u(o)} = 0,81 \text{ MPa} < 5,0 \text{ MPa}.$$

Donc les dimensions transversales des poutrelles sont suffisantes.

Pour calculer le ferrailage de la section inclinée on prend en considération l'effort tranchant à la distance $h/2$ de l'appui :

$$V_{u(h/2)} = V_{u(o)} - \frac{[1,35 G_{(ps)} + 1,5 Q_{B(ps)}] h}{2} = 11,019 - \frac{6,03 \cdot 0,2}{2} = 10,416 \text{ kN}.$$

La contrainte tangentielle alors sera égale à :

$$\tau_{u(h/2)} = V_{u(h/2)} / b_o d = (10,416 \times 10^3) / (80 \times 170) = 0,766 \text{ MPa}.$$

Le coefficient de ferrailage de la section par des barres droites est calculé à l'aide de la formule (5.12) :

$$\rho_t = \frac{A_t}{b_o S_t} = \frac{\tau_{u(h/2)} - \tau_o}{0,8 f_e} = \frac{0,766 - 0,54}{0,8 \cdot 235} = 0,0012.$$

où $f_e = 235 \text{ MPa}$, la résistance caractéristique de l'acier $Fe E 235$;

$$\tau_o = 0,3 f_{t28}^* k = 0,3 \times 1,8 \times 1,0 = 0,54 \text{ MPa} ;$$

$f_{ij}^* = f_{t28} = 1,8 \text{ MPa}$, la résistance du béton prise égale à la résistance caractéristique du béton à la traction ;

$k = 1,0$, pour le cas de la flexion simple sans reprise de bétonnage.

La valeur du coefficient de ferrailage $\rho_t = 0,0012$ est inférieure à la valeur minimale $\rho_{t,min} = 0,0017$, donc pour le calcul on doit prendre $\rho_t = 0,0017$.

Avec cette valeur de ρ_t on a déjà calculé le ferrailage par des armatures transversales (voir le calcul des sections inclinées des poutrelles du plancher des locaux d'habitation). Donc comme armatures transversales on utilise les barres droites de 6 mm de diamètre. Dans la section transversale de la poutrelle on dispose un cadre à 2 branches, donc $A_t = 57 \text{ mm}^2$ avec l'espacement $S_t = 150 \text{ mm}$ (ferrailage des poutrelles est donné sur les fig. 10.5, 10.9).

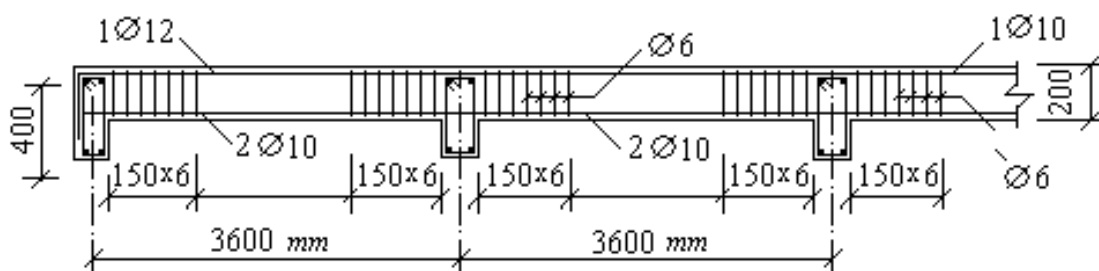


Fig. 10.9. Ferrailage des poutrelles du plancher des balcons

10.1.3 Plancher de couverture du bâtiment

Tableau 10.3

- étanchéité (multicouche)	0,10 kN/m^2
- mortier de ciment (couche de forme de pente) $\delta = 12 \text{ cm}, \rho = 20 \text{ kN/m}^3$	2,40 kN/m^2
- dalle de compression $\delta = 4 \text{ cm}, \rho = 25 \text{ kN/m}^3$	1,00 kN/m^2
- plancher à corps creux (y compris la dalle de compression)	2,66 kN/m^2
- couche d'enduit $\delta = 1,5 \text{ cm}, \rho = 20 \text{ kN/m}^3$	0,30 kN/m^2
Totale	5,46 kN/m^2

La construction du plancher de couverture est donnée sur la figure 10.10.
 La charge permanente appliquée à ce plancher est donnée par le tableau 10.3.

La charge d'exploitation pour le plancher de couverture est prise (d'après les normes) égale à : $1,0 \text{ kN/m}^2$.

La charge de calcul par 1 m^2 du plancher est égale à :

$$1,35 G + 1,5 Q_B = 1,35 (0,10 + 2,40 + 1,00) + 1,5 \times 1,00 = 6,225 \text{ kN/m}^2.$$

La charge de calcul par 1 m de la poutrelle :

$$\begin{aligned} & [1,35 G_{(ps)} + 1,5 Q_{B(ps)}] l_d = \\ & = [1,35 (0,10 + 2,40 + 2,66 + 0,30) + 1,5 \times 1,0] 0,6 = 5,323 \text{ kN/m}. \end{aligned}$$

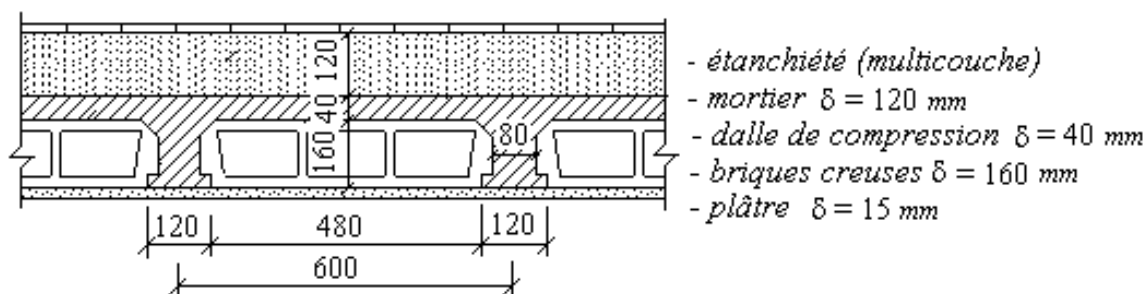


Fig. 10.10. Construction du plancher de couverture

On peut constater que les charges appliquées au plancher de couverture dépassent un peu les charges appliquées au plancher intermédiaire de locaux d'habitation. En prenant en compte le fait que le ferrailage du plancher de locaux d'habitation soit pris avec quelque excès, on peut prendre (sans calcul) pour le plancher de couverture la même construction des armatures (fig. 10.5).

10.2. Calcul statique du portique du bâtiment

Le portique du bâtiment est constitué par des poteaux et des poutres principales qui sont assemblés par les joints rigides. Dans la direction transversale (ainsi que longitudinale) la rigidité spatiale du bâtiment est assurée par des cadres (composés de poteaux et de poutres) et par des diaphragmes (composés de murs et de cloisons). Le calcul statique du bâtiment à étages doit tenir compte du travail commun des cadres et des diaphragmes (entretoises) ce qui représente des systèmes à un grand nombre d'éléments hyperstatiques.

En général, avant de procéder au calcul statique, on analyse le schéma théorique et constructif du cadre et on cherche des simplifications possibles pouvant faciliter le calcul, mais sans que ses résultats n'en soient modifiés. Ainsi, pour le cas considéré nous supposons que les efforts horizontaux (pression du vent) sont repris par des diaphragmes transversaux et longitudinaux (dont la rigidité est plusieurs fois plus grande que celle des poteaux). Tandis que les efforts verticaux (tels que l'action des charges permanentes et des charges d'exploitations) sont repris par le portique en béton armé. Cette simplification ne donne pas une grande influence sur les résultats de calcul statique, vu que la pression du vent (charge horizontale) sur les bâtiments de petite hauteur (deux niveaux) n'est pas remarquable.

Pour le calcul statique du portique à l'action des charges verticales utilisons la méthode de Caquot, bien que les planchers (intermédiaire et de couverture) soient soumis à des charges d'exploitation modérées, mais les portées successives des travées du portique sont dans un rapport entre 0,8 et 1,25 (voir paragraphe 7.3).

Pour commencer le calcul du portique on prend (comme valeurs préalables) les dimensions des sections des éléments du portique :

- poutres $b_p \times h_p = 200 \times 400$ (mm) ;
- poteaux $b_{pot} \times h_{pot} = 200 \times 300$ (mm).

Les autres dimensions sont données sur la figure 10.11,a.

En utilisant la méthode de Caquot, on désigne par :

h_n , la hauteur du poteau situé au-dessus du nœud ;

h_s , la hauteur du poteau situé au-dessous du nœud ;

l_w , la portée de la travée de la poutre située à gauche du nœud ;

l_e , la portée de la travée de la poutre située à droite du nœud ;

M_w, M_e , respectivement les valeurs absolues des moments au nu de

l'appui de la poutre dans la travée de gauche et dans la travée de droite.

Pour calculer les moments agissant dans les sections des nus d'un appui de la poutre, on ne prend en compte que des charges des travées encadrant l'appui considéré (indices "w" et "e") et de la résistance offerte par les tronçons inférieur et supérieur des poteaux aboutissant au nœud considéré.

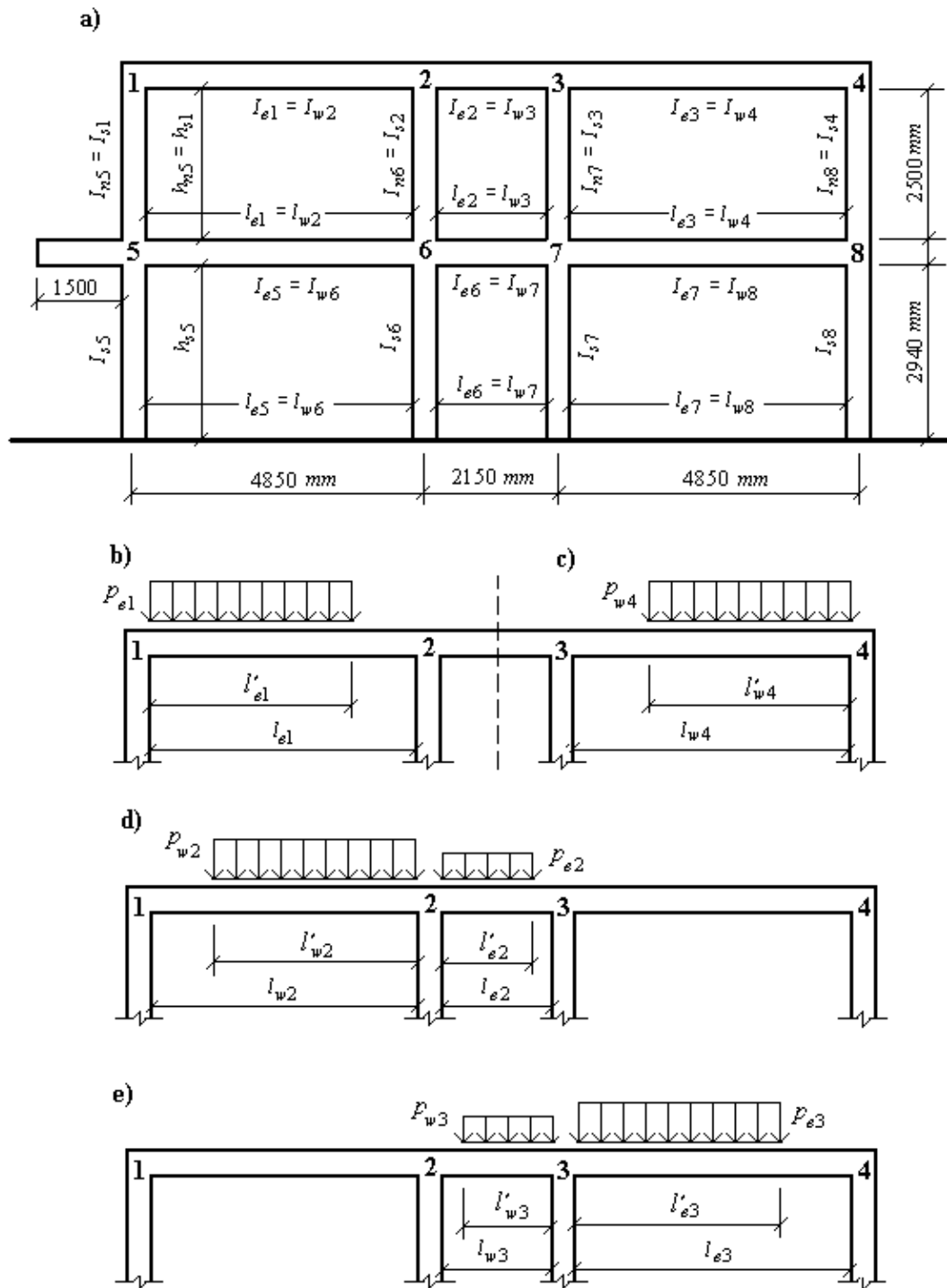


Fig.10.11. Schéma de calcul du portique

a - schéma du portique de bâtiment

b,c - calcul des moments de noeuds de rive 1 et 4

d,e - calcul des moments de noeuds intermédiaire 2 et 3

10.2.1. Calcul des moments de la poutre de couverture

Les valeurs caractéristiques des charges appliquées par 1 m de longueur de la poutre de couverture sont :

- charge permanente : $G_{(p)} = G \times l_{ps} + G_{(pp)} + G_{(m)}$,

avec $G = 5,46 \text{ kN/m}^2$, la charge permanente appliquée à 1 m^2 de couverture (poids propre, tableau 10.3) ;

$G_{(pp)}$, le poids propre d'un mètre linéaire de la poutre :

$$G_{(pp)} = b_p \times h_p \times \rho_b \times 1 \text{ (m)} = 0,2 \times 0,4 \times 25 \times 1 = 2 \text{ kN/m} ;$$

$G_{(m)}$, le poids propre d'un mètre linéaire du mur supporté par la poutre (hauteur moyenne du mur $h_{moy} = 1,5 / 2 = 0,75 \text{ m}$, l'épaisseur $\delta_m = 0,15 \text{ m}$, poids spécifique de la maçonnerie en briques creux $\rho_m = 14 \text{ kN/m}^3$) :

$$G_{(m)} = \delta_m \times h_{moy} \times \rho_m \times 1 \text{ (m)} = 0,15 \times 0,75 \times 14 \times 1 = 1,57 \text{ kN/m}.$$

Alors on a : $G_{(p)} = 5,46 \times 3,6 + 2,0 + 1,57 = 23,23 \text{ kN/m}$.

- charge d'exploitation : $Q_{B(p)} = Q_B \times l_{ps} = 1,0 \times 3,6 = 3,6 \text{ kN/m}$.

Les valeurs de calcul des charges sont :

$$1,35 G_{(p)} = 1,35 \times 23,23 = 31,36 \text{ kN/m} ;$$

$$1,5 Q_{B(p)} = 1,5 \times 3,6 = 5,4 \text{ kN/m} ;$$

$$1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)} = 31,36 + 5,4 = 36,76 \text{ kN/m}.$$

1. **Pour le nœud 1** (fig. 10.11, b).

Le nœud 1 est un nœud de rive sans console, donc $M_w = 0$.

Les longueurs des tronçons des poutres et des poteaux aboutissant au nœud 1 sont :

$$h_{n1} = 0, \quad h_{s1} = 2,5 \text{ m}, \quad l_{w1} = 0, \quad l_{e1} = 4,85 - 0,3 = 4,55 \text{ m}.$$

Alors les longueurs fictives à introduire dans le calcul seront :

$$h'_{s1} = 0,8 h_{s1} = 0,8 \times 2,5 = 2,0 \text{ m} ;$$

$$l'_{e1} = 0,8 l_{e1} = 0,8 \times 4,55 = 3,64 \text{ m}.$$

Les moments d'inertie des éléments :

- de la poutre *) : $I_{e1} = b_p \times (h_p)^3 / 12 = 20 \times 40^3 / 12 = 106666 \text{ cm}^4$;

- du poteau : $I_{s1} = b_{pot} \times (h_{pot})^3 / 12 = 20 \times 30^3 / 12 = 45000 \text{ cm}^4$,

$$K_{e1} = I_{e1} / l'_{e1} = 106666 / 364 = 293,$$

*) Ici on n'a pas pris en compte la table de compression en supposant que son influence n'est pas assez grande.

$$K_{s1} = I_{s1} / l'_{s1} = 45000 / 200 = 225.$$

$$D_1 = K_{e1} + K_{s1} = 293 + 225 = 518.$$

1- a) Application de la charge totale $1,35 G_{B(p)} + 1,5 Q_{B(p)} = 36,76 \text{ kN/m}$.

Pour une charge uniformément répartie, la valeur fictive du moment dans la travée AB sera égale à (formule 7.12):

$$M'_{AB} = \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] (l'_{e1})^2}{8,5} = \frac{36,76 \cdot 3,64^2}{8,5} = 57,30 \text{ kNm}.$$

Alors les moments M_{e1} et M_{s1} au nœud 1 sont donnés, en valeur absolue, par les formules suivantes :

$$M_{e1} = M'_{AB} [1 - (K_{e1} / D_1)] = 57,30 [1 - (293 / 518)] = 24,89 \text{ kNm} ;$$

$$M_{s1} = M'_{AB} (K_{s1} / D_1) = 57,30 (225 / 518) = 24,89 \text{ kNm}.$$

1-b) Application de la charge permanente $1,35 G_{(p)} = p_{e1} = 31,36 \text{ kN/m}$.

$$M'_{AB} = \frac{1,35 G_{(p)} (l'_{e1})^2}{8,5} = \frac{31,36 \cdot 3,64^2}{8,5} = 48,88 \text{ kNm} ;$$

$$M_{e1} = M'_{AB} [1 - (K_{e1} / D_1)] = 48,88 [1 - (293 / 518)] = 21,23 \text{ kNm} ;$$

$$M_{s1} = M'_{AB} (K_{s1} / D_1) = 48,88 (225 / 518) = 21,23 \text{ kNm}.$$

2. Pour le nœud 2 (fig. 10.11, d).

Les longueurs des tronçons aboutissant au nœud 2 sont :

$$h_{s2} = 2,5 \text{ m}, \quad h'_{s2} = 0,8 \times 2,5 = 2,0 \text{ m},$$

$$l_{e2} = 2,15 - 0,3 = 1,85 \text{ m}, \quad l'_{e2} = 0,8 \times 1,85 = 1,48 \text{ m}.$$

Comme le nœud 2 est un nœud voisin de rive, on prend pour longueur fictive de la travée BA : $l'_{w2} = g_1 l_{w2}$,

où g_1 est pris en fonction des conditions :

$$\text{si } K_{s1} + K_{n1} > 1,5 K_{e1}, \quad g_1 = 0,8 ;$$

$$\text{si } K_{s1} + K_{n1} < 1,5 K_{e1}, \quad g_1 = 1 - [(K_{s1} + K_{n1}) / 7,5 K_{e1}]$$

(les coefficients de K_i dans ces formules sont ceux relatifs au nœud 1, c'est-à-dire ceux qui ont été définis à l'alinéa précédent).

Dans le cas considéré on a :

$$K_{n1} = 0, \quad K_{s1} = 225, \quad 1,5 K_{e1} = 1,5 \times 293 = 439,5.$$

Pour $K_{s1} + K_{n1} = 225 < 1,5 K_{e1} = 439,5$, on prend :

$$g_1 = 1 - [225 / (7,5 \times 293)] = 0,8976 \approx 0,9.$$

Alors la longueur fictive $l'_{w2} = g_1 l_{w2} = 0,9 \times 4,55 = 4,09 \text{ m}$.

Les moments d'inertie des éléments :

$$I_{w2} = I_{e2} = I_{e1} = 106666 \text{ cm}^4, \quad I_{s2} = I_{s1} = 45000 \text{ cm}^4.$$

Les coefficients sont :

$$K_{s2} = I_{s2} / l'_{s2} = 45000 / 200 = 225 ;$$

$$K_{w2} = I_{w2} / l'_{w2} = 106666 / 409 = 260,8 ;$$

$$K_{e2} = I_{e2} / l'_{e2} = 106666 / 148 = 721 ;$$

$$D_2 = 225 + 260,8 + 721 = 1206,8.$$

2-a) Application de la charge totale ($p_{w2} = p_{e2} = 36,76 \text{ kN/m}$) dans les travées BA et BC :

$$M'_{BA} = \frac{[1,35 G(p) + 1,5 Q_{B(p)}] (l'_{w2})^2}{8,5} = \frac{36,76 \cdot 4,09^2}{8,5} = 72,34 \text{ kNm} ;$$

$$M'_{BC} = \frac{[1,35 G(p) + 1,5 Q_{B(p)}] (l'_{e2})^2}{8,5} = \frac{36,76 \cdot 1,48^2}{8,5} = 9,47 \text{ kNm}.$$

Les moments au nœud 2 sont :

$$\begin{aligned} M_{w2} &= M'_{BC} (K_{w2} / D_2) + M'_{BA} [1 - (K_{w2} / D_2)] = \\ &= 9,47 (260,8 / 1206,8) + 72,34 [1 - (260,8 / 1206,8)] = 58,75 \text{ kNm} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{e2} &= M'_{BC} [1 - (K_{e2} / D_2)] + M'_{BA} (K_{e2} / D_2) = \\ &= 9,47 [1 - (721 / 1206,8)] + 72,34 (721 / 1206,8) = 47,03 \text{ kNm} ; \end{aligned}$$

$$M_{s2} = (M'_{BA} - M'_{BC}) (K_{s2} / D_2) = (72,34 - 9,47) (225 / 1206,8) = 11,72 \text{ kNm}.$$

2-b) Application de la charge totale ($p_{w2} = 36,76 \text{ kN/m}$) dans la travée BA et la charge permanente ($p_{e2} = 31,36 \text{ kN/m}$) dans la travée BC.

$$M'_{BA} = \frac{[1,35 G(p) + 1,5 Q_{B(p)}] (l'_{w2})^2}{8,5} = \frac{36,76 \cdot 4,09^2}{8,5} = 72,34 \text{ kNm} ;$$

$$M'_{BC} = \frac{[1,35 G(p)] (l'_{e1})^2}{8,5} = \frac{31,36 \cdot 1,48^2}{8,5} = 8,08 \text{ kNm} ;$$

$$\begin{aligned} M_{w2} &= M'_{BC} (K_{w2} / D_2) + M'_{BA} [1 - (K_{w2} / D_2)] = \\ &= 8,08 (260,8 / 1206,8) + 72,34 [1 - (260,8 / 1206,8)] = 58,45 \text{ kNm} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{e2} &= M'_{BC} [1 - (K_{e2} / D_2)] + M'_{BA} (K_{e2} / D_2) = \\ &= 8,08 [1 - (721 / 1206,8)] + 72,34 (721 / 1206,8) = 46,47 \text{ kNm} ; \end{aligned}$$

$$M_{s2} = (M'_{BA} - M'_{BC}) (K_{s2} / D_2) = (72,34 - 8,08) (225 / 1206,8) = 11,98 \text{ kNm}.$$

2-c) Application de la charge totale ($p_{e2} = 36,76 \text{ kN/m}$) dans la travée BC et la charge permanente ($p_{w2} = 31,36 \text{ kN/m}$) dans la travée BA.

$$M'_{BC} = \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] (l'_{e2})^2}{8,5} = \frac{36,76 \cdot 1,48^2}{8,5} = 9,47 \text{ kNm}$$

$$M'_{BA} = \frac{[1,35 G_{(p)}] (l'_{w2})^2}{8,5} = \frac{31,36 \cdot 4,09^2}{8,5} = 61,72 \text{ kNm};$$

$$M_{w2} = M'_{BC} (K_{w2} / D_2) + M'_{BA} [1 - (K_{w2} / D_2)] = \\ = 9,47 (260,8 / 1206,8) + 61,72 [1 - (260,8 / 1206,8)] = 50,43 \text{ kNm};$$

$$M_{e2} = M'_{BC} [1 - (K_{e2} / D_2)] + M'_{BA} (K_{e2} / D_2) = \\ = 9,47 [1 - (721 / 1206,8)] + 61,72 (721 / 1206,8) = 40,69 \text{ kNm};$$

$$M_{s2} = (M'_{BA} - M'_{BC}) (K_{s2} / D_2) = (61,72 - 9,47) (225 / 1206,8) = 9,74 \text{ kNm}.$$

2-d) Application de la charge permanente dans la travée BA et BC ($p_{w2} = p_{e2} = 31,36 \text{ kN/m}$).

$$M'_{BA} = \frac{[1,35 G_{(p)}] (l'_{w2})^2}{8,5} = \frac{31,36 \cdot 4,09^2}{8,5} = 61,72 \text{ kNm};$$

$$M'_{BC} = \frac{[1,35 G_{(p)}] (l'_{e2})^2}{8,5} = \frac{31,36 \cdot 1,48^2}{8,5} = 8,08 \text{ kNm};$$

$$M_{w2} = M'_{BC} (K_{w2} / D_2) + M'_{BA} [1 - (K_{w2} / D_2)] = \\ = 8,08 (260,8 / 1206,8) + 61,72 [1 - (260,8 / 1206,8)] = 50,12 \text{ kNm};$$

$$M_{e2} = M'_{BC} [1 - (K_{e2} / D_2)] + M'_{BA} (K_{e2} / D_2) = \\ = 8,08 [1 - (721 / 1206,8)] + 61,72 (721 / 1206,8) = 40,12 \text{ kNm};$$

$$M_{s2} = (M'_{BA} - M'_{BC}) (K_{s2} / D_2) = (61,72 - 8,08) (225 / 1206,8) = 10,0 \text{ kNm}.$$

Vu la symétrie du portique, les moments dans le nœud 3 sont les mêmes que ceux dans le nœud 2, et dans le nœud 4, que ceux dans le nœud 1 (les résultats de calcul sont présentés par le tableau 10.4). Il faut noter que les valeurs des moments calculées dans 2-d ne sont pas déterminantes, c'est pourquoi elles ne sont pas données au tableau 10.4.

Tableau 10.4

	Schémas de calcul et de chargement de la poutre de couverture	Valeurs des charges (kN/m)	M_{e1}	M_{s1}	Points de lignes de fermeture
Noeud 1		<p>1-a $P_{e1} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{R(p)} = 36,76$</p> <p>1-b $P_{e1} = 1,35G_{(p)} = 31,36$</p>	24,89	24,89	d_1, d_2
Noeud 2		<p>2-a $P_{w2} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{R(p)} = 36,76$ $P_{e2} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{R(p)} = 36,76$</p> <p>2-b $P_{w2} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{R(p)} = 36,76$ $P_{e2} = 1,35G_{(p)} = 31,36$</p> <p>2-c $P_{w2} = 1,35G_{(p)} = 31,36$ $P_{e2} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{R(p)} = 36,76$</p>	M_{w2}	M_{s2}	Points
Noeud 3		<p>3-a $P_{w3} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{R(p)} = 36,76$ $P_{e3} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{R(p)} = 36,76$</p> <p>3-b $P_{w3} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{R(p)} = 36,76$ $P_{e3} = 1,35G_{(p)} = 31,36$</p> <p>3-c $P_{w3} = 1,35G_{(p)} = 31,36$ $P_{e3} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{R(p)} = 36,76$</p>	M_{w3}	M_{s3}	Points
Noeud 4		<p>4-a $P_{w4} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{R(p)} = 36,76$</p> <p>4-b $P_{w4} = 1,35G_{(p)} = 31,36$</p>	M_{w4}	M_{s4}	Points

3. Les moments dans la travée AB.

Pour déterminer les moments en travée on trace, pour la travée supposée indépendante et en considérant la *portée réelle* l , la courbe des moments relative à la charge permanente $[1,35 G_{(p)}]$ puis la courbe des moments relative à la charge permanente et à celle d'exploitation $[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}]$. On prend comme lignes de fermeture :

- pour les moments positifs, la droite qui joint les moments d'appui minimaux en valeur absolue;
- pour les moments négatifs, la droite qui joint les moments d'appui maximaux en valeur absolue.

Ce mode de détermination des moments prend en compte du fait que les charges d'exploitation peuvent être ou non appliquées dans les différentes travées de la poutre. Donc pour la travée AB on obtient :

- le moment maximal sur l'appui A en surchargeant la travée AB par la charge totale $[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}]$. Ce qui donne les points a_1 et a_2 (le moment $M_{e1} = 24,89 \text{ kN m}$) pour la ligne de fermeture (voir le calcul 1-a et le tableau 10.4, nœud 1) ;
- le moment maximal sur l'appui B en surchargeant la travée BA et la travée BC par la charge totale $[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}]$. Ce qui donne le point b_{w1} (le moment $M_{w2} = 58,75 \text{ kN m}$) pour la ligne de fermeture $a_1 - b_{w1}$ (voir le calcul 2-a et le tableau 10.4, nœud 2) ;
- le moment maximal dans la travée AB en chargeant cette travée par la charge totale $[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}]$ et la travée BC par la charge permanente $1,35 G_{(p)}$.

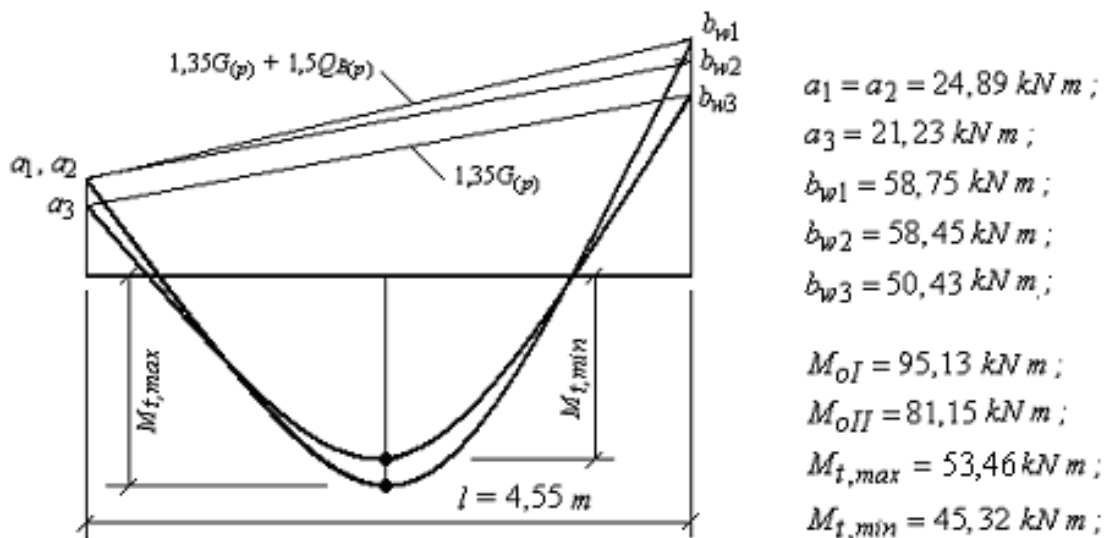


Fig.10.12. Calcul des moments dans la travée de rive de la poutre

Ce qui donne le point b_{w2} (le moment $M_{w2} = 58,45 \text{ kN m}$) pour la ligne de fermeture $a_2 - b_{w2}$ (voir le calcul 2 - b et le tableau 10.4, nœud 2) ;

- le moment minimal dans la travée AB en surchargeant cette travée par la charge permanente $1,35 G_{(p)}$ et la travée BC par la charge totale $[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}]$. Ce qui donne le point b_{w3} (le moment $M_{w2} = 50,43 \text{ kN m}$) pour la ligne de fermeture $a_3 - b_{w3}$ (voir le calcul 3 - b et le tableau 10.4, nœud 2).

Ainsi, on calcule les moments dans la travée AB supposée indépendante et de portée $l = l_{e1} = 4,55 \text{ m}$:

- moment maximal :

$$M_{oI} = \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l^2}{8} = \frac{36,76 \cdot 4,55^2}{8} = 95,13 \text{ kN m} ;$$

- moment minimal :

$$M_{oII} = \frac{1,35 G_{(p)} \cdot l^2}{8} = \frac{31,36 \cdot 4,55^2}{8} = 81,15 \text{ kN m} .$$

Avec ces valeurs on calcule :

$$M_{t(max)} = M_{oI} - (M_{e1} + M_{w2}) / 2 = 95,13 - (24,89 + 58,45) / 2 = 53,46 \text{ kN m} ;$$

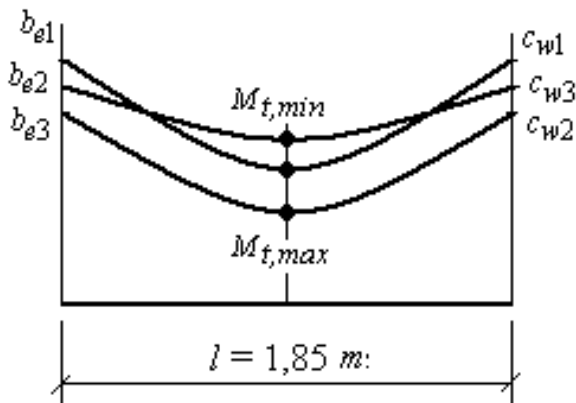
$$M_{t(min)} = M_{oII} - (M_{e1} + M_{w2}) / 2 = 81,15 - (21,23 + 50,43) / 2 = 45,32 \text{ kN m} .$$

4. Les moments dans la travée BC.

Les moments dans la travée BC sont calculés en considérant la portée réelle $l = l_{e2} = 1,85 \text{ m}$. Donc on calcule les moments :

- moment maximal :

$$M_{oI} = \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l^2}{8} = \frac{36,76 \cdot 1,85^2}{8} = 15,73 \text{ kN m} ; .$$



$$b_{e1} = c_{w1} = 47,03 \text{ kN m} ;$$

$$b_{w2} = c_{w3} = 46,47 \text{ kN m} ;$$

$$b_{w3} = c_{w2} = 40,69 \text{ kN m} ;$$

$$M_{oI} = 15,73 \text{ kN m} ;$$

$$M_{oII} = 13,42 \text{ kN m} ;$$

$$M_{t,max} = -24,96 \text{ kN m} ;$$

$$M_{t,min} = -33,05 \text{ kN m} ;$$

Fig.10.13. Calcul des moments dans la travée intermédiaire de la poutre

- moment minimal :

$$M_{oII} = \frac{1,35 G_{(p)} \cdot l^2}{8} = \frac{31,36 \cdot 1,85^2}{8} = 13,42 \text{ kN m}.$$

Pour la travée BC on obtient :

- le moment maximal sur l'appui B, en appliquant la charge totale $[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}]$ dans les travées BA et BC. Ce qui donne le point b_{e1} (le moment $M_{e2} = 47,03 \text{ kN m}$) pour la ligne de fermeture (tableau 10.4, nœud 2) ;

- le moment maximal sur l'appui C, en appliquant la charge totale $[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}]$ dans les travées CB et CD (vu la symétrie du portique $M_{w3} = M_{e2} = 53,25 \text{ kN m}$). Ce qui donne le point c_{w1} pour la ligne de fermeture $b_{e1} - c_{w1}$ (tableau 10.4, nœud 3) ;

- le moment maximal dans la travée BC, en appliquant la charge totale dans cette travée $[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}]$ et la charge permanente $1,35 G_{(p)}$ dans les travées BA et CD. Ce qui donne les points b_{e3} et c_{w2} (les moments $M_{e2} = M_{w3} = 46,9 \text{ kN m}$) pour la ligne de fermeture $b_{e3} - c_{w2}$. Donc on a

$$M_{t(max)} = M_{oI} - (M_{e2} + M_{w3})/2 = 15,73 - (40,69 + 40,69)/2 = -24,96 \text{ kN m} ;$$

- le moment minimal dans la travée BC, en appliquant la charge permanente $1,35 G_{(p)}$ dans cette travée et la charge totale $[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}]$ dans les travées BA et CD. Ce qui donne les points b_{e2} et c_{w3} (les moments $M_{e2} = M_{w3} = 46,47 \text{ kN m}$) pour la ligne de fermeture $b_{e2} - c_{w3}$. Donc on a :

$$M_{t(min)} = M_{oII} - (M_{e2} + M_{w3})/2 = 13,42 - (46,47 + 46,47)/2 = -33,05 \text{ kN m} ;$$

Les valeurs des moments dans la travée CD seront les mêmes que celles dans la travée AB. Le diagramme des moments de la poutre de couverture est donné par la figure 10.14.

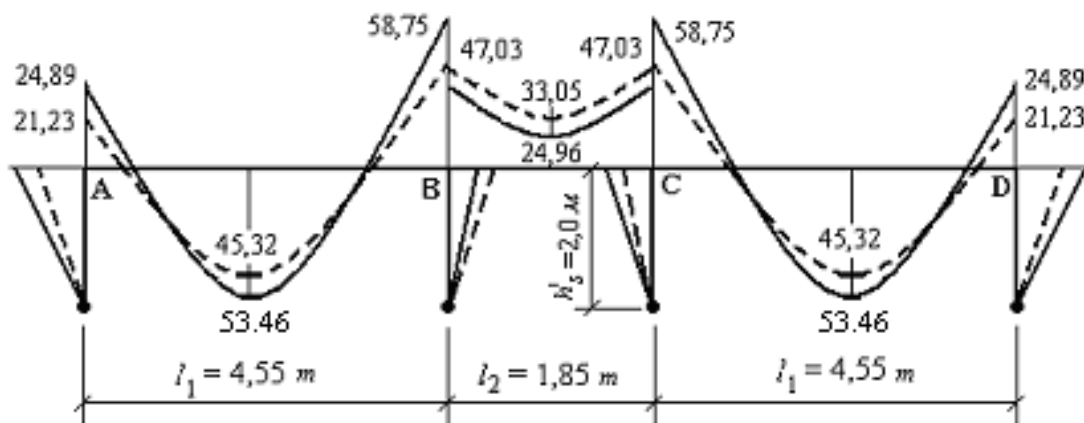


Fig.10.14. Diagramme des moments de la poutre de couverture

10.2.2. Calcul des moments de la poutre intermédiaire

Les valeurs caractéristiques des charges appliquées par 1 m de la poutre intermédiaire sont :

- charge permanente : $G_{(p)} = G l_{ps} + G_{(pp)} + G_{(cl)}$,

où $G = 4,31\text{ kN/m}^2$, charge due au poids propre du plancher (tableau 10.2)

$G_{(pp)} = 2,0\text{ kN/m}$, poids propre d'un mètre de longueur de la poutre
(les dimensions de la poutre du plancher intermédiaire sont les mêmes que celles de la poutre de couverture

$$b_p \times h_p = 0,2\text{ m} \times 0,4\text{ m} ;$$

$G_{(cl)}$, poids propre des murs et des cloisons appuyés directement sur la poutre considérée (fig. 10.1) :

$$G_{(cl)} = \delta_{cl} \times H_{ét} \times \rho_{(m)} \times 1\text{ m} = 0,15 \times 2,5 \times 14 \times 1 = 5,25\text{ kN/m}.$$

Donc on a :

$$G_{(p)} = 4,31 \times 3,6 + 2,0 + 5,25 = 22,77\text{ kN/m}.$$

Pour la console on ne prend pas en compte le poids des cloisons comme une charge uniformément répartie suivant la surface du plancher ($0,75\text{ kN/m}^2$, voir le tableau 10.2), mais on prend en compte le poids des murs. Donc dans ce cas on a :

$$G_{(pc)} = (4,31 - 0,75) \times 3,6 + 2,0 + 5,25 = 20,07\text{ kN/m}.$$

- charge d'exploitation :

appliquée dans la travée de la poutre (locaux d'habitation):

$$Q_{B(p)} = Q_B l_{ps} = 1,75 \times 3,6 = 6,30\text{ kN/m} ;$$

appliquée à la console de la poutre (balcon) :

$$Q_{B(c)} = Q_B l_{ps} = 3,5 \times 3,6 = 12,60\text{ kN/m}.$$

Les valeurs de calcul des charges sont :

$$1,35 G_{(p)} = 1,35 \times 22,77 = 30,74\text{ kN/m} ;$$

$$1,35 G_{(pc)} = 1,35 \times 20,07 = 27,09\text{ kN/m} ;$$

$$1,5 Q_{B(p)} = 1,5 \times 6,30 = 9,45\text{ kN/m} ;$$

$$1,5 Q_{B(pc)} = 1,5 \times 12,60 = 18,90\text{ kN/m}.$$

1. Pour le nœud 5 (tableau 10.5).

Le nœud 5 est un nœud de rive avec la console. La portée de calcul de la console est : $l_c = 1,5 - h_{pot} / 2 = 1,5 - 0,3 / 2 = 1,35\text{ m}$. La valeur absolue du moment M_c dans la console au nu de l'appui est prise égale à :

$$M_c = \frac{p_w (l_c)^2}{2},$$

avec p_w la charge appliquée à la console (la valeur de p_w est prise en fonction du cas de chargement).

Les longueurs des tronçons de la poutre et des poteaux aboutissant au nœud 5 sont :

$$h_{n5} = 2,5 \text{ m}, \quad h_{s5} = 2,94 \text{ m}, \quad l_{w5} = l_c = 1,35 \text{ m}, \quad l_{e5} = 4,85 - 0,3 = 4,55 \text{ m}.$$

Les longueurs fictives à introduire dans le calcul:

$$h'_{n5} = 0,9 h_{n5} = 0,9 \times 2,5 = 2,25 \text{ m}, \quad \text{pour le nœud du poteau de l'avant-dernier plancher ;}$$

$$h'_{s5} = 0,8 h_{s5} = 0,8 \times 2,94 = 2,35 \text{ m}, \quad \text{pour le poteau encasté à la fondation ;}$$

$$l'_{e5} = 0,8 l_{e5} = 0,8 \times 4,55 = 3,64 \text{ m}.$$

Les moments d'inertie des éléments du portique :

$$I_{e5} = I_{e1} = 106666 \text{ cm}^4, \quad I_{n5} = I_{s5} = I_{s1} = 45000 \text{ cm}^4.$$

La valeur $K_{w5} = 0$, puisque la console n'offre aucune résistance à la déformation du nœud 5.

$$K_{e5} = I_{e5} / l'_{e5} = 106666 / 364 = 293 ;$$

$$K_{n5} = I_{n5} / h'_{n5} = 45000 / 225 = 200 ;$$

$$K_{s5} = I_{s5} / h'_{s5} = 45000 / 235 = 191,5 ;$$

$$D_5 = K_{e5} + K_{n5} + K_{s5} = 293 + 200 + 191,5 = 684,5.$$

5-a) Application de la charge totale à la console

$$p_{w5} = 1,35 G_{(pc)} + 1,5 Q_{B(pc)} = 27,09 + 18,90 \approx 46,0 \text{ kN/m},$$

et la charge totale dans la travée AB:

$$p_{e5} = 1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)} = 30,74 + 9,45 = 40,19 \text{ kN/m}$$

(ce qui donne les points a_{w1} et a_{e1} pour la ligne de fermeture de diagramme).

La valeur du moment dans la console et la valeur fictive du moment dans la travée AB sont :

$$M_{w5} = [p_{w5} (l_c)^2] / 2 = [46,0 \times 1,35^2] / 2 = 41,92 \text{ kN m} ;$$

$$M'_{AB} = [p_{e5} (l'_{e5})^2] / 8,5 = [40,19 \times 3,64^2] / 8,5 = 62,65 \text{ kN m}.$$

Les moments M_{w5} , M_{e5} , M_{n5} et M_{s5} en valeur absolue, dont alors :

$$M_{w5} = M'_{w5} = 41,92 \text{ kN m} ;$$

$$M_{e5} = M'_{AB} [1 - (K_{e5} / D_5)] + M_{w5} K_{e5} / D_5 = 62,65 [1 - [293 / 684,5]] + 41,92 (293 / 684,5) = 53,77 \text{ kN m}$$

$$M_{n5} = (M'_{AB} - M'_{w5}) (K_{n5} / D_5) = (62,65 - 41,92) (200 / 684,5) = 6,05 \text{ kN m},$$

$$M_{s5} = (M'_{AB} - M'_{w5}) (K_{s5} / D_5) = (62,65 - 41,92)(191,5 / 684,5) = 5,80 \text{ kN m}.$$

5-b) Application de la charge totale dans la travée AB

$$p_{e5} = 1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)} = 40,19 \text{ kN/m},$$

et la charge permanente à la console :

$$p_{w5} = 1,35 G_{(pc)} = 27,09 \text{ kN/m}$$

(les points a_{w2} et a_{e2} pour la ligne de fermeture).

$$M_{w5} = [p_{w5} (l_c)^2] / 2 = [27,09 \times 1,35^2] / 2 = 24,68 \text{ kN m};$$

$$M'_{AB} = [p_{e5} (l'_{e5})^2] / 8,5 = [40,19 \times 3,64^2] / 8,5 = 62,65 \text{ kN m};$$

$$M_{w5} = 24,68 \text{ kN m};$$

$$M_{e5} = 62,65 [1 - (293 / 684,5)] + 24,68 (293 / 684,5) = 46,39 \text{ kN m};$$

$$M_{n5} = (62,65 - 24,68) (200 / 684,5) = 11,09 \text{ kN m};$$

$$M_{e5} = (62,65 - 24,68) (191,5 / 684,5) = 10,62 \text{ kN m}.$$

5-c) Application de la charge totale à la console

$$p_{w5} = 1,35 G_{(pc)} + 1,5 Q_{B(pc)} = 46,0 \text{ kN/m},$$

et la charge permanente dans la travée AB

$$p_{e5} = 1,35 G_{(p)} = 30,74 \text{ kN/m}$$

(les points a_{w3} et a_{e3}).

$$M_{w5} = [p_{w5} (l_c)^2] / 2 = [46,0 \times 1,35^2] / 2 = 41,92 \text{ kN m};$$

$$M'_{AB} = [p_{e5} (l'_{e5})^2] / 8,5 = [30,74 \times 3,64^2] / 8,5 = 47,92 \text{ kN m};$$

$$M_{w5} = 41,92 \text{ kN m};$$

$$M_{e5} = 47,92 [1 - (293 / 684,5)] + 41,92 (293 / 684,5) = 45,35 \text{ kN m};$$

$$M_{n5} = (47,92 - 41,92) (200 / 684,5) = 1,75 \text{ kN m};$$

$$M_{e5} = (47,92 - 41,92) (191,5 / 684,5) = 1,68 \text{ kN m}.$$

2. Pour le nœud 6 (tableau 10.5).

Les longueurs des tronçons aboutissant au nœud 6 :

$$h_{n6} = 2,5 \text{ m}, \quad h'_{n6} = 0,9 h_{n6} = 0,9 \times 2,5 = 2,25 \text{ m}, \text{ pour le nœud l'avant-dernier plancher};$$

$$h_{s6} = 2,94 \text{ m}, \quad h'_{s6} = 0,8 h_{s6} = 0,8 \times 2,94 = 2,35 \text{ m}, \text{ pour le poteau encastré à la fondation};$$

$$l_{e6} = 2,15 - 0,3 = 1,85 \text{ m}, \quad l'_{e6} = 0,8 l_{e6} = 0,8 \times 1,85 = 1,48 \text{ m},$$

$$l_{w6} = 4,85 - 0,3 = 4,55 \text{ m}, \quad l'_{w6} = g_1 l_{w6}.$$

La valeur de g_1 est prise en fonction des moments d'inertie des éléments aboutissant au nœud 5, donc $K_{s5} = 191,5$; $K_{n5} = 200$; $K_{e5} = 293$.

Dans le cas considéré on a :

$$K_{s5} + K_{n5} = 191,5 + 200 = 391,5 < 1,5 K_{e5} = 1,5 \times 293 = 439,5.$$

$$\text{Alors : } g_1 = 1 - [(K_{s5} + K_{n5}) / 7,5 K_{e5}] = 1 - [391,5 / (7,5 \times 293)] = 0,82.$$

$$\text{Avec cette valeur } l'_{w6} = 0,82 \times 4,55 = 3,73 \text{ m.}$$

Les moments d'inertie des éléments sont :

$$I_{w6} = I_{e6} = I_{e5} = 106666 \text{ cm}^4, \quad I_{n6} = I_{s6} = I_{n5} = 45000 \text{ cm}^4 ;$$

$$K_{w6} = I_{w6} / l'_{w6} = 106666 / 373 = 286 ;$$

$$K_{e6} = I_{e6} / l'_{e6} = 106666 / 148 = 721 ;$$

$$K_{n6} = I_{n6} / l'_{n6} = 45000 / 225 = 200 ;$$

$$K_{s6} = I_{s6} / l'_{s6} = 45000 / 235 = 191,5 ;$$

$$D_6 = K_{w6} + K_{e6} + K_{n6} + K_{s6} = 286 + 721 + 200 + 191,5 = 1398,5.$$

6-a) Application des charges totales [$p_{w6} = p_{e6} = 1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)} = 40,19 \text{ kN/m}$] dans les travées BA et BC (les points b_{w1} et b_{e1}).

$$M'_{BA} = [p_{w6} (l'_{w6})^2] / 8,5 = [40,19 \times 3,73^2] / 8,5 = 65,78 \text{ kNm} ;$$

$$M'_{BC} = [p_{e6} (l'_{e6})^2] / 8,5 = [40,19 \times 1,48^2] / 8,5 = 10,36 \text{ kNm} ;$$

Pour tenir compte l'influence du moment de la console, on remplace M'_{BA} par $M''_{BA} = M'_{BA} - (K_{e5} \times M_C) / (2,125 D_5)$ (voir le paragraphe 7.3.4). Dans le cas d'application de la charges totale dans la travée BA on préfère prendre la valeur minimale de M_C (donc on applique la charge $Q_{(pc)} = 27,09 \text{ kN/m}$), ce qui donne le moment maximal sur l'appui "B" de gauche (le moment M_{w6}) :

$$M_C = [1,35 G_{(pc)} (l_c)^2] / 2 = [27,09 \times 1,35^2] / 2 = 24,68 \text{ kNm} ;$$

$$M''_{BA} = 65,78 - (293 \times 24,68) / (2,125 \times 684,5) = 60,81 \text{ kNm}.$$

Les moments au nœud 6 sont alors (formule 7.16) :

$$M_{w6} = 60,81 [1 - (286 / 1398,5)] + 10,36 (286 / 1398,5) = 50,49 \text{ kNm} ;$$

$$M_{e6} = 60,81 (721 / 1398,5) + 10,36 [1 - (721 / 1398,5)] = 36,37 \text{ kNm} ;$$

$$M_{n6} = (60,81 - 10,36) (200 / 1398,5) = 7,21 \text{ kNm} ;$$

$$M_{s6} = (60,81 - 10,36) (191,5 / 1398,5) = 6,91 \text{ kNm}.$$

6-b) Application de la charge totale [$p_{w6} = 1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)} = 40,19 \text{ kN/m}$] dans la travée BA et la charge permanente [$p_{e6} = 1,35 G_{(p)} = 30,74 \text{ kN/m}$] dans la travée BC (les points b_{w2} et b_{e2}).

$$M'_{BA} = [p_{w6} (l'_{w6})^2] / 8,5 = [40,19 \times 3,73^2] / 8,5 = 65,78 \text{ kNm} ;$$

$$M'_{BC} = [p_{e6} (l'_{e6})^2] / 8,5 = [30,74 \times 1,48^2] / 8,5 = 7,92 \text{ kNm} ;$$

La console étant sollicitée par la charge permanente $G_{(pc)} = 27,09 \text{ kN/m}$, donc $M_c = 24,68 \text{ kNm}$ et $M'''_{BA} = 60,81 \text{ kNm}$. Alors on trouve :

$$M_{w6} = 60,81 [1 - (286 / 1398,5)] + 7,92 (286 / 1398,5) = 49,99 \text{ kNm} ;$$

$$M_{e6} = 60,81 (721 / 1398,5) + 7,92 [1 - (721 / 1398,5)] = 35,19 \text{ kNm} ;$$

$$M_{n6} = (60,81 - 7,92) (200 / 1398,5) = 7,56 \text{ kNm} ;$$

$$M_{s6} = (60,81 - 7,92) (191,5 / 1398,5) = 7,24 \text{ kNm}.$$

6-c) Application de la charge totale [$p_{e6} = 1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)} = 40,19 \text{ kN/m}$] dans la travée BC et la charge permanente [$p_{w6} = 1,35 G_{(p)} = 30,74 \text{ kN/m}$] dans la travée BA (les points b_{w3} et b_{e3}).

$$M'_{BA} = [p_{w6} (l'_{w6})^2] / 8,5 = [30,74 \times 3,73^2] / 8,5 = 50,31 \text{ kNm} ;$$

$$M'_{BC} = [p_{e6} (l'_{e6})^2] / 8,5 = [40,19 \times 1,48^2] / 8,5 = 10,36 \text{ kNm} ;$$

Dans ce cas la console est sollicitée par la charge totale:

$$1,35 G_{(pc)} + 1,5 Q_{B(pc)} = 46,0 \text{ kN/m} ,$$

ce qui donne le moment minimal sur l'appui "B" de gauche.

Le moment de la console est : $M_c = [46,0 \times 1,35^2] / 2 = 41,92 \text{ kNm}$ et le moment $M''_{BA} = 50,31 - (293 \times 41,92) / (2,125 \times 684,5) = 41,87 \text{ kNm}$.

$$M_{w6} = 41,87 [1 - (286 / 1398,5)] + 10,36 (286 / 1398,5) = 35,42 \text{ kNm} ;$$

$$M_{e6} = 41,87 (721 / 1398,5) + 10,36 [1 - (721 / 1398,5)] = 26,60 \text{ kNm} ;$$

$$M_{n6} = (41,87 - 10,36) (200 / 1398,5) = 4,51 \text{ kNm} ;$$

$$M_{s6} = (41,87 - 10,36) (191,5 / 1398,5) = 4,31 \text{ kNm}.$$

3. Pour le nœud 7 (tableau 10.5).

La travée de rive CD ne comporte pas de console ($M_c = 0$). Les autres caractéristiques sont les mêmes que celles du nœud 6, mais les indices doivent être remplacés : w_6 par e_7 et e_6 par w_7 , donc on a :

$$K_{w7} = K_{e6} = 721 ; \quad K_{e7} = K_{w6} = 286 ;$$

$$K_{n7} = K_{n6} = 200 ; \quad K_{s7} = K_{s6} = 191,5 ; \quad D_7 = 1398,5.$$

7-a) Application des charges totales [$p_{w7} = p_{e7} = 1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)} = 40,19 \text{ kN/m}$] dans les travées CB et CD (les points c_{w1} et c_{e1}).

$$M'_{CB} = [p_{w7} (l'_{w7})^2] / 8,5 = [40,19 \times 1,48^2] / 8,5 = 10,36 \text{ kNm} ;$$

$$M'_{CD} = [p_{e7} (l'_{e7})^2] / 8,5 = [40,19 \times 3,78^2] / 8,5 = 65,78 \text{ kNm} ;$$

Les moments au nœud 7 sont :

$$M_{e7} = 65,78 [1 - (286 / 1398,5)] + 10,36 (286 / 1398,5) = 54,44 \text{ kNm} ;$$

$$M_{w7} = 65,78 (721 / 1398,5) + 10,36 [1 - (721 / 1398,5)] = 38,93 \text{ kNm} ;$$

$$M_{n7} = (65,78 - 10,36) (200 / 1398,5) = 7,92 \text{ kN m} ;$$

$$M_{s7} = (65,78 - 10,36) (191,5 / 1398,5) = 7,59 \text{ kN m}.$$

7-b) Application de la charge totale [$p_{e7} = 1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)} = 40,19 \text{ kN/m}$] dans la travée BA et la charge permanente [$p_{w7} = 1,35 G_{(p)} = 30,74 \text{ kN/m}$] dans la travée BC (les points c_{w2} et c_{e2}).

$$M'_{CD} = [p_{w7} (l'_{w7})^2] / 8,5 = [40,19 \times 3,73^2] / 8,5 = 65,78 \text{ kN m} ;$$

$$M'_{CB} = [p_{e7} (l'_{e7})^2] / 8,5 = [30,74 \times 1,48^2] / 8,5 = 7,92 \text{ kN m} ;$$

$$M_{e7} = 65,78 [1 - (286 / 1398,5)] + 7,92 (286 / 1398,5) = 53,94, \text{ kN m} ;$$

$$M_{w7} = 65,78 (721 / 1398,5) + 7,92 [1 - (721 / 1398,5)] = 37,75 \text{ kN m} ;$$

$$M_{n7} = (65,78 - 7,92) (200 / 1398,5) = 8,27 \text{ kN m} ;$$

$$M_{s7} = (65,78 - 7,92) (191,5 / 1398,5) = 7,92 \text{ kN m}.$$

7-c) Application de la charge totale [$p_{w7} = 1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)} = 40,19 \text{ kN/m}$] dans la travée CB et la charge permanente [$p_{e7} = 1,35 G_{(p)} = 30,74 \text{ kN/m}$] dans la travée CD (les points c_{w3} et c_{e3}).

$$M'_{CD} = [p_{e7} (l'_{e7})^2] / 8,5 = [30,74 \times 3,73^2] / 8,5 = 50,31 \text{ kN m} ;$$

$$M'_{CB} = [p_{w7} (l'_{w7})^2] / 8,5 = [40,19 \times 1,48^2] / 8,5 = 10,36 \text{ kN m} ;$$

$$M_{e7} = 50,31 [1 - (286 / 1398,5)] + 10,36 (286 / 1398,5) = 42,13 \text{ kN m} ;$$

$$M_{w7} = 50,31 (721 / 1398,5) + 10,36 [1 - (721 / 1398,5)] = 30,95 \text{ kN m} ;$$

$$M_{n7} = (50,31 - 10,36) (200 / 1398,5) = 5,71 \text{ kN m} ;$$

$$M_{s7} = (50,31 - 10,36) (191,5 / 1398,5) = 5,47 \text{ kN m}.$$

4. Pour le nœud 8 (tableau 10.5).

Ce nœud est un nœud de rive sans console, donc $M_{e8} = 0$. Les longueurs des tronçons aboutissant au nœud 8 sont :

$$h_{n8} = 2,5 \text{ m}, \quad h'_{n8} = 0,9 h_{n8} = 2,25 \text{ m},$$

$$h_{s8} = 2,94 \text{ m}, \quad h'_{s8} = 0,8 h_{s8} = 2,35 \text{ m},$$

$$l_{w8} = 4,55 \text{ m}, \quad l'_{w8} = 0,8 l_{w8} = 3,64 \text{ m},$$

$$l_{e8} = 0.$$

$$K_{n8} = K_{n5} = 200, \quad K_{s8} = K_{s5} = 191,5, \quad K_{w8} = K_{e5} = 293,$$

$$D_8 = K_{n8} + K_{s8} + K_{w8} = 200 + 191,5 + 293 = 684,5.$$

Tableau 10.5

Schémas de calcul et de chargement de la poutre de couverture		Valeurs des charges (kN/m)					M_w	M_e	M_n	M_s	Points
Noeud 5		$P_{w5} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{2(p)} = 46,00$ $P_{e5} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{2(p)} = 40,19$	41,92	53,77	6,05	580	a_{w1} a_{e1}				
		$P_{w5} = 1,35G_{(p)} = 27,09$ $P_{e5} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{2(p)} = 40,19$	24,68	46,39	11,09	10,62	a_{w2} a_{e2}				
		$P_{w5} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{2(p)} = 46,00$ $P_{e5} = 1,35G_{(p)} = 30,74$	41,92	45,35	1,75	1,68	a_{w3} a_{e3}				
Noeud 6		$P_{w6} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{2(p)} = 40,19$ $P_{e6} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{2(p)} = 40,19$	50,49	36,37	7,21	6,91	b_{w1} b_{e1}				
		$P_{w6} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{2(p)} = 40,19$ $P_{e6} = 1,35G_{(p)} = 30,74$	49,99	35,19	7,56	7,24	b_{w2} b_{e2}				
		$P_{w6} = 1,35G_{(p)} = 30,74$ $P_{e6} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{2(p)} = 40,19$	35,42	26,60	4,51	4,31	b_{w3} b_{e3}				
Noeud 7		$P_{w7} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{2(p)} = 40,19$ $P_{e7} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{2(p)} = 40,19$	38,93	54,44	7,92	7,59	c_{w3} c_{e3}				
		$P_{w7} = 1,35G_{(p)} = 30,74$ $P_{e7} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{2(p)} = 40,19$	37,75	53,94	8,27	7,92	c_{w3} c_{e3}				
		$P_{w7} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{2(p)} = 40,19$ $P_{e7} = 1,35G_{(p)} = 30,74$	30,95	42,13	5,71	5,47	c_{w3} c_{e3}				
Noeud 8		$P_{w8} = 1,35G_{(p)} + 1,5Q_{2(p)} = 40,19$	35,83	-	18,30	17,53	d_1 , d_1				
		$P_{w8} = 1,35G_{(p)} = 30,74$	27,41	-	14,00	13,41	d_3				

8-a) Application de la charge totale [$p_{w8} = 1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)} = 40,19 \text{ kN/m}$] dans la travée CD (les points d_1 et d_2 pour la ligne de fermeture du diagramme des moments).

$$M'_{DC} = [p_{w8} (l'_{w8})^2] / 8,5 = [40,19 \times 3,64^2] / 8,5 = 62,65 \text{ kN m} ;$$

$$M_{w8} = M'_{DC} [1 - (K_{w8} / D_8)] = 62,65 [1 - (293 / 684,5)] = 35,83 \text{ kN m} ;$$

$$M_{n8} = M'_{DC} (K_{n8} / D_8) = 62,65 (200 / 684,5) = 18,30 \text{ kN m} ;$$

$$M_{s8} = M'_{DC} (K_{s8} / D_8) = 62,65 (191,5 / 684,5) = 17,53 \text{ kN m}.$$

8-b) Application de la charge permanente [$p_{w8} = 1,35 G_{(p)} = 30,74 \text{ kN/m}$] dans la travée DC (point d_3).

$$M'_{CD} = [p_{w8} (l'_{w8})^2] / 8,5 = [30,74 \times 3,64^2] / 8,5 = 47,92 \text{ kN m} ;$$

$$M_{w8} = M'_{DC} [1 - (K_{w8} / D_8)] = 47,92 [1 - (293 / 684,5)] = 27,41 \text{ kN m} ;$$

$$M_{n8} = M'_{DC} (K_{n8} / D_8) = 47,92 (200 / 684,5) = 14,00 \text{ kN m} ;$$

$$M_{s8} = M'_{DC} (K_{s8} / D_8) = 47,92 (191,5 / 684,5) = 13,41 \text{ kN m}.$$

Les résultats de calcul des moments de continuité agissant dans les sections des nus des appuis sont donnés par le tableau 10.5.

5. Les moments dans la travée AB.

La méthode de calcul des moments dans les travées de la poutre est exposée dans le paragraphe 10.2.1. La portée réelle de la travée AB est égale à : $l = l_{e5} = 4,55 \text{ m}$. Pour la poutre indépendante les moments sont

$$M_{oI} = \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l^2}{8} = \frac{40,19 \cdot 4,55^2}{8} = 104 \text{ kN m} ;$$

$$M_{oII} = \frac{1,35 G_{(p)} \cdot l^2}{8} = \frac{30,74 \cdot 4,55^2}{8} = 79,55 \text{ kN m}.$$

Les moments dans la travée AB pour la poutre continue :

- *maximal* (schémas de calcul 5-b et 6-b, les points a_{e2} et b_{w2}):

$$M_{t(max)} = M_{oI} - (M_{e5} + M_{w6}) / 2 = 104 - (46,39 + 49,99) / 2 = 55,81 \text{ kN m} ;$$

- *minimal* (schémas de calcul 5-c et 6-c, les points a_{e3} et b_{w3}):

$$M_{t(min)} = M_{oII} - (M_{e5} + M_{w6}) / 2 = 79,55 - (45,35 + 35,42) / 2 = 39,16 \text{ kN m}.$$

6. Les moments dans la travée BC. $l = l_{e6} = 1,85 \text{ m}$.

$$M_{oI} = \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l^2}{8} = \frac{40,19 \cdot 1,85^2}{8} = 17,19 \text{ kN m} ;$$

$$M_{oII} = \frac{1,35 G_{(p)} \cdot l^2}{8} = \frac{30,74 \cdot 1,85^2}{8} = 13,15 \text{ kN m}.$$

Les moments dans la travée BC pour la poutre continue :

- *maximal* (schémas de calcul 6-c et 7-c, les points b_{e3} et c_{w3}) :

$$M_{t(max)} = M_{oI} - (M_{e6} + M_{w7}) / 2 = 17,19 - (26,60 + 30,95) / 2 = -11,58 \text{ kN m} ;$$

- *minimal* (schémas de calcul 6-b et 7-b, les points b_{e2} et c_{w2}) :

$$M_{t(min)} = M_{oII} - (M_{e5} + M_{w6}) / 2 = 13,15 - (35,19 + 37,75) / 2 = -23,32 \text{ kN m} ;$$

7. Les moments dans la travée CD. $l = l_{e7} = 4,55 \text{ m}.$

$$M_{oI} = \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l^2}{8} = \frac{40,19 \cdot 4,55^2}{8} = 104 \text{ kN m} ;$$

$$M_{oII} = \frac{1,35 G_{(p)} \cdot l^2}{8} = \frac{30,74 \cdot 4,55^2}{8} = 79,55 \text{ kN m}.$$

Les moments dans la travée CD pour la poutre continue :

- *maximal* (schémas de calcul 7-b et 8-a, les points c_{e2} et d_{w2}):

$$M_{t(max)} = M_{oI} - (M_{e7} + M_{w8}) / 2 = 104 - (53,94 + 35,83) / 2 = 59,11 \text{ kN m} ;$$

- *minimal* (schémas de calcul 7-c et 8-b, les points c_{e3} et d_{w3}):

$$M_{t(min)} = M_{oII} - (M_{e7} + M_{w8}) / 2 = 79,55 - (42,13 + 27,41) / 2 = 44,78 \text{ kN m}.$$

Le diagramme des moments de la poutre intermédiaire est donné par la figure 10.15.

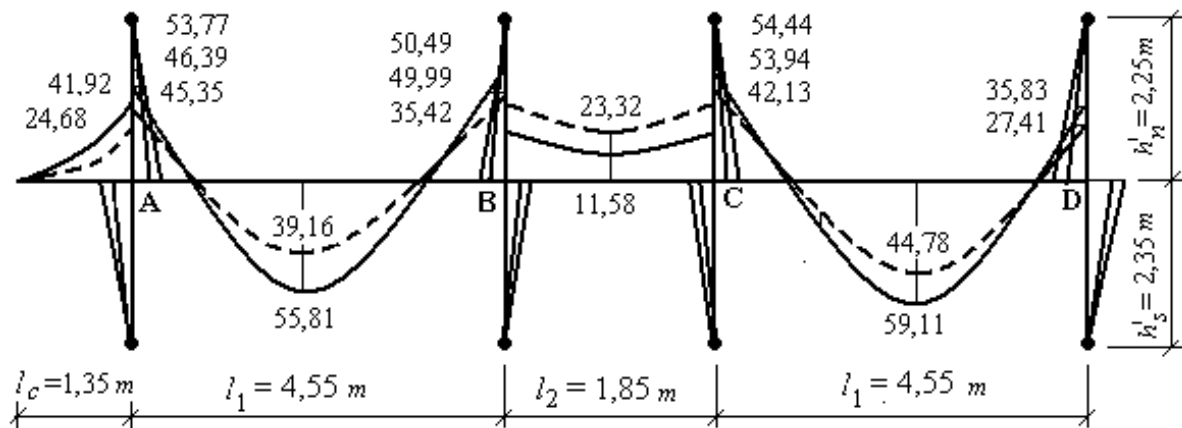


Fig. 10.15

Dans le cas considéré, la travée AB est prolongée par la console, donc on doit considérer également la deuxième combinaison d'application des charges (voir le paragraphe 2.2.2) qui peut être déterminante pour les moments dans la travée AB. Nous étudions successivement deux cas d'application des charges.

1. **Charge permanente** $G_{(pc)} = 20,07 \text{ kN/m}$ et $G_{(p)} = 22,77 \text{ kN/m}$ appliquée respectivement à la console et dans la travée BC et charge totale $G_{(p)} + 1,5 G_B = 22,77 + 1,5 \times 6,3 = 32,22 \text{ kN/m}$ dans la travée AB. Cette combinaison peut donner la plus grande valeur du moment dans la travée AB (fig.10.16).

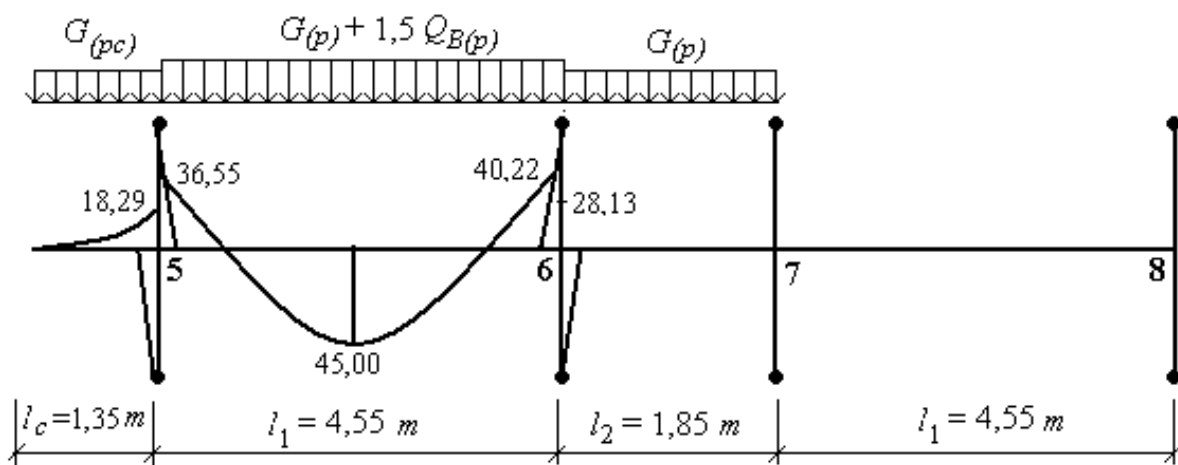


Fig.10.16

Avec ces valeurs des charges on trouve :

- pour le nœud 5

$$M_{(c)} = (G_{(pc)} l_{(c)}^2) / 2 = (20,07 \times 1,35^2) / 2 = 18,29 \text{ kNm} ;$$

$$M'_{AB} = [(G_{(p)} + 1,5 G_B) (l'_{e5})^2] / 8,5 = (32,22 \times 3,64^2) / 8,5 = 50,22 \text{ kNm} ;$$

$$M_{w5} = M_{(c)} = 18,29 \text{ kNm} ;$$

$$M_{e5} = M'_{AB} [1 - K_{e5} / D_5] + M_{w5} (K_{e5} / D_5) = 50,22 [1 - (293 / 684,5)] + 18,29 (293 / 684,5) = 36,55 \text{ kNm} .$$

- pour le nœud 6

$$M'_{BA} = [(G_{(p)} + 1,5 G_B) (l'_{w6})^2] / 8,5 = (32,22 \times 3,73^2) / 8,5 = 52,74 \text{ kNm} ;$$

$$M'_{BC} = (G_{(p)} l'_{(e6)}^2) / 8,5 = (22,77 \times 1,48^2) / 8,5 = 5,87 \text{ kNm} ;$$

$$M''_{BA} = M'_{BA} - (K_{e5} M_{(c)}) / (2,125 D_5) = 52,74 - [293 \times 18,29] / (2,125 \times 684,5) = 49,05 \text{ kNm} ;$$

$$M_{w6} = M''_{BA} [1 - (K_{w6} / D_6)] + M'_{BC} (K_{w6} / D_6) = 49,05 [1 - (286 / 1398,5)] + 5,87 (286 / 1398,5) = 40,22 \text{ kNm} ;$$

$$M_{e6} = M''_{BA} (K_{e6} / D_6) + M'_{BC} [1 - (K_{e6} / D_6)] =$$

$$= 49,05 (721 / 1398,5) + 5,87 [1 - (721 / 1398,5)] = 28,13 \text{ kN m.}$$

Le moment de flexion dans la travée AB dû à des charges totales est égal à :

$$M'_O = [(G_{(c)} + 1,5 G_B) (l_{e5})^2] / 8 = (32,22 \times 4,55^2) / 8 = 83,38 \text{ kN m ;}$$

$$M_t = M_O - (M_{e5} + M_{w6}) / 2 = 83,38 - (36,55 + 40,22) / 2 = 45,0 \text{ kN m.}$$

Ainsi, cette combinaison d'application des efforts n'est pas déterminante, en effet, dans la travée AB la valeur maximale du moment $M_{t(max)} = 55,81 \text{ kN m}$ (voir le calcul précédent et la figure 10.15).

2. Les charges totales $G_{(pc)} + 1,5 G_{B(pc)} = 20,07 + 1,5 \times 12,6 = 38,97 \text{ kN / m}$ et $G_{(p)} + 1,5 G_{B(p)} = 22,77 + 1,5 \times 6,3 = 32,22 \text{ kN / m}$ appliquées respectivement à la console et dans la travée BC et la charge permanente seulement $G_{(p)} = 22,77 \text{ kN / m}$ appliquée dans la travée AB. Cette combinaison peut donner la plus petite valeur du moment dans la travée AB.

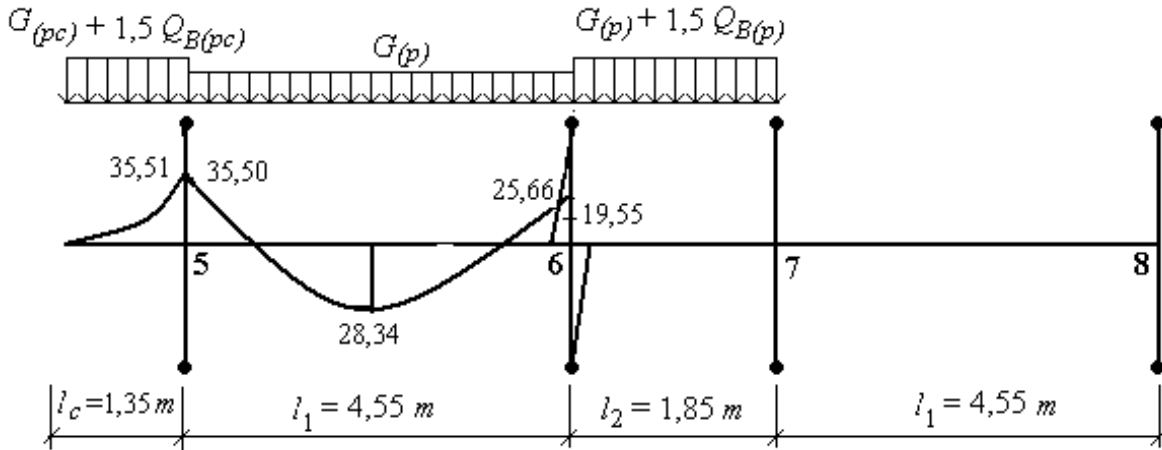


Fig.10.17

Comme précédemment on calcule :

- **pour le nœud 5.**

$$M_{(c)} = [(G_{(pc)} + 1,5 G_{B(pc)}) (l_c)^2] / 2 = (38,97 \times 1,35^2) / 2 = 35,51 \text{ kN m ;}$$

$$M'_{AB} = [G_{(p)} (l'_{e5})^2] / 8,5 = (22,77 \times 3,64^2) / 8,5 = 35,49 \text{ kN m ;}$$

$$M_{w5} = M_{(c)} = 35,51 \text{ kN m ;}$$

$$M_{e5} = M'_{AB} [1 - (K_{e5} / D_5)] + M_{w5} (K_{e5} / D_5) = \\ = 35,49 [1 - (293 / 684,5)] + 35,51 (293 / 684,5) = 35,50 \text{ kN m.}$$

- **pour le nœud 6**

$$M'_{BA} = [(G_{(p)} + 1,5 G_B) (l'_{w6})^2] / 8,5 = (22,77 \times 3,73^2) / 8,5 = 37,27 \text{ kN m ;}$$

$$M'_{BC} = [(G_{(p)} + 1,5 G_{B(p)}) (l'_{e6})^2] / 8,5 = (32,22 \times 1,48^2) / 8,5 = 8,30 \text{ kN m ;}$$

$$M''_{BA} = M'_{BA} - [(K_{e5} M_{(c)}) / (2,125 D_5)] = \\ = 37,27 - [293 \times 35,51] / (2,125 \times 684,5) = 30,12 \text{ kN m ;}$$

$$\begin{aligned}
M_{w6} &= M''_{BA} [1 - (K_{w6} / D6)] + M'_{BC} (K_{w6} / D6) = \\
&= 30,12 [1 - (286 / 1398,5)] + 8,30 (286 / 1398,5) = 25,66 \text{ kN m} ; \\
M_{e6} &= M''_{BA} (K_{e6} / D6) + M'_{BC} [1 - (K_{e6} / D6)] = \\
&= 30,12 (721 / 1398,5) + 8,30 [1 - (721 / 1398,5)] = 19,55 \text{ kN m}.
\end{aligned}$$

Le moment de flexion dans la travée AB dû à des charges permanentes appliquées dans cette travée sera égal à :

$$M'_o = [G(p) (l_{e5})^2] / 8 = (22,77 \times 4,55^2) / 8 = 58,92 \text{ kN m} ;$$

$$M_t = M_o - (M_{e5} + M_{w6}) / 2 = 58,92 - (35,50 + 25,66) / 2 = 28,34 \text{ kN m}.$$

Ainsi, cette combinaison d'application des efforts donne le moment dans la travée AB qui est plus petit que celui déterminé d'après le calcul précédent, en effet $M_t = 28,34 \text{ kN m} < M_{t(max)} = 39,16 \text{ kN m}$ (voir le calcul précédent). Cependant ces deux valeurs des moments ne sont pas déterminant pour calculer les armatures dans la travée de la poutre.

10.3. Calcul du ferrailage de la poutre principale du plancher intermédiaire

10.3.1. Calcul des sections normales de la poutre

Pour le béton de la qualité $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$, on a la résistance de calcul $f_{bc} = 0,85 f_{c28} / \gamma_b = 0,85 \times 20 / 1,5 = 11,3 \text{ MPa}$ et pour des armatures longitudinales en acier Fe E 400 : $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa}$.

1. La section de la poutre dans la travée AB (le moment maximal $M_{t1} = 55,81 \text{ kN m}$) est une section en " T " avec la table dans la zone comprimée. La largeur de hourdis à prendre en compte est limitée par :

$$b \leq 2 (l_1 / 10) + b_o = 2 (455 / 10) + 20 = 110 \text{ cm} ;$$

$$b \leq 2 (l_{ps} / 2) + b_o = 2 (340 / 2) + 20 = 360 \text{ cm}.$$

On prend pour le calcul $b = 110 \text{ cm}$.

Pour déterminer la position de l'axe neutre, on suppose qu'il passe par la partie inférieure de la table comprimée, et on calcule le moment repris par la section (donc en posant que $0,8 y = h_o$):

$$M_t = f_{bc} b h_o (d - h_o / 2) = 11,3 \times 1100 \times 40 (365 - 40 / 2) = 171 \times 10^6 \text{ N mm}.$$

On a que $M_t = 171 \text{ kN m} > M_u = M_{t1} = 55,81 \text{ kN m}$, donc seule une partie de la table est comprimée, c'est-à-dire que $0,8 y < h_o$. Alors la section en " T " est

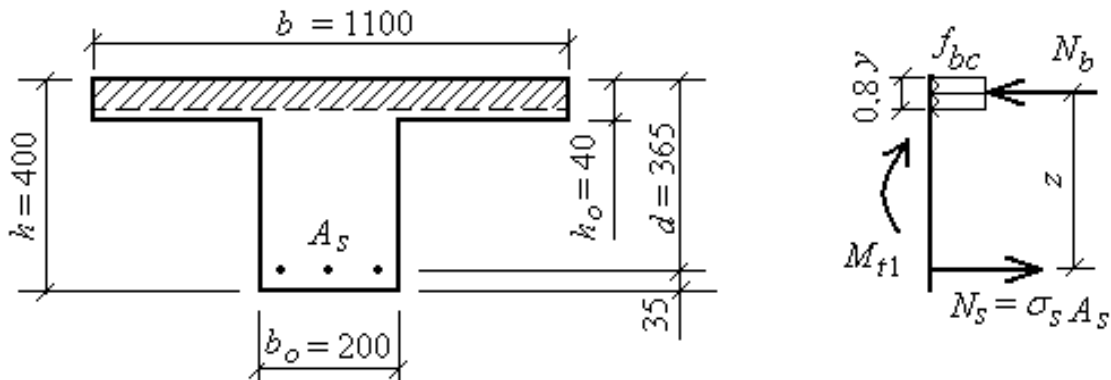


Fig. 10.18

calculée comme une section rectangulaire de largeur $b = 1100 \text{ mm}$ et de hauteur utile $d = 365 \text{ mm}$ (figure 10.16).

Pour cette section on calcule :

$$\mu = \frac{M_u}{f_{bc} b d^2} = \frac{55,81 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 1100 \cdot 365^2} = 0,0337.$$

D'après le tableau A.3 on trouve : $\beta = 0,983$, $\alpha = 0,0434$, $1000 \varepsilon_s = 10$.

On a que $1000 \varepsilon_s = 10 > 1000 \varepsilon_l = 1,739$ (tableau A.2), donc on prend $\sigma_s = 348 \text{ MPa}$.

On peut vérifier la hauteur de la zone comprimée du béton :

$$0,8 y = 0,8 \alpha d = 0,8 \times 0,0434 \times 365 = 12,7 \text{ mm} < h_o = 40 \text{ mm},$$

c'est-à-dire qu'en effet l'axe neutre se trouve dans la table.

La section des armatures dans la travée AB sera égale à :

$$A_s = \frac{M_u}{\beta d \sigma_s} = \frac{55,81 \cdot 10^6}{0,983 \cdot 365 \cdot 348} = 446,98 \text{ mm}^2.$$

On prend $2 \varnothing 12$ et $1 \varnothing 16$ avec $A_s = 427 \text{ mm}^2$.

2. La section dans la travée CD (le moment $M_{t3} = 59,11 \text{ kN m}$).

Vu que le moment $M_u = M_{t3} = 59,11 \text{ kN m} < M_t = 171 \text{ kN m}$, l'axe neutre passe par la table et la section à calculer est une section rectangulaire avec les dimensions $b \times d = 1100 \text{ mm} \times 365 \text{ mm}$ (figure 21.16). Donc on calcule :

$$\mu = \frac{M_u}{f_{bc} b d^2} = \frac{59,11 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 1100 \cdot 365^2} = 0,0357 \approx 0,036.$$

Pour cette valeur de μ on trouve dans le tableau A.3 $\beta = 0,982$, $1000 \varepsilon_s = 10$.

$$A_s = \frac{M_u}{\beta d \sigma_s} = \frac{59,11 \cdot 10^6}{0,982 \cdot 365 \cdot 348} = 473,9 \text{ mm}^2.$$

On prend pour la travée *CD* 2Ø12 et 1Ø18 avec $A_s = 480 \text{ mm}^2$.

3. Dans la travée BC le moment a le signe négatif. C'est pourquoi cette travée (dans la zone inférieure) est armée constructivement par le prolongement des armatures inférieures des travées *AB* et *CD* (2Ø12 mm). Le ferrailage de la travée *BC* par des armatures supérieures est considéré dans la partie de construction de l'épure des armatures (voir paragraphe 10.3.3).

4. Les moments sur des appuis A (de droite) et C (de droite) ont les moments à peu près les mêmes. Donc on peut calculer les mêmes ferrailages pour tous les trois appuis d'après le moment $M_C = 54,44 \text{ kNm}$.

Vu que la table de la section en "T" se trouve dans la zone tendue, on calcule des armatures de la zone tendue comme pour une section rectangulaire avec les dimensions (en millimètres) $b_o \times d = 200 \times 365$ (fig. 10.19). La zone inférieure de cette section est déjà armée par l'armature qui représente le prolongement d'une partie des armatures inférieures des travées *AB* et *CD* (2Ø12 mm, $A_s = 226 \text{ mm}^2$). Donc on peut prendre en compte ces armatures dans le calcul.

En posant, en première approximation $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa}$, on calcule le moment équilibré par l'armature comprimée rapporté au centre de gravité des armatures tendues (voir le paragraphe 3.1.6) :

$$M_2^f = A_s (d - d') \sigma_s = 226 (365 - 35) 348 = 25,95 \times 10^6 \text{ Nmm}.$$

Le moment M_2^f équilibré par des armatures comprimées ne peut dépasser 40 % du moment total, c'est-à-dire $M_2^f < 0,4 M_C = 0,4 \times 54,44 = 21,8 \text{ kNm}$.

Donc on prend $M_2^f = 21,8 \text{ kNm}$.

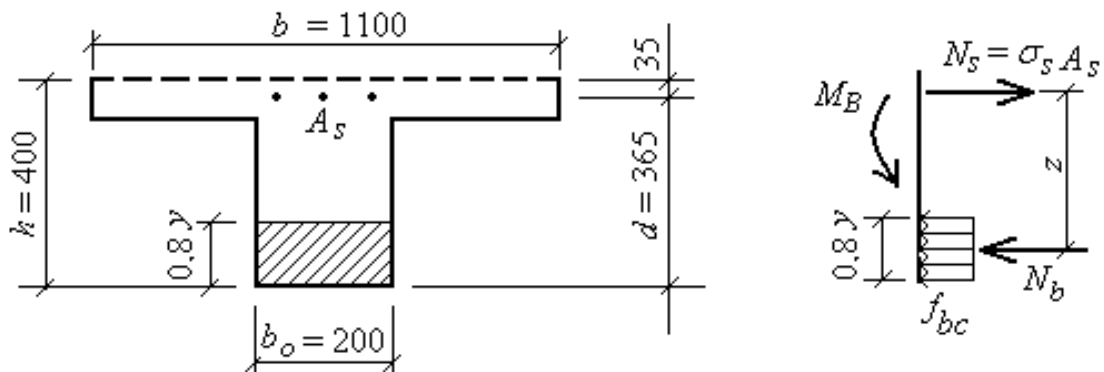


Fig. 10.19

Le moment qui reste à équilibrer par le béton de la zone comprimée :

$$M_1^f = M_u - M_2^f = 54,44 - 21,8 = 32,64 \text{ kNm}$$

D'après ce moment on calcule :

$$\mu = \frac{M_1^f}{f_{bc} b_o d^2} = \frac{32,64 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 200 \cdot 365^2} = 0,108.$$

Pour $\mu = 0,108$ on trouve (tableau A.3) $\beta = 0,943$, $\alpha = 0,1431$, $1000 \varepsilon_s = 10$.

La section des armatures tendues sur des appuis A, B et C sera alors calculée à l'aide de la formule :

$$A_s = \frac{M_1^f}{\beta d \sigma_s} + \frac{0,4 M_C}{(d - d') \sigma_s} = \frac{32,64 \cdot 10^6}{0,943 \cdot 365 \cdot 348} + \frac{21,8 \cdot 10^6}{(365 - 35) 348} = 462,3 \text{ mm}^2.$$

On prend $2\varnothing 12$ et $1\varnothing 18$ avec $A_s = 480 \text{ mm}^2$.

5. Le moment maximal sur l'appui B (de gauche) est $M_B = 50,49 \text{ kNm}$.

La section à calculer est une section rectangulaire de dimensions $b_o \times d = 200 \times 365 \text{ mm}$ (la table se trouve dans la zone tendue). Comme précédemment on calcule (en prenant en compte l'armature de la zone comprimée $2\varnothing 12 \text{ mm}$, $A_s = 226 \text{ mm}^2$) :

$$M_2^f = A_s (d - d') \sigma_s = 226 (365 - 35) 348 = 25,95 \times 10^6 \text{ Nmm}.$$

Le moment M_2^f équilibré par des armatures comprimées ne peut dépasser 40 % du moment total, c'est-à-dire $M_2^f \leq 0,4 M_B = 0,4 \times 50,49 = 20,20 \text{ kNm}$.

Donc on prend $M_2^f = 0,4 M_B = 20,20 \text{ kNm}$.

Le moment qui reste à équilibrer par le béton de la zone comprimée :

$$M_1^f = M_u - M_2^f = 50,49 - 20,20 = 30,29 \text{ kNm}.$$

D'après ce moment on calcule :

$$\mu = \frac{M_1^f}{f_{bc} b_o d^2} = \frac{30,29 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 200 \cdot 365^2} = 0,1006 \approx 0,10.$$

Pour $\mu = 0,1$ on trouve (tableau A.3) $\beta = 0,947$, $\alpha = 0,132$, $1000 \varepsilon_s = 10$.

La section des armatures tendues sur des appuis B est sera alors calculée à l'aide de la formule :

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{M_1^f}{\beta d \sigma_s} + \frac{0,4 M_B}{(d - d') \sigma_s} = \frac{30,29 \cdot 10^6}{0,947 \cdot 365 \cdot 348} + \frac{20,20 \cdot 10^6}{(365 - 35) 348} = \\ &= 251,81 + 175,9 = 427,71 \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

On prend $2\varnothing 12$ et $1\varnothing 16$ avec $A_s = 427 \text{ mm}^2$.

6. Le moment sur l'appui D est égal à 35,83 kN m.

Le mode de calcul de l'armature dans cette section est le même que celui pour des sections sur des appuis A, B et C. La zone comprimée est armée par 2 Ø 12 mm (prolongement des armatures de la travée CD), alors avec $\sigma'_s = 348 \text{ MPa}$ on a que le moment $M_2^f = 25,95 \text{ kN m}$ (voir le calcul précédent). Mais ce moment ne doit pas dépasser $0,4 M_D = 0,4 \times 35,83 = 14,33 \text{ kN m}$. On prend pour le calcul $M_2^f = 14,33 \text{ kN m}$, et le moment $M_1^f = 35,83 - 14,33 = 21,5 \text{ kN m}$ Avec ce moment

on calcule :

$$\mu = \frac{M_1^f}{f_{bc} b_o d^2} = \frac{21,5 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 200 \cdot 365^2} = 0,071,$$

$\alpha = 0,0921$, $\beta = 0,9635$ (tableau A.3). La hauteur de la zone comprimée est égale à : $y = \alpha d = 0,0921 \times 365 = 33,6 \text{ mm} < d' = 35 \text{ mm}$,

donc, on peut calculer l'armature de la zone tendue sans tenir compte l'armature comprimée (la contrainte de cette dernière est proche à zéro).

On prend $M_D = 35,83 \text{ kN m}$:

$$\mu = \frac{M_D}{f_{bc} b_o d^2} = \frac{35,83 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 200 \cdot 365^2} = 0,119, \quad \alpha = 0,1589, \quad \beta = 0,9365,$$

$$A_s = \frac{M_u}{\beta d \sigma_s} = \frac{35,83 \cdot 10^6}{0,9365 \cdot 365 \cdot 348} = 301,2 \text{ mm}^2.$$

On prend 3 Ø 12 avec $A_s = 339 \text{ mm}^2$.

7. Comme ferrailage de la console on prend le prolongement de la partie des armatures de la travée (2 Ø 12 mm dans la zone inférieure) et de toutes les armatures de l'appui A (2 Ø 12 mm et 1 Ø 16 mm dans la zone supérieure). La disposition de ces armatures voir le paragraphe 10.3.4.

10.3.2. Calcul des efforts tranchants de la poutre

Dans le cas des poutres à plusieurs travées, les efforts tranchant d'appui sont calculés par la méthode générale applicable aux poutres continues, en faisant état des moments de continuité. Les valeurs maximales des efforts tranchants peuvent être déterminées en considérant des cas défavorables d'application des charges d'exploitation.

1. Pour trouver la valeur maximale de l'effort tranchant dans la console, on applique à la console la charge totale (fig. 10.20, a) :

$$V_{(c)} = [1,35 G_{(pc)} + 1,5 Q_{B(pc)}] l_c = 46,0 \times 1,35 = 62,10 \text{ kN}.$$

2. Pour trouver la valeur maximale de l'effort tranchant sur l'appui A de droite, on applique la charge totale dans la travée AB [$1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)} = 40,19 \text{ kN/m}$] et sur la console [$1,35 G_{(pc)} + 1,5 Q_{B(pc)} = 46,0 \text{ kN/m}$], ce qui donne la plus grande valeur du moment de flexion sur l'appui A de côté droit, $M_{A(d)} = 53,77 \text{ kN m}$. En même temps dans la travée BC est appliquée la charge permanente, ce qui donne le moment sur l'appui B de côté gauche $M_{B(g)} = 49,99 \text{ kN m}$. Avec ces valeurs on trouve (fig. 10.20, a) :

$$\begin{aligned} V_{A(d)} &= \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l_1}{2} + \frac{M_{A(d)} - M_{B(g)}}{l_1} = \\ &= \frac{40,19 \cdot 4,55}{2} + \frac{53,77 - 49,99}{4,55} = 92,26 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Simultanément l'effort tranchant sur l'appui B de côté gauche sera égal à :

$$\begin{aligned} V_{B(g)} &= \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l_1}{2} - \frac{M_{A(d)} - M_{B(g)}}{l_1} = \\ &= \frac{40,19 \cdot 4,55}{2} - \frac{53,77 - 49,99}{4,55} = 90,60 \text{ kN}. \end{aligned}$$

3. Pour l'effort tranchant maximal sur l'appui B de gauche, on applique la charge totale ($40,19 \text{ kN/m}$) dans la travée AB et BC, ce qui donne le moment maximal $M_{B(g)} = 50,49 \text{ kN m}$. En même temps, la console est sollicitée par la charge permanente [$1,35 G_{(pc)} = 27,09 \text{ kN/m}$], ce qui donne le moment sur l'appui A de côté droit $M_{A(d)} = 46,39 \text{ kN m}$ (fig. 10.20, b).

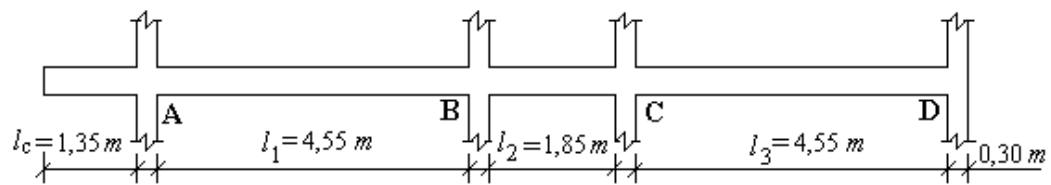
Avec ces valeurs on trouve sur l'appui B :

$$\begin{aligned} V_{B(g)} &= \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l_1}{2} + \frac{M_{B(g)} - M_{A(d)}}{l_1} = \\ &= \frac{40,19 \cdot 4,55}{2} + \frac{50,49 - 46,39}{4,55} = 92,33 \text{ kN}. \end{aligned}$$

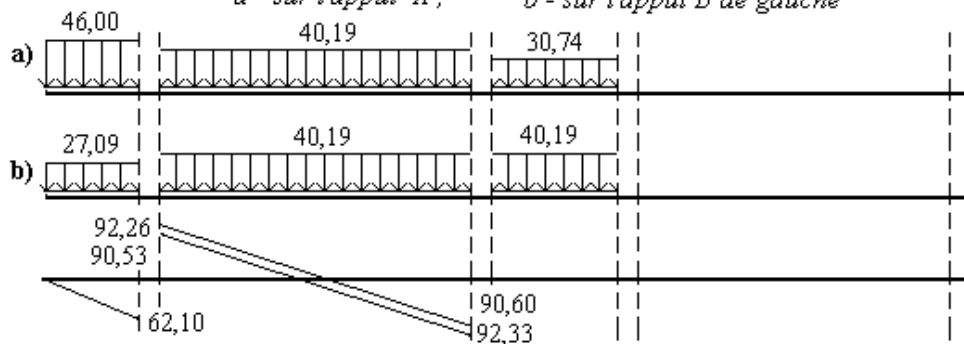
Simultanément l'effort tranchant sur l'appui A de côté droit sera égal à :

$$\begin{aligned} V_{A(d)} &= \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l_1}{2} - \frac{M_{B(g)} - M_{A(d)}}{l_1} = \\ &= \frac{40,19 \cdot 4,55}{2} - \frac{50,49 - 46,39}{4,55} = 90,53 \text{ kN}. \end{aligned}$$

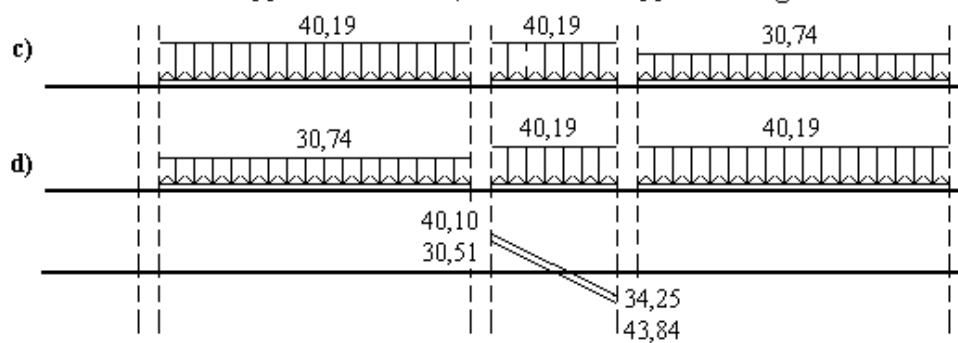
4. L'effort tranchant maximal sur l'appui B de droite. Dans ce cas on applique la charge totale ($40,19 \text{ kN/m}$) dans les travées AB et BC ce qui donne le moment $M_{B(d)} = 36,37 \text{ kN m}$ et la charge permanente ($30,74 \text{ kN/m}$) dans la travée CD, ce qui donne le moment $M_{C(g)} = 30,95 \text{ kN m}$. Alors on trouve (fig. 10.20, c) :



Schémas d'application des charges pour trouver les efforts tranchants maximaux :
 a - sur l'appui A ; b - sur l'appui B de gauche



Schémas d'application des charges pour trouver les efforts tranchants maximaux :
 c - sur l'appui B de droite ; d - sur l'appui C de gauche



Schémas d'application des charges pour trouver les efforts tranchants maximaux :
 e - sur l'appui C de droite ; f - sur l'appui D

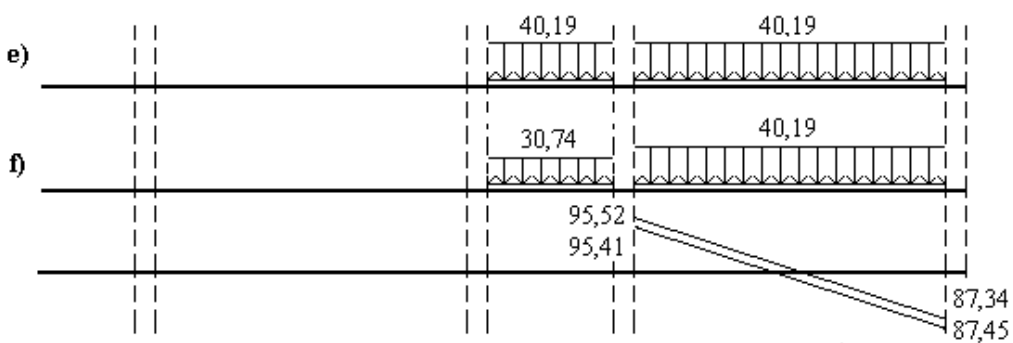


Fig.10.20. Schémas de calcul des efforts tranchants de la poutre

$$\begin{aligned}
 V_{B(d)} &= \frac{[1,35G_{(p)} + 1,5Q_{B(p)}] l_2}{2} + \frac{M_{B(d)} - M_{C(g)}}{l_2} = \\
 &= \frac{40,19 \cdot 1,85}{2} + \frac{36,37 - 30,95}{1,85} = 40,10 \text{ kN}; \\
 V_{C(g)} &= \frac{40,19 \cdot 1,85}{2} - \frac{36,37 - 30,95}{1,85} = 34,25 \text{ kN}.
 \end{aligned}$$

5. L'effort tranchant maximal sur l'appui C de gauche. La charge totale est appliquée dans la travée BC et CD (40,19 kN/m) et la charge permanente (30,74 kN/m) dans la travée AB. Les moments correspondants sont $M_{C(g)} = 38,93 \text{ kN m}$, $M_{B(d)} = 26,60 \text{ kN m}$ (fig. 10.20, d). On calcule :

$$\begin{aligned}
 V_{C(g)} &= \frac{[1,35G_{(p)} + 1,5Q_{B(p)}] l_2}{2} + \frac{M_{C(g)} - M_{B(d)}}{l_2} = \\
 &= \frac{40,19 \cdot 1,85}{2} + \frac{38,93 - 26,60}{1,85} = 43,84 \text{ kN}; \\
 V_{B(d)} &= \frac{[1,35G_{(p)} + 1,5Q_{B(p)}] l_2}{2} - \frac{M_{C(g)} - M_{B(d)}}{l_2} = \\
 &= \frac{40,19 \cdot 1,85}{2} - \frac{38,93 - 26,60}{1,85} = 30,51 \text{ kN}.
 \end{aligned}$$

6. Pour l'appui C de droite on considère le schéma d'application de la charge totale (40,19 kN/m) dans les travées BC et CD, ce qui donne les moments $M_{C(d)} = 54,44 \text{ kN m}$ et $M_{D(g)} = 35,83 \text{ kN m}$. Donc on trouve :

$$\begin{aligned}
 V_{C(d)} &= \frac{[1,35G_{(p)} + 1,5Q_{B(p)}] l_3}{2} + \frac{M_{C(d)} - M_{D(g)}}{l_3} = \\
 &= \frac{40,19 \cdot 4,55}{2} + \frac{54,44 - 35,83}{4,55} = 95,52 \text{ kN}; \\
 V_D &= \frac{40,19 \cdot 4,55}{2} - \frac{54,44 - 35,83}{4,55} = 87,347 \text{ kN}.
 \end{aligned}$$

7. L'effort tranchant maximal sur l'appui D est calculé en appliquant la charge totale dans la travée CD (40,19 kN/m) et la charge permanente (30,74 kN/m) dans la travée BC (fig. 10.20, e), ce qui donne les moments $M_{C(d)} = 53,94 \text{ kN m}$ et $M_D = 35,83 \text{ kN m}$:

$$\begin{aligned}
 V_D &= \frac{[1,35G_{(p)} + 1,5Q_{B(p)}] l_3}{2} + \frac{M_D - M_{C(d)}}{l_3} = \\
 &= \frac{40,19 \cdot 4,55}{2} + \frac{35,83 - 53,94}{4,55} = 87,45 \text{ kN}; \\
 V_{C(d)} &= \frac{40,19 \cdot 4,55}{2} - \frac{35,83 - 53,94}{4,55} = 95,41 \text{ kN}.
 \end{aligned}$$

Les résultats de calcul des efforts tranchants pour la poutre considérée sont données sur la figure 10.21.

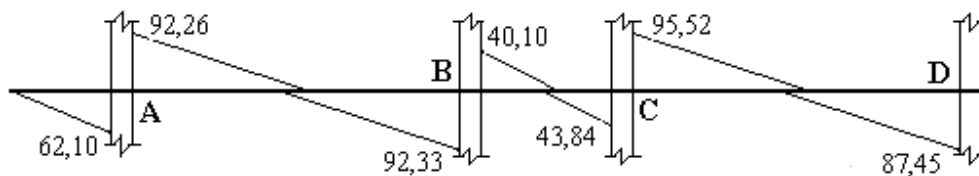


Fig.10.21. Diagramme des efforts tranchants maximaux de la poutre

10.3.3. Calcul des armatures transversales de la poutre

Comme armature transversale de la poutre on utilise des cadres en acier de nuance *Fe E 235* (armature lisse).

1. L'effort tranchant maximal dans la console (appui A de côté gauche) est égal à $V_{u(o)} = V_{A(g)} = 62,10 \text{ kN}$. La section à calculer est rectangulaire avec les dimensions $b \times h = 200 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$. Les dimensions de la poutre peuvent être vérifiées à partir des efforts tranchants maximaux $V_{u(o)}$.

La contrainte tangentielle maximale est calculée à l'aide de la formule :

$$\tau_{u(o)} = V_{u(o)} / b_o d = (62,10 \times 10^3) / (200 \times 365) = 0,85 \text{ MPa}.$$

Pour le cas considéré (la fissuration est non préjudiciable), il faut que les conditions suivantes soient satisfaites (condition 5.3) :

$$\tau_{u(o)} = 0,85 \text{ MPa} \leq 0,2 f_{c28} / \gamma_b = 0,2 \times 20 / 1,5 = 2,67 \text{ MPa};$$

$$\tau_{u(o)} = 0,85 \text{ MPa} \leq 5,0 \text{ MPa}.$$

Les conditions sont satisfaites, c'est-à-dire que les dimensions de la section transversale de la poutre sont suffisantes.

Pour calculer le ferrailage de la section inclinée, on prend en considération l'effort tranchant à la distance $h/2$ de l'appui :

$$V_{u(h/2)} = V_{u(o)} - [1,35 G_{(pc)} + 1,5 Q_{B(pc)}] h/2 = \\ = 62,10 - (1,35 \times 20,07 + 1,5 \times 12,6) (0,4/2) = 52,90 \text{ kN.}$$

La contrainte tangentielle est égale à :

$$\tau_{u(h/2)} = V_{u(h/2)} / b_o d = (52,90 \times 10^3) / (200 \times 365) = 0,725 \text{ MPa.}$$

Pour le cas de la flexion simple sans reprise de bétonnage et lorsque la fissuration est peu préjudiciable, on prend en compte le travail du béton de la zone comprimée en introduisant dans le calcul la valeur de τ_o :

$$\tau_o = 0,3 f_{tj}^* k, \quad \text{avec } f_{tj}^* \leq f_{t28} = 1,8 \text{ MPa (tableau 1.1), } f_{tj}^* \leq 3,3 \text{ MPa.}$$

$$k = 1,0 \text{ pour le cas de la flexion simple.}$$

Donc pour le calcul on prend $\tau_o = 0,3 f_{tj}^* k = 0,3 \times 1,8 = 0,54 \text{ MPa.}$

Pour des armatures transversales $Fe E 235$, $f_e = 235 \text{ MPa.}$

Alors avec ces valeurs on calcule le coefficient de ferrailage de la section par des barres droites (condition 5.12) :

$$\rho_t = \frac{A_t}{b_o S_t} = \frac{\tau_{u(h/2)} - \tau_o}{0,8 f_e} = \frac{0,725 - 0,54}{0,8 \cdot 235} = 0,00098.$$

Le coefficient de ferrailage ne doit pas être inférieur à des valeurs minimales (condition 5.14) :

$$\rho_{t,min} = [0,5 \tau_{u(h/2)}] / f_e = 0,5 \times 0,725 / 235 = 0,00154 ;$$

$$\rho_{t,min} = 0,4 / f_e = 0,4 / 235 = 0,0017.$$

Donc on prend pour le calcul la plus grande valeur $\rho_t = 0,0017$.

Les cadres ont deux branches de 6 mm de diamètre avec $A_t = 57 \text{ mm}^2$, alors on calcule l'espacement exigé des cadres verticaux :

$$S_t = A_t / \rho_t b_o = 57 / (0,0017 \times 200) = 167,65 \text{ mm.}$$

On prend $S_t = 160 \text{ mm}$. Le premier cadre est placé à la distance entre le nu de l'appui et $S_t/2 = 80 \text{ mm}$, ensuite on prend $S_t = 160 \text{ mm}$.

2. L'effort tranchant de l'appui A de droite est égal à $V_{u(o)} = V_{A(d)} = 92,26 \text{ kN}$.

De la même manière on calcule :

$$\tau_{u(o)} = V_{u(o)} / b_o d = (92,26 \times 10^3) / (200 \times 365) = 1,264 \text{ MPa.} \quad \text{Vu que}$$

cette valeur est inférieure à des valeurs limites $0,2 f_{c28} / \gamma_b = 2,67 \text{ MPa}$ et $5,0 \text{ MPa}$, les dimensions de la section de la poutre sont suffisantes.

L'effort tranchant à la distance $h/2$ de l'appui est :

$$V_{u(h/2)} = V_{u(o)} - [1,35 G_{(pc)} + 1,5 Q_{B(pc)}] h/2 = \\ = 92,26 - (1,35 \times 22,77 + 1,5 \times 6,30) (0,4/2) = 84,22 \text{ kN.}$$

$$\tau_{u(h/2)} = V_{u(h/2)} / b_o d = (84,22 \times 10^3) / (200 \times 365) = 1,154 \text{ MPa.}$$

$$\rho_t = \frac{A_t}{b_o S_t} = \frac{\tau_{u(h/2)} - \tau_o}{0,8 f_e} = \frac{1,154 - (0,3 \cdot 1,8)}{0,8 \cdot 235} = 0,00326.$$

$$\rho_{t,min} = [0,5 \tau_{u(h/2)}] / f_e = 0,5 \times 1,154 / 235 = 0,00245 ;$$

$$\rho_{t,min} = 0,4 / f_e = 0,4 / 235 = 0,0017.$$

On prend $\rho_t = 0,00326$. L'espacement des cadres (avec $A_t = 57 \text{ mm}^2$) :

$$S_t = A_t / \rho_t b_o = 57 / (0,00326 \times 200) = 87,4 \text{ mm. Prenons } S_t = 80 \text{ mm.}$$

La répartition des cadres suivant la longueur de la poutre est prise d'après la méthode de Caquot. Premier cadre est placé à la distance $S_t / 2 = 80 / 2 = 40 \text{ mm}$ de nu de l'appui, ensuite, on prend (d'après la condition que $n = l_1 / 2 = 4,55 / 2 = 2,27$, soit $n = 3$) 3 fois $S_t = 80 \text{ mm}$, 3 fois $S_t = 90 \text{ mm}$, 3 fois $S_t = 100 \text{ mm}$, etc. (figure 10.29).

Le même ferrailage par des armatures transversales on prend pour l'appui D (l'effort tranchant $V_D = 87,45 \text{ kN}$).

3. Sur l'appui B de gauche l'effort tranchant est égal à $V_{B(g)} = 92,23 \text{ kN}$ et sur l'appui C de droite $V_{C(d)} = 95,52 \text{ kN}$. On prend le même ferrailage sur ces deux appuis d'après l'effort $V_{u(o)} = V_{C(d)} = 95,52 \text{ kN}$.

La contrainte tangentielle maximale est égale à :

$$\tau_{u(o)} = V_{u(o)} / b_o d = (95,52 \times 10^3) / (200 \times 365) = 1,31 \text{ MPa.}$$

Cette contrainte est inférieure à des valeurs limites : $\tau_{u(o)} = 1,31 < 2,62 \text{ MPa}$.

L'effort tranchant et la contrainte tangentielle à la distance $h / 2$ de l'appui est égal à :

$$V_{u(h/2)} = V_{u(o)} - \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] h}{2} = 95,52 - \frac{40,19 \cdot 0,4}{2} = 87,48 \text{ kN.}$$

$$\tau_{u(h/2)} = V_{u(h/2)} / b_o d = 87,48 \times 10^3 / 200 \times 365 = 1,20 \text{ MPa.}$$

Le coefficient de ferrailage de la section par des barres droites sera :

$$\rho_t = \frac{A_t}{b_o S_t} = \frac{\tau_{u(h/2)} - \tau_o}{0,8 f_e} = \frac{1,20 - (0,3 \cdot 1,8)}{0,8 \cdot 235} = 0,0035.$$

Cette valeur est supérieure à la valeur minimale égale à :

$$\rho_{t,min} = \frac{0,5 \tau_{u(h/2)}}{f_e} = \frac{0,5 \cdot 1,20}{235} = 0,0025.$$

Donc on prend $\rho_t = 0,0035$. L'espacement des barres exigé sera égal à :

$$S_t = A_t / \rho_t b_o = 57 / (0,0035 \times 200) = 81,4 \text{ mm} \approx 80 \text{ mm}.$$

En utilisant la méthode de Caquot on prend la répartition des cadres :

3 fois $S_t = 80 \text{ mm}$, 3 fois $S_t = 90 \text{ mm}$, 3 fois $S_t = 100 \text{ mm}$, etc.

4. Le ferrailage de la travée BC par des armatures transversales est pris le même que celui de la console. En effet, l'effort tranchant maximal dans cette travée est égal à $V_B^d = 43,84 \text{ kN} < V_A^g = 61,20 \text{ kN}$, mais la console a été armée à partir de coefficient de ferrailage ρ_t minimal. Donc pour la travée BC on aussi peut prendre le coefficient de ferrailage minimal égal à $\rho_{t,min} = 0,0017$, ce qui donne le même ferrailage par des barres transversales

10.3.4. Calcul des arrêts des armatures principales de la poutre

Malgré que la poutre considérée soit sollicitée par des charges d'exploitation modérées, mais les portées des travées successives sont dans un rapport entre 0,8 et 1,25, alors on ne peut pas arrêter des barres longitudinales d'après les règles forfaitaires (voir le paragraphe 5.3.3).

1. La travée AB est armée par $2\emptyset 12 \text{ mm}$ et $1\emptyset 18 \text{ mm}$. On arrête dans la travée $1\emptyset 18 \text{ mm}$ et prolonge jusqu'aux appuis $2\emptyset 12 \text{ mm}$. Pour construire la courbe enveloppe, on détermine le moment repris par la section avec des armatures totales ($2\emptyset 12 + 1\emptyset 18$) et celui avec des armatures $2\emptyset 12 \text{ mm}$.

La section 1-1 (fig. 10.22) est armée dans la zone tendue par $2\emptyset 12 \text{ mm}$ et $1\emptyset 18 \text{ mm}$ avec $A_s = 480 \text{ mm}^2$ et la zone comprimée par $2\emptyset 12 \text{ mm}$, $A'_s = 226 \text{ mm}^2$. Vu que l'espacement des étriers au milieu de la travée $S_t > 15 d_l = 15 \times 12 = 180 \text{ mm}$, on considère l'armature comprimée comme purement constructive. En posant que $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa}$, $f_{bc} = f_c 28 / \gamma_b$, et que $0,8 y < h_o$, on calcule la hauteur de la zone comprimée :

$$y = \frac{\sigma_s A_s}{0,8 f_{bc} b} = \frac{348 \cdot 480}{0,8 \cdot 11,3 \cdot 1100} = 16,8 \text{ mm}.$$

Le moment $M_{r,1}$ repris par la section 1-1 :

$$M_{r,1} = \sigma_s A_s (d - 0,4 y) = 348 \times 480 (365 - 0,4 \times 16,8) = 59,85 \times 10^6 \text{ N mm}.$$

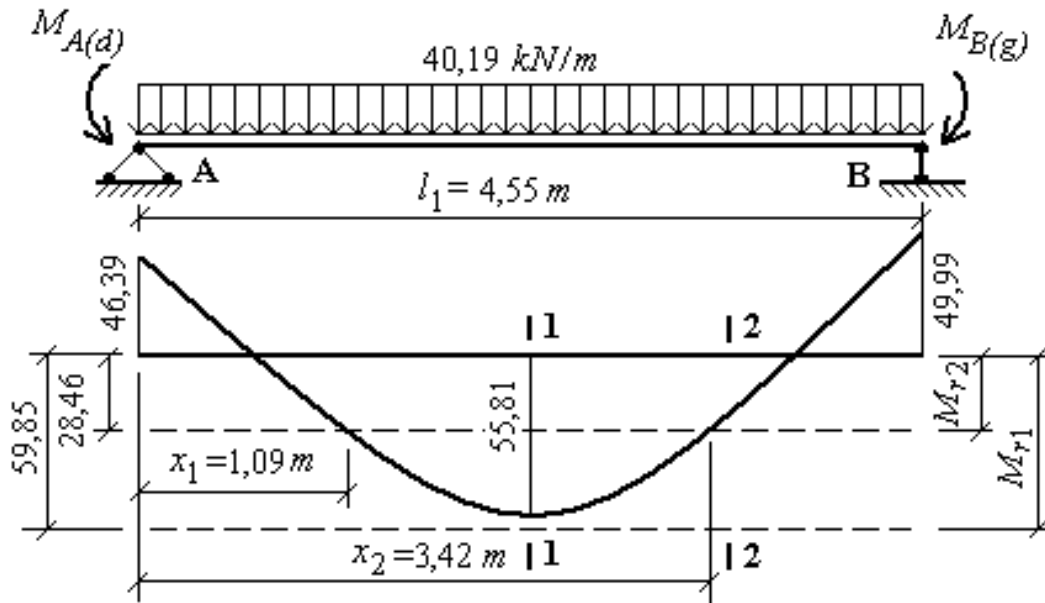


Fig.10.22

De la même manière on trouve le moment M_{r2} pour une section armée par $2 \varnothing 12 \text{ mm}$ ($A_{s2} = 226 \text{ mm}^2$) dans la zone tendue (après avoir arrêté $1 \varnothing 18$) :

$$y = \frac{\sigma_s A_s}{0,8 f_{bc} b} = \frac{348 \cdot 226}{0,8 \cdot 11,3 \cdot 1100} = 7,9 \text{ mm}.$$

Le moment M_{r2} repris par la section 2-2 :

$$M_{r2} = \sigma_s A_{s2} (d - 0,4 y) = 348 \times 427 (365 - 0,4 \times 7,9) = 28,46 \times 10^6 \text{ N mm}.$$

Pour calculer les points d'arrêt théorique on écrit l'équation des moments de flexion agissants à la distance "x" de l'appui "A" (fig. 10.19) :

$$M_x = V_{A(d)} x - M_{A(d)} - [1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] x^2 / 2$$

avec :

$$V_{A(d)} = \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l_1}{2} + \frac{M_{A(d)} - M_{B(g)}}{l_1} =$$

$$= \frac{40,19 \cdot 4,55}{2} + \frac{46,39 - 49,99}{4,55} = 90,64 \text{ kN}.$$

En remplaçant M_x par le moment de section M_{r2} , on a :

$$M_{r2} = 28,46 = 90,64 x - 46,39 - 40,19 x^2 / 2 \text{ ou encore :}$$

$$x^2 - 4,510 x + 3,725 = 0, \text{ d'où } x_1 = 1,09 \text{ m}, \quad x_2 = 3,42 \text{ m}.$$

Donc, 1 barre de 18 mm de diamètre théoriquement doit être arrêtée à des distances 1,09 m et 3,42 m de l'appui "A". Mais pour tenir compte de l'influence des efforts tranchants on doit déplacer les points d'arrêt théorique à la distance $0,8 h = 0,8 \times 0,4 = 0,32 m$ vers des appuis. De plus, on doit prendre en compte la longueur de scellement des barres :

$$l_s = 40 \varnothing = 40 \times 0,018 = 0,72 m.$$

Avec ces remarques les points d'arrêt pratique des barres se trouvent à des distances des appuis :

- gauche (appui "A") $x_1 - 0,8 h = 1,09 - 0,32 = 0,77 m$;
- droit (appui "B") $l_1 - x_2 - 0,8 h = 4,55 - 3,35 - 0,32 = 0,81 m$.

2. La travée CD est armée par $2 \varnothing 12 mm$ et $1 \varnothing 18 mm$. On arrête dans la travée $1 \varnothing 18 mm$ et prolonge jusqu'aux appuis $2 \varnothing 12 mm$. Pour construire la courbe enveloppe, on détermine le moment repris par la section avec des armatures totales ($2 \varnothing 12 + 1 \varnothing 18$) et celui avec des armatures $2 \varnothing 12 mm$. Le calcul est fait de la même manière que celui pour la travée AB (nous le faisons à l'aide de coefficient α) :

$$\alpha = \frac{\sigma_s A_s}{0,8 f_{bc} b d} = \frac{348 \cdot 480}{0,8 \cdot 11,3 \cdot 1100 \cdot 365} = 0,04602;$$

$$M_{r3} = f_{bc} 0,8 \alpha b d^2 (1 - 0,4 \alpha) =$$

$$= 11,3 \cdot 0,8 \cdot 0,04602 \cdot 1100 \cdot 365^2 (1 - 0,4 \cdot 0,04602) = 59,85 \cdot 10^6 Nmm.$$

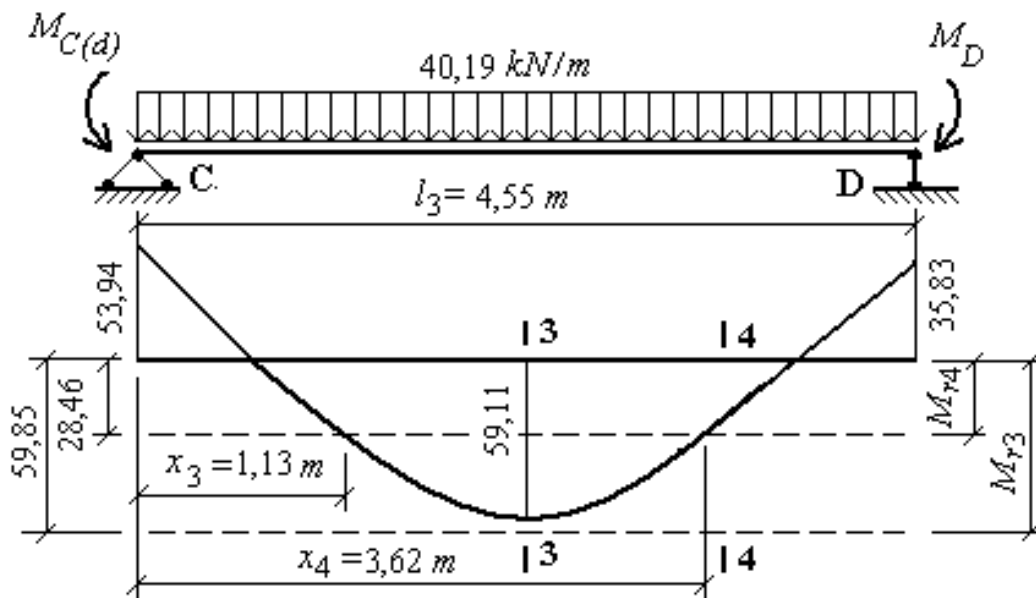


Fig. 10.23

Ce moment est supérieur au moment de la travée CD (égal à $59,11 \text{ kNm}$). Dans cette travée on arrête $1 \text{ } \varnothing 18 \text{ mm}$, alors le moment repris par la section avec $2 \text{ } \varnothing 12 \text{ mm}$ sera égal à $M_{r,2} = 28,46 \text{ kNm}$ (voir le calcul précédent). Les points d'arrêt théorique de $1 \text{ } \varnothing 18 \text{ mm}$ sont calculés comme précédemment (fig. 10.23).

$$V_{C(d)} = \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l_3}{2} + \frac{M_{C(d)} - M_D}{l_3} =$$

$$= \frac{40,19 \cdot 4,55}{2} + \frac{53,94 - 35,83}{4,55} = 95,41 \text{ kN}$$

$$M_x = M_{r,2} = V_{C(d)} x - M_{C(d)} - [1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] x^2 / 2 ;$$

$$28,46 = 95,41 x - 53,94 - 40,19 x^2 / 2, \text{ d'où}$$

$$x^2 - 4,75 x + 4,10 = 0, \quad x_3 = 1,13 \text{ m}, \quad x_4 = 3,62 \text{ m}.$$

Les points d'arrêt pratique (en tenant compte l'influence de l'effort tranchant et le scellement de l'armature) se trouvent à des distances des appuis :

- gauche (appui C) : $x_3 - 0,8 h = 1,13 - 0,8 \times 0,4 = 0,81 \text{ m}$;

- droit (appui D) : $l_3 - x_4 - 0,8 h = 4,55 - 3,62 - 0,32 = 0,61 \text{ m}$.

La longueur de scellement de $\varnothing 18 \text{ mm}$: $l_s = 40 \varnothing = 40 \times 0,018 = 0,72 \text{ m}$.

3. Sur des appuis "A" et "C" la section est armée par $2 \varnothing 12$ et $1 \varnothing 18$ avec $A_s = 480 \text{ mm}^2$ et sur l'appui "B" par $2 \varnothing 12$ et $1 \varnothing 16$ avec $A_s = 427 \text{ mm}^2$. Pour simplifier le ferrailage de la travée BC (où le moment de flexion est négatif) on peut prolonger les armatures de l'appui (B ou C). Il est préférable de prolonger l'armature de l'appui "C" ($2 \varnothing 12$ et $1 \varnothing 18$) suivant toute la longueur de la travée BC y compris l'appui "B". Alors l'appui "B" devient aussi armé par $2 \varnothing 12$ et $1 \varnothing 18$. La zone comprimée de cette section est armée par $2 \varnothing 12 \text{ mm}$ (le prolongement de l'armature des travées voisines AB et BC).

La section à calculer est rectangulaire de dimensions $b_o \times h = 200 \times 400 \text{ mm}$ (la table se trouve dans la zone tendue). La hauteur relative de la zone comprimée du béton est calculée en prenant en compte l'armature de cette zone (dans ce cas l'espacement des cadres transversaux dans la zone des appuis $S_t < 15 \varnothing_l = 180 \text{ mm}$).

En prenant $\sigma_s = f_e / \gamma_s = 400 / 1,15 = 348 \text{ MPa}$, on trouve :

$$\alpha = \frac{\sigma_s A_{s2} - \sigma_s' A_s'}{0,8 f_{bc} b_o d} = \frac{(480 - 226) 348}{0,8 \cdot 11,3 \cdot 200 \cdot 365} = 0,133 ;$$

$$\mu = 0,8 \alpha (1 - 0,4 \alpha) = 0,8 \times 0,133 (1 - 0,4 \times 0,133) = 0,10.$$

Vu que $\mu = 0,10 < 0,186$, on doit préciser la contrainte des armatures comprimées. Les déformations des armatures comprimées alors peuvent être calculées d'après la condition (avec $\delta' = d' / d = 35 / 365 = 0,096$) :

$$1000 \varepsilon'_s = 10 (\alpha - \delta') / (1 - \alpha) = 10 (0,133 - 0,096) / (1 - 0,133) = 0,427,$$

$$\sigma_{s1}' = 200 (1000 \varepsilon'_s) = 200 \times 0,427 = 85,4 \text{ MPa}.$$

On précise le calcul en prenant la contrainte d'armature comprimée égale à la valeur moyenne :

$$\sigma_{sm}' = (\sigma_s' + \sigma_{s1}') / 2 = (348 + 85,4) / 2 = 216,7 \text{ MPa}.$$

$$\alpha = \frac{\sigma_s A_{s2} - \sigma_{sm}' A_s'}{0,8 f_{bc} b_o d} = \frac{480 \cdot 348 - 226 \cdot 216,7}{0,8 \cdot 11,3 \cdot 200 \cdot 365} = 0,179;$$

$$\mu = 0,8 \alpha (1 - 0,4 \alpha) = 0,8 \times 0,179 (1 - 0,4 \times 0,179) = 0,133.$$

Dans ce cas :

$$1000 \varepsilon'_s = 10 (0,179 - 0,096) / (1 - 0,179) = 1,011.$$

$$\sigma_{s2}' = 200 (1000 \varepsilon'_s) = 200 \times 1,011 = 202 \text{ MPa}.$$

Cette valeur est proche de $\sigma_{sm}' = 216,8 \text{ MPa}$, alors on peut prendre définitivement $\sigma_s' = \sigma_{s2}' = 202 \text{ MPa}$:

$$\alpha = \frac{480 \cdot 348 - 226 \cdot 202}{0,8 \cdot 11,3 \cdot 200 \cdot 365} = 0,184.$$

Le moment repris par l'armature comprimée est égal à :

$$M_2^f = \sigma_s A_s (d - d') = 226 \times 202 (365 - 35) = 15,06 \times 10^6 \text{ N mm}.$$

Alors le moment repris par le béton comprimé sera :

$$M_1^f = 0,8 f_{bc} \alpha b_o d^2 (1 - 0,4 \alpha) =$$

$$= 0,8 \times 11,3 \times 0,184 \times 200 \times 365^2 (1 - 0,4 \times 0,184) = 41,06 \times 10^6 \text{ N mm}.$$

Le moment total repris par la section :

$$M_{r5} = M_1^f + M_2^f = 15,06 + 41,06 = 56,12 \text{ kN m} > M_{C(d)} = 54,44 \text{ kN m}.$$

La condition, que le moment repris par l'armature comprimée ne doit pas dépasser 40 % du moment total, est vérifiée, en effet :

$$M_2^f = 15,06 \text{ kN m} < 0,4 \times 56,12 = 22,48 \text{ kN m}.$$

Après avoir arrêté $1 \varnothing 18 \text{ mm}$, sur des appuis *A*, *B* et *C*, les sections deviennent armées par $2 \varnothing 12$ et elles sont capables de reprendre le moment :

$$\alpha = \frac{\sigma_s A_s}{0,8 f_{bc} b_o d} = \frac{348 \cdot 226}{0,8 \cdot 11,3 \cdot 200 \cdot 365} = 0,119;$$

$$M_{r6} = 0,8 f_{bc} \alpha b_o d^2 (1 - 0,4 \alpha) =$$

$$= 0,8 \times 11,3 \times 0,119 \times 200 \times 365^2 (1 - 0,4 \times 0,119) = 27,3 \times 10^6 \text{ N mm}.$$

La ligne droite correspondante au moment M_{r6} peut se rencontrer soit avec diagramme ayant le moment maximal dans la travée (55,81 kN m) ou avec le diagramme ayant le moment minimal dans la travée (39,16 kN m). Donc on doit vérifier tous les deux cas.

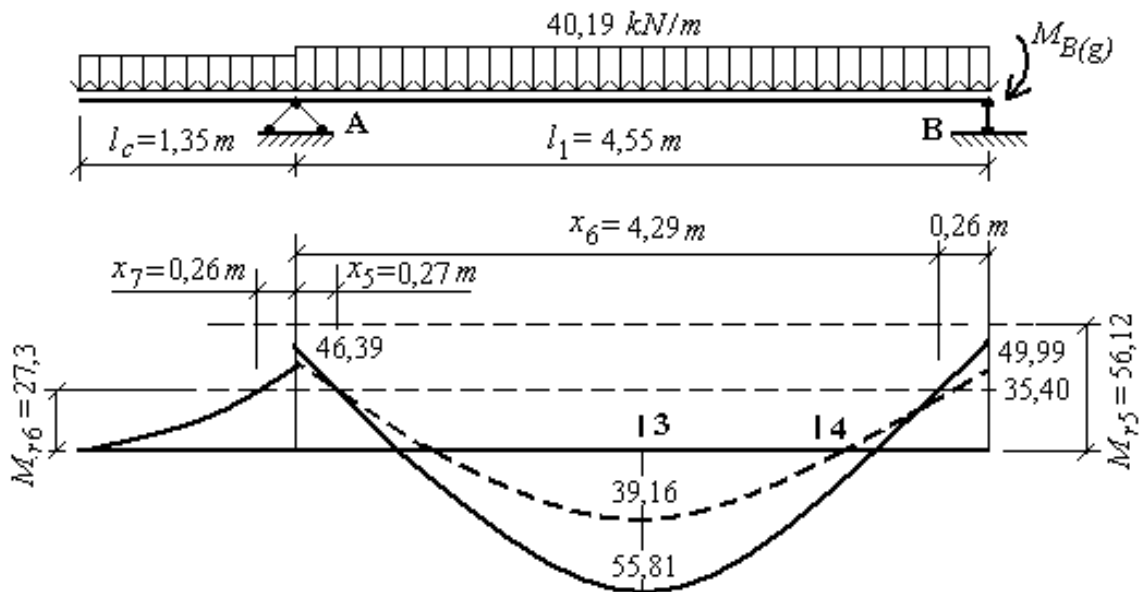


Fig.10.24

Pour le diagramme donnant $M_{max} = 55,81 \text{ kN m}$ dans la travée AB, les moments correspondants sur des appuis sont : $M_{A(d)} = 46,39 \text{ kN m}$; $M_{B(g)} = 49,99 \text{ kN m}$. Dans ce cas on trouve :

$$V_{A(d)} = \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l_1}{2} + \frac{M_{A(d)} - M_{B(g)}}{l_1} =$$

$$= \frac{40,19 \cdot 4,55}{2} + \frac{46,39 - 49,99}{4,55} = 90,64 \text{ kN}.$$

Le point d'arrêt théorique est déterminé comme précédemment :

$$M_x = M_{r6} = V_{A(d)} x - M_{A(d)} - [1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] x^2 / 2 ;$$

$$-27,3 = 90,64 x - 46,39 - (40,19 x^2) / 2, \text{ d'où}$$

$$x^2 - 4,51 x + 0,95 = 0, \quad x_5 = 0,22 \text{ m}, \quad x_6 = 4,29 \text{ m}.$$

Pour le diagramme donnant $M_{min} = 39,16 \text{ kN m}$ dans la travée AB, les moments correspondants sur des appuis sont :

- appui "A" de droite $M_{A(d)} = 45,35 \text{ kN m}$;
- appui "B" de gauche $M_{B(g)} = 35,42 \text{ kN m}$.

La travée AB est sollicitée par la charge permanente $1,35 G_{(p)} = 30,74 \text{ kN/m}$.

$$V_{A(d)} = \frac{1,35 G_{(p)} l_1}{2} + \frac{M_{A(d)} - M_{B(g)}}{l_1} = \frac{30,74 \cdot 4,55}{2} + \frac{45,35 - 35,4}{4,55} = 72,12 \text{ kN}.$$

$$M_x = V_{A(d)} x - M_{A(d)} - (1,35 G_{(p)} x^2) / 2 = 72,12 x - 45,35 - (30,74 x^2) / 2.$$

Avec $M_x = M_{r6} = -27,3 \text{ kNm}$ on trouve :

$$-27,3 = 72,12x - 45,35 - (30,74x^2) / 2 \text{ ou encore } x^2 - 4,6922x + 1,1744 = 0, \text{ d'où :}$$

$$x_5 = 0,27 \text{ m}, \quad x_6 = 4,42 \text{ m}.$$

On doit également considérer le cas d'application de la charge permanente (non majorée) dans la travée AB, la charge permanente (non majorée) et la surcharge (multipliée par le coefficient de majoration) à la console et dans la travée BC (voir le page 367).

$$\text{Dans ce cas on a : } G_{(p)} = 22,77 \text{ kN/m}, \quad M_{A(d)} = 35,50 \text{ kNm},$$

$$M_{B(g)} = 25,66 \text{ kNm}, \quad M_{tr} = 28,34 \text{ kNm}.$$

Comme précédemment on calcule :

$$V_{A(d)} = \frac{G_{(p)} l_1}{2} + \frac{M_{A(d)} - M_{B(g)}}{l_1} = \frac{22,77 \cdot 4,55}{2} + \frac{35,50 - 25,66}{4,55} = 53,96 \text{ kN}.$$

$$M_x = V_{A(d)} x - M_{A(d)} - (G_{(p)} x^2) / 2 = 53,96x - 35,50 - (22,77x^2) / 2.$$

En remplaçant M_x par $M_{r6} = -27,3 \text{ kNm}$ on trouve :

$$-27,3 = 53,96x - 35,50 - (22,77x^2) / 2 \text{ ou encore } x^2 - 4,74x + 0,72 = 0.$$

$$\text{D'où on calcule : } x_5 = 0,16 \text{ m}, \quad x_6 = 4,58 \text{ m}.$$

On peut constater que ce mode d'application des charges ne donne pas les valeurs de x défavorables, donc, il n'est pas déterminant dans ce calcul.

Ainsi on prend pour x les valeurs suivantes:

$$x_5 = 0,27 \text{ m (d'après le calcul pour le diagramme correspondant à } M_{min});$$

$$x_6 = 4,29 \text{ m (d'après le calcul pour le diagramme correspondant à } M_{max}).$$

Pour tenir compte de l'influence des efforts tranchants et pour assurer le scellement de barre de diamètre 18 mm, on doit prolonger le barre à la distance : $0,8h = 0,8 \times 0,4 = 32 \text{ m}$ ou à la distance $l_s = 40 \times 0,18 = 0,72 \text{ m}$. Donc les points d'arrêt pratique se trouvent à des distances (pour $l_s > 0,8h$) :

$$\text{- de l'appui "A" : } x_5 + l_s = 0,27 + 0,72 = 0,99 \approx 1,0 \text{ m};$$

$$\text{- de l'appui "B" : } \approx l_1 - x_6 + l_s = 4,55 - 4,29 + 0,72 = 0,98 \text{ m}.$$

4. Sur l'appui "A" de gauche (dans la console) on prolonge 2 barres 12 mm jusqu'à l'extrémité de la console. La barre de diamètre 18 mm doit être arrêtée à la distance x_7 de l'appui. Pour déterminer cette distance, on peut écrire :

$$M_{x'} = (1,35 G_{(pc)} + 1,5 Q_{B(pc)}) (x')^2 / 2, \text{ avec } x' = l_c - x_7.$$

En remplaçant $M_{x'}$ par $M_{r6} = -27,3 \text{ kNm}$, on détermine :

$$-27,3 = 46,0 (x')^2 / 2, \text{ d'où } x' = 1,09 \text{ m et } x_7 = 1,35 - 1,09 = 0,26 \text{ m}.$$

Le point d'arrêt pratique alors sera à la distance de l'appui :

$$x_7 + l_s = 0,26 + 0,72 = 0,98 \text{ m}.$$

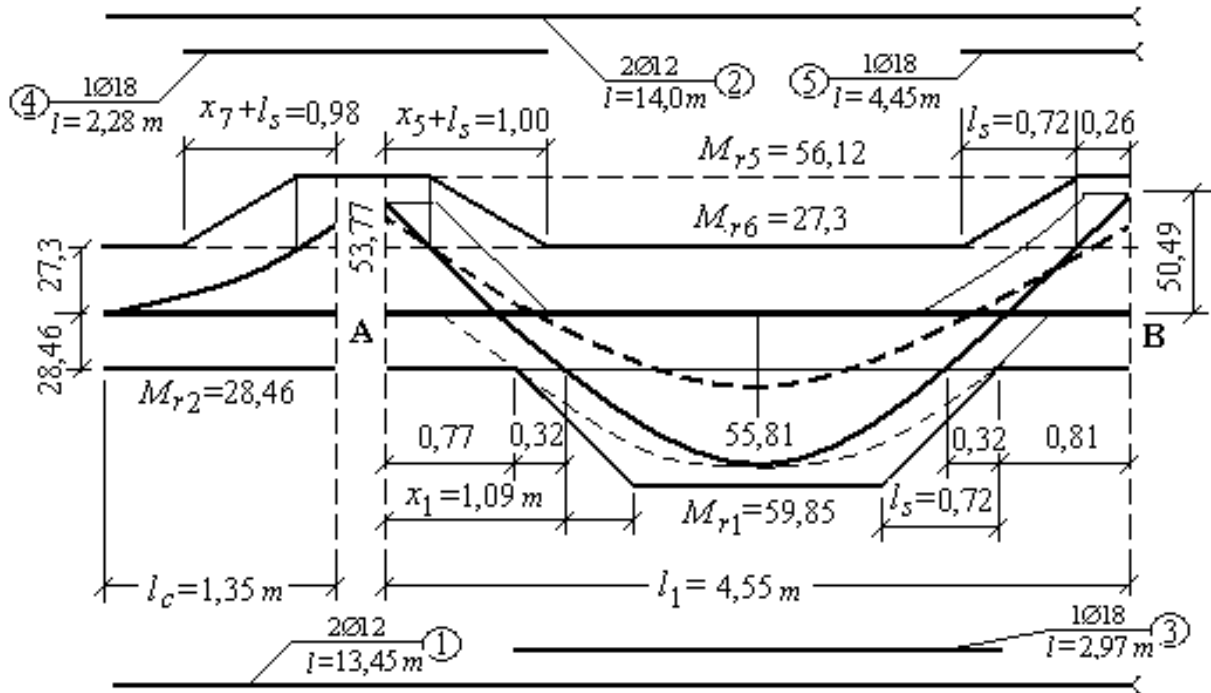


Fig. 10.25. Epure d'arrêt des armatures dans la travée AB

5. Sur l'appui D le moment maximal $M_D = 35,83 \text{ kN m}$. Cette section est armée par 3 $\text{Ø} 12 \text{ mm}$. On arrête 1 $\text{Ø} 12 \text{ mm}$ et on prolonge comme armature supérieure de la travée CD 2 $\text{Ø} 12 \text{ mm}$. Le moment repris par la section avec 2 $\text{Ø} 12 \text{ mm}$: $M_{r6} = -27,3 \text{ kN m}$. Pour construire l'épure des armatures on calcule le moment de la section avec 3 $\text{Ø} 12 \text{ mm}$ (sans tenir compte d'armature comprimée) :

$$\alpha = \frac{\sigma_s A_s}{0,8 f_{bc} b_o d} = \frac{348 \cdot 339}{0,8 \cdot 11,3 \cdot 200 \cdot 365} = 0,178;$$

$$M_{r7} = 0,8 f_{bc} \alpha b_o d^2 (1 - 0,4 \alpha) =$$

$$= 0,8 \times 11,3 \times 0,178 \times 200 \times 365^2 (1 - 0,4 \times 0,178) = 39,8 \times 10^6 \text{ N mm}.$$

Donc $M_{r7} = 39,8 \text{ kN m} > 35,83 \text{ kN m}$.

Le point d'arrêt de 1 barre de 12 mm de diamètre est déterminé comme précédemment.

$$\begin{aligned} V_D &= \frac{[1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l_1}{2} + \frac{M_D - M_{C(d)}}{l_1} = \\ &= \frac{40,19 \cdot 4,55}{2} + \frac{35,83 - 53,94}{4,55} = 87,45 \text{ kN}. \end{aligned}$$

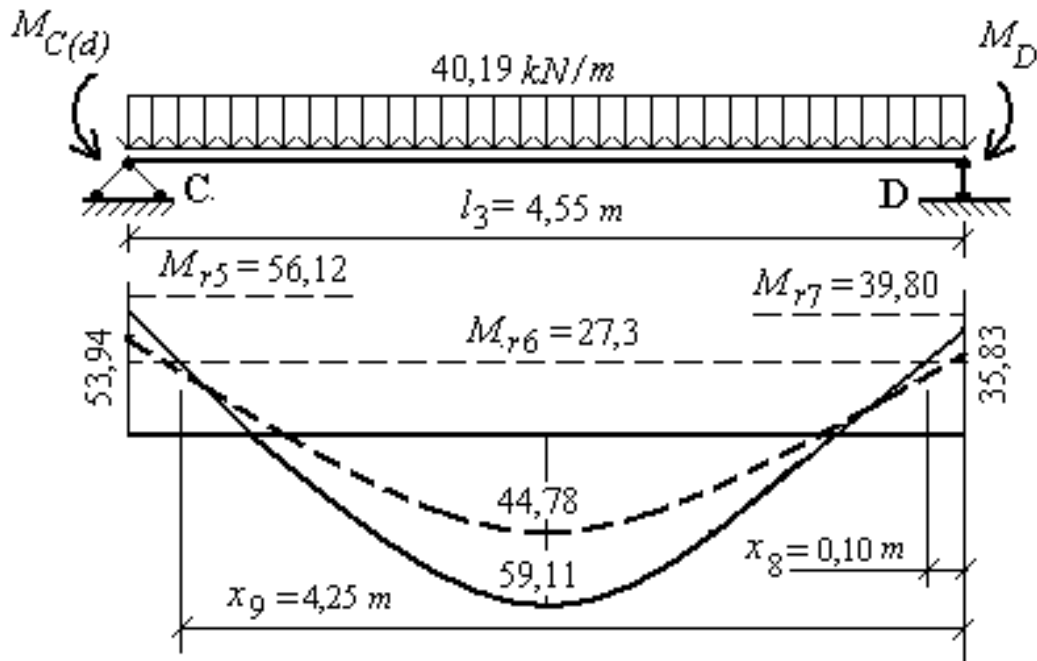


Fig. 10.26

$$M_x = V_D x - M_D - [1,35 G(p) + 1,5 Q_{B(p)}] x^2 / 2 =$$

$$= 87,45 x - 35,83 - (40,19 x^2) / 2.$$

En remplaçant M_x par $M_{r8} = M_{r2} = -27,3 \text{ kNm}$ on trouve :

$$-27,3 = 87,45 x - 35,83 - (40,19 x^2) / 2 \quad \text{ou encore} \quad x^2 - 4,35 x + 0,42 = 0, \text{ d'où :}$$

$$x_8 = 0,10 \text{ m}, \quad x_9 = 4,25 \text{ m}.$$

Les points d'arrêt pratique se trouvent à la distance de l'appui D (en ayant $0,8 h = 0,8 \times 0,40 = 0,32 \text{ m} < l_s = 40 \varnothing_l = 40 \times 0,012 = 0,48 \text{ m}$) :

$$x_8 + l_s = 0,10 + 40 \times 0,012 = 0,58 \text{ m};$$

et de l'appui C (dans ce cas $l_s = 40 \varnothing = 40 \times 0,018 = 0,72 \text{ m}$) :

$$l_3 - x_9 + l_s = 4,55 - 4,25 + 40 \times 0,018 = 1,02 \text{ m}.$$

6. En ce qui concerne la travée BC, où les moments sont négatifs, on doit prolonger toutes les barres des appuis B et C ($2 \varnothing 12$ et $1 \varnothing 18$). En effet, si on arrête $1 \varnothing 18 \text{ mm}$, dans ce cas la section avec $2 \varnothing 12 \text{ mm}$ peut équilibrer le moment $M_{r6} = -27,3 \text{ kNm}$, qui est proche du moment au milieu de la travée BC ($-24,6 \text{ kNm}$). La valeur absolue de ce moment augmente graduellement avec l'éloignement du milieu de la travée, donc, il est préférable de ferrailer la zone supérieure de la travée BC par $2 \varnothing 12 \text{ mm}$ et $1 \varnothing 18 \text{ mm}$. La zone inférieure est armée par $2 \varnothing 12 \text{ mm}$ (figure 10.28 et 10.29).

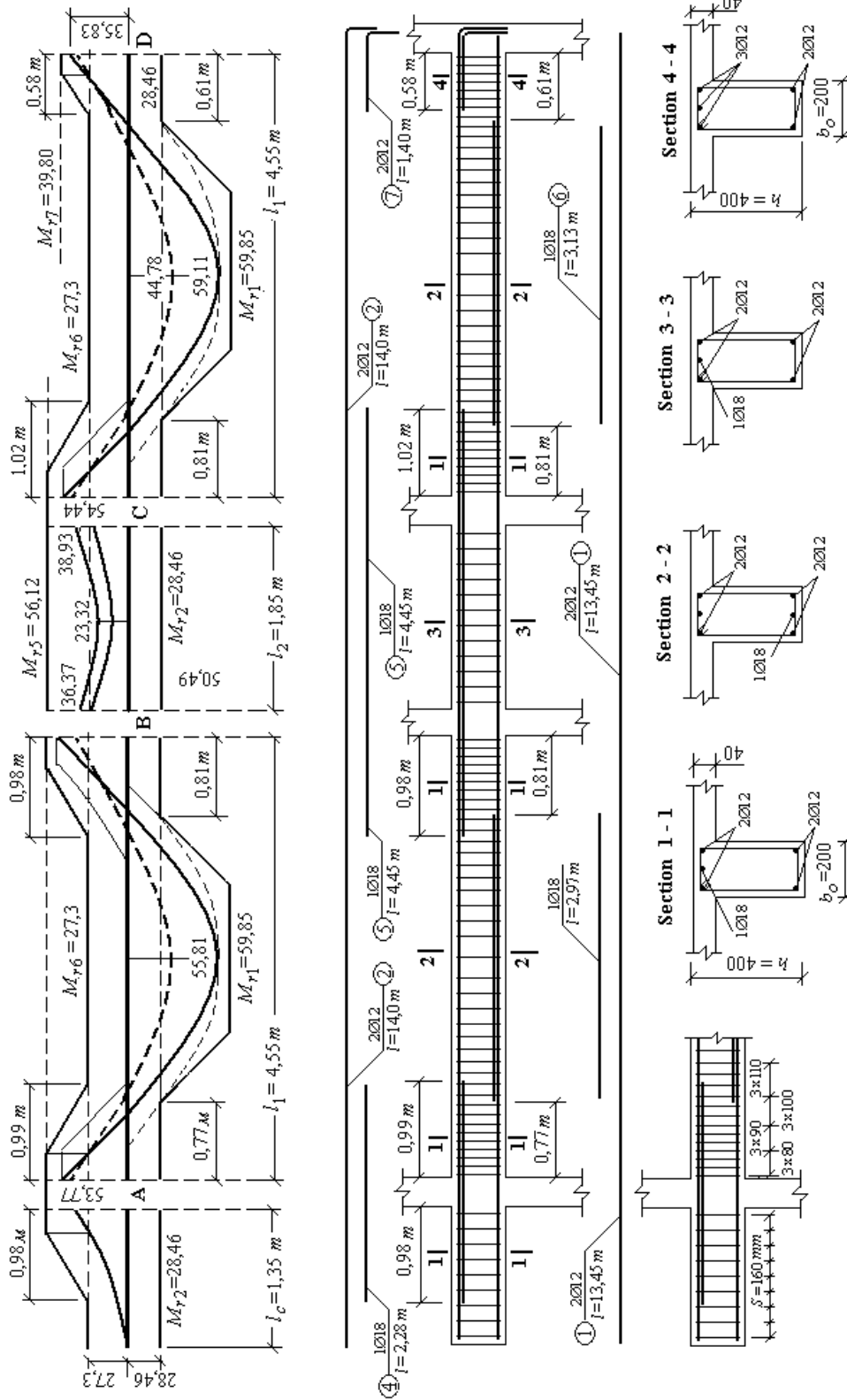


Fig.10.29. Ferrailage de la poutre

10.4. Calcul du ferrailage des poteaux du bâtiment

Les poteaux du bâtiment travaillent à la flexion composée. Pour calculer les armatures longitudinales, on doit étudier les différentes combinaisons d'application des charges. Dans le cas général on prend en considération les combinaisons: les moments de flexion maximaux et les efforts longitudinaux correspondants; les efforts longitudinaux maximaux et les moments de flexion correspondants.

Les moments de flexion des poteaux sont déterminés par le calcul statique du portique. Les efforts longitudinaux des poteaux dans le cas général sont calculés à partir des efforts tranchants des poutres du portique, donc en prenant en compte la continuité de ces poutres. Mais pour simplifier le calcul on peut admettre également la discontinuité des poutres, sauf dans les cas suivants:

dans les bâtiments comportant des travées solidaires supportées par des poteaux de rive et une ou plusieurs files de poteaux intermédiaires, les charges évaluées en admettant la discontinuité sont majorées:

- de 15 % pour les poteaux centraux dans le cas de bâtiment à deux travées;
- de 10 % pour les poteaux intermédiaires voisins des poteaux de rive dans le cas de bâtiment comportant au moins trois travées;
- pour les poteaux de rive les charges évaluées dans l'hypothèse de la discontinuité ne sont pas réduites;
- dans le cas où un élément de rive serait prolongé par un porte-à-faux, on considère, pour le calcul des poteaux, que les charges agissant sur le porte-à-faux sont transmises uniquement aux poteaux de rive.

En ce qui concerne les efforts tranchants dans les poteaux ils sont négligés.

10.4.1. Calcul du poteau de rive gauche

Les valeurs des moments de flexion du poteau de rive (l'axe "A") sont prises d'après le calcul statique du portique (tableaux 10.4 et 10.5).

Section 1-1 (fig. 10.30,a). Pour cette section on ne considère qu'une seule combinaison qui donne simultanément les valeurs maximales de moment M_u et de l'effort N_u . Le moment de flexion est pris d'après le tableau 10.4 (ligne 1-a), $M_{u1} = 24,89 \text{ kN m}$.

L'effort de compression N_u est calculé d'après la surface de chargement du poteau : $l_1 \times l_2 = 3,6 \times 4,85 = 17,46 \text{ m}^2$ (comme une réaction d'appui de la poutre isostatique) :

$$N_{u1} = [1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l_2 / 2 = (31,36 + 5,4) 4,85 / 2 = 89,14 \text{ kN}.$$

Le poteau soumis à l'action de l'effort de compression et du moment de flexion doit être justifié en prenant en compte l'excentricité totale:

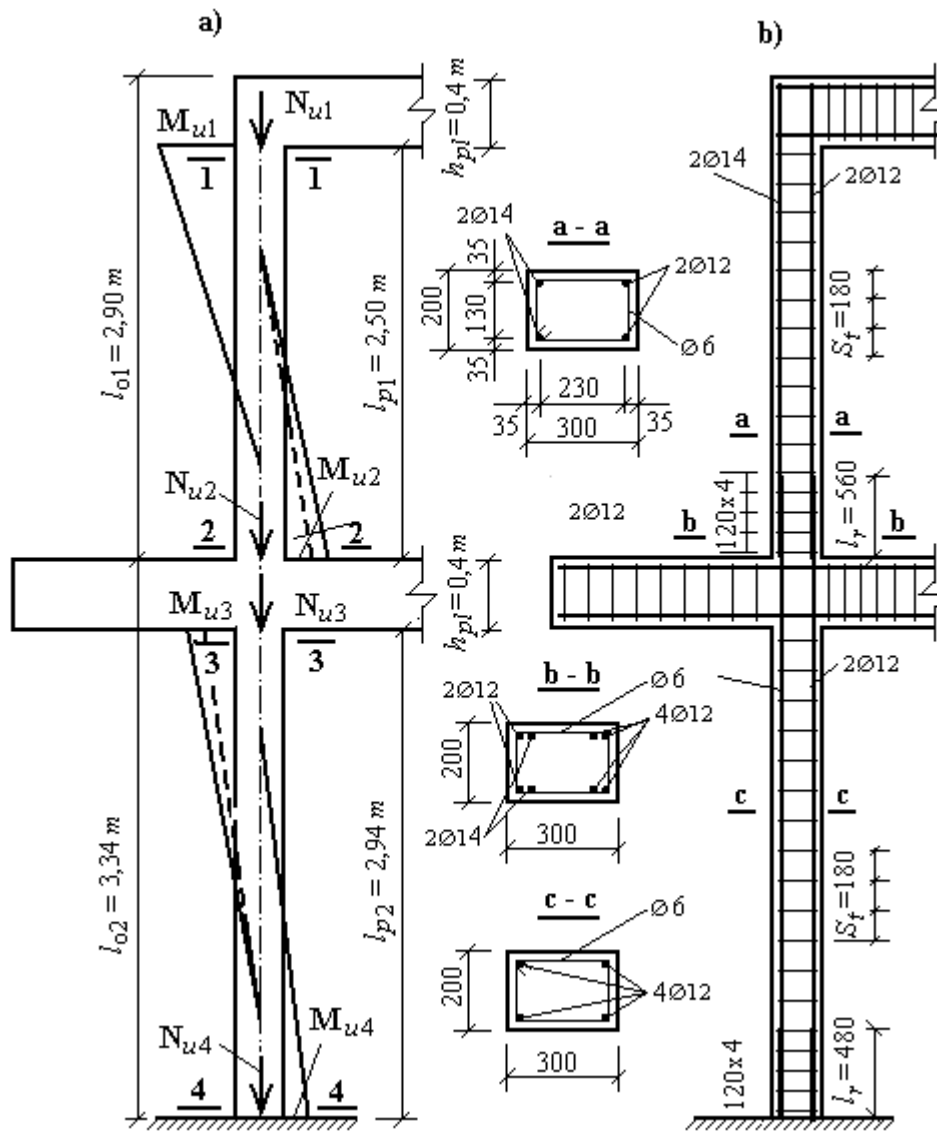


Fig. 10.30

*a - schéma d'application des efforts au poteau de rive gauche;
b - ferrailage des poteaux de rive gauche*

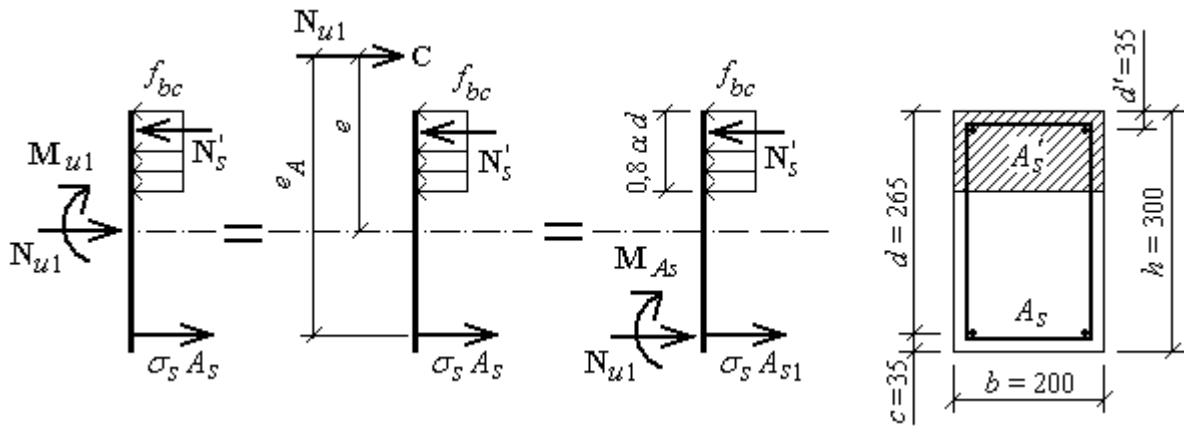


Fig. 10.31. Schéma de calcul de la section 1 - 1

$$e = e_{tot} = e_1 + e_a + e_2,$$

avec e_1 , l'excentricité de premier ordre:

$$e_1 = M_{u1} / N_{u1} = 24,89 / 89,14 = 0,279 \text{ m} ;$$

e_a , l'excentricité additionnelle, qui est prise égale à la plus élevée des deux valeurs :

$$e_a > 2 \text{ cm}, \quad e_a > l_{p1} / 250 = 250 / 250 = 1 \text{ cm}$$

$l_{p1} = 2,5 \text{ m}$ est la longueur du poteau qui est prise égale à la distance entre la face inférieure de la poutre du plancher de couverture et la face supérieure du plancher intermédiaire ;

e_2 , l'excentricité due aux effets du second ordre :

$$e_2 = [3 l_f^2 / (10000 h)] / (2 + \alpha \theta) ;$$

$l_f = l_{o1} = l_{p1} + h_{pl} = 2,5 + 0,4 = 2,9 \text{ m}$ pour le poteau de l'étage (ici l_{o1} est la longueur libre du poteau qui est comptée entre les faces supérieures de deux planchers consécutifs) ;

$\theta = 2$ est le rapport de la déformation finale due au fluage à la déformation instantanée sous la charge considérée ;

α , le rapport du moment du premier ordre dû aux charges permanentes au moment total du premier ordre, ces moments sont pris avant application des coefficients de majoration des charges :

$$\alpha = \frac{M_{perm}}{M_{perm} + M_{expl}} = 10 \left[1 - \frac{M_u}{1,5 M_{ser}} \right].$$

Donc pour trouver la valeur de e_2 on doit déterminer le moment dû à des charges de service M_{ser} . Ce moment peut être calculé d'après le rapport des charges ultimes et de celles de service :

$$M_{ser} = M_u (P_{ser} / P_u) = 24,89 (26,83 / 36,76) = 18,166 \text{ kN m} ;$$

$$\alpha = 10 [1 - (M_u / 1,5 M_{ser})] = 10 [1 - (24,89 / 1,5 \times 18,166)] = 0,86 ;$$

$$e_2 = \frac{3(l_f)^2}{10000 \cdot h} (2 + \alpha \theta) = \frac{3 \cdot 290^2}{10000 \cdot 30} (2 + 0,86 \cdot 2) = 3,13 \text{ cm}.$$

Ainsi, l'excentricité totale d'application des efforts est égale à :

$$e = e_{tot} = e_1 = e_a = e_2 = 0,279 + 0,02 + 0,0313 = 0,3303 \text{ m} \approx 0,33 \text{ m}.$$

Avec cette valeur de l'excentricité on trouve le moment rapporté au centre de gravité de la section :

$$M_{uG} = N_{u1} e = 89,14 \times 0,33 = 29,42 \text{ kNm}.$$

Vu que l'excentricité d'application des efforts $e = 33 \text{ cm}$ est supérieure à la moitié de la distance entre les armatures, en effet

$$e = 33 \text{ cm} > (h - c - d') / 2 = (30 - 3,5 - 3,5) / 2 = 11,5 \text{ cm},$$

le centre de pression "C" se trouve à l'extérieur du segment limité par les armatures, et la section est partiellement comprimée.

Pour calculer les armatures de la section partiellement comprimée on utilise les conditions (4.10). Le moment des efforts extérieurs rapporté au centre de gravité des armatures tendues est égal à :

$$M_{As} = M_{uG} + N_{u1} [(h/2) - c] = N_{u1} e_A = 89,14 \times 0,445 = 39,67 \text{ kNm},$$

avec $e_A = e + d - (h/2) = 0,33 + 0,265 - 0,15 = 0,445 \text{ m}.$

Le poteau a les dimensions de la section transversale $b_p \times h_p = 20 \times 30$ (en cm) et il est fait en béton ayant la résistance caractéristique $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$ (donc $f_{bc} = 11,3 \text{ MPa}$). L'armature longitudinale est faite en acier $Fe E 400$ avec $\sigma_s = 348 \text{ MPa}$, et l'armature transversale en acier $Fe E 215$.

Comme pour une section soumise à la flexion simple on calcule:

$$\mu = \frac{M_{As}}{f_{bc} b d^2} = \frac{39,67 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 200 \cdot 265^2} = 0,250.$$

Ici $d = h - c = 30 - 3,5 = 26,5 \text{ cm} = 265 \text{ mm}.$

D'après le tableau A.1 on trouve : $\mu_l = 0,392$, $1000 \varepsilon_l = 1,739$, et d'après le tableau A.3 : $\beta = 0,8535$, $1000 \varepsilon_s = 6,06$. Vu que $\mu = 0,250 < \mu_l = 0,392$, on n'a pas besoin d'armature comprimée (théoriquement), en plus, $1000 \varepsilon_s = 6,06 > 1000 \varepsilon_l = 1,739$, c'est-à-dire que la contrainte d'armature tendue est égale à $\sigma_s = 348 \text{ MPa}$. Donc on peut calculer la section fictive de l'armature tendue :

$$A_{s1} = \frac{M_{As}}{\beta d \sigma_s} = \frac{39,67 \cdot 10^6}{0,8535 \cdot 265 \cdot 348} = 504 \text{ mm}^2.$$

D'où on calcule la section A_s de l'armature tendue (formule 4.11) :

$$A_s = A_{s1} - (N_{u1} / \sigma_s) = 504 - (89,14 \times 10^3 / 348) = 247,8 \text{ mm}^2.$$

On prend pour la zone tendue $2\text{Ø} 14 \text{ mm}$ avec $A_s = 308 \text{ mm}^2$.

Dans la zone comprimée on doit placer au moins $2\text{Ø} 12 \text{ mm}$ avec $A_s' = 226 \text{ mm}^2$, d'après la condition :

$$A_s' \geq 4 (\text{cm}^2) \times (2b + 2h) / 2 = 4 \times (2 \times 0,2 + 2 \times 0,3) / 2 = 2 \text{ cm}^2 = 200 \text{ mm}^2.$$

Section 2 - 2 (fig.10.30,a et 10.32). Le moment maximal dans cette section est $M_{u2} = M_{n5} = 11,09 \text{ kNm}$ (tableau 10.5, ligne 5-b). L'effort normal correspondant est égal à l'effort N_{u1} plus le poids propre du poteau :

$$1,35 G_{(pot)} = 1,35 b_p h_{p1} \rho_b l_{p1} = 1,35 \times 0,2 \times 0,3 \times 25 \times 2,5 = 5,06 \text{ kN}.$$

$$\text{Donc } N_{u2} = N_{u1} + 1,35 G_{(pot)} = 89,14 + 5,06 = 94,2 \text{ kN}.$$

Le moment M_{u2} est déterminé pour le cas d'application de la charge totale dans la travée AB et de la charge permanente seulement à la console du plancher intermédiaire (voir paragraphe 10.2.2, point 1). Le moment de flexion dû à des charges de service peut être calculé en prenant les mêmes modes de chargement :

- la charge de service appliquée à la console :

$$P_{w5(ser)} = G_{(pc)} = 20,07 \text{ kN/m} ;$$

- la charge de service appliquée dans la travée AB :

$$P_{e5(ser)} = G_{(p)} + Q_{B(p)} = 22,77 + 6,3 = 29,07 \text{ kN/m}.$$

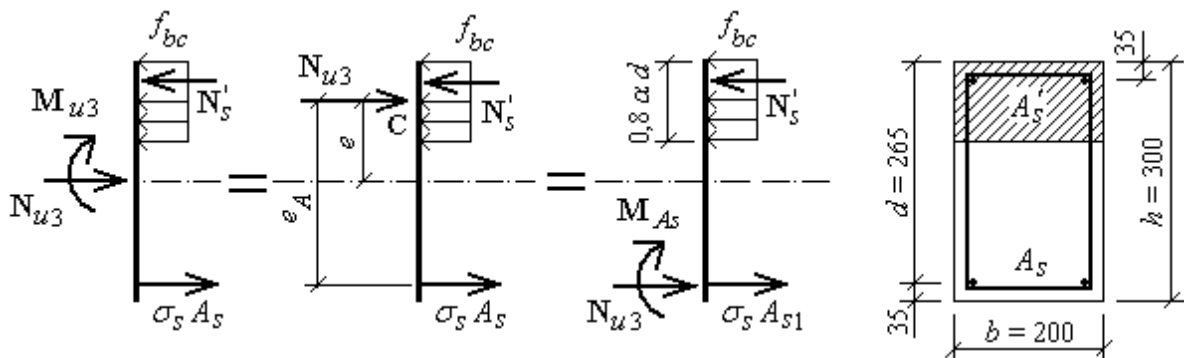


Fig. 10.32. Schéma de calcul de la section 2 - 2

Alors on peut calculer le moment de service dû à ces charges :

$$M_{w5(ser)} = \frac{p_{w5(ser)} (l_c)^2}{2} = \frac{20,07 \cdot 1,35^2}{2} = 18,29 \text{ kNm};$$

$$M'_{AB(ser)} = \frac{p_{e5(ser)} (l'_{e5})^2}{8,5} = \frac{29,07 \cdot 3,64^2}{8,5} = 45,31 \text{ kNm};$$

$$M_{(ser)} = M_{n5(ser)} = [M'_{AB(ser)} - M_{w5(ser)}] \times (K_{n5} / D_5) = \\ = (45,31 - 18,29) \times (200 / 684,5) = 7,89 \text{ kNm}.$$

Donc, pour le calcul on a :

$$M_{u2} = 11,09 \text{ kNm}, \quad M_{(ser)} = 7,89 \text{ kNm}, \quad N_{u2} = 94,2 \text{ kN}.$$

Les excentricités d'application des efforts sont :

$$e_1 = M_{u2} / N_{u2} = 11,09 / 94,2 = 0,12 \text{ m} = 12 \text{ cm};$$

$$e_a \geq 2 \text{ cm}, \quad e_a \geq l_{p1} / 250 = 250 / 250 = 1 \text{ cm}, \quad \text{on prend } e_a = 2 \text{ cm};$$

$$\alpha = 10 [1 - (M_{u2} / 1,5 M_{(ser)})] = 10 [1 - (11,09 / 1,5 \times 7,89)] = 0,629;$$

$$e_2 = \frac{3(l_f)^2}{10000 \cdot h} (2 + \alpha \theta) = \frac{3 \cdot 290^2}{10000 \cdot 30} (2 + 0,629 \cdot 2) = 2,74 \text{ cm} = 0,027 \text{ m}.$$

$$e = e_1 + e_a + e_2 = 0,12 + 0,02 + 0,027 = 0,167 \text{ m} = 16,7 \text{ cm}.$$

Le moment de flexion des efforts par rapport au centre de gravité de la section en béton:

$$M_{uG} = N_{u2} e = 94,2 \times 0,167 = 15,73 \text{ kNm}.$$

L'excentricité d'application des efforts est telle que la section est partiellement comprimée, en effet

$$e = 16,7 \text{ cm} > (h - c - d') / 2 = (30 - 3,5 - 3,5) / 2 = 11,5 \text{ cm},$$

Alors on peut calculer les armatures comme précédemment :

$$M_{As} = M_{uG} + N_{u2} [(h / 2) - c] = 15,73 + 94,2 \times 0,115 = 26,56 \text{ kNm};$$

$$\mu = \frac{M_{As}}{f_{bc} b d^2} = \frac{26,56 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 200 \cdot 265^2} = 0,167.$$

D'après le tableau A.1 on trouve $\mu_l = 0,392$, et d'après le tableau A.3 : $\beta = 0,908$, $1000 \varepsilon_s = 10$. Vu que $\mu = 0,167 < \mu_l = 0,392$, on n'a pas besoin d'armature comprimée (théoriquement). Pour $1000 \varepsilon_s = 10$, la contrainte de l'armature tendue est égale à $\sigma_s = 348 \text{ MPa}$. Donc on peut calculer la section fictive de l'armature :

$$A_{s1} = \frac{M_{As}}{\beta d \sigma_s} = \frac{26,56 \cdot 10^6}{0,908 \cdot 265 \cdot 348} = 317,2 \text{ mm}^2.$$

La section exigée de l'armature tendue alors sera égale à :

$$A_s = A_{s1} - (N_{u2} / \sigma_s) = 317,2 - (94,2 \times 10^3 / 348) = 46,5 \text{ mm}^2.$$

D'après les exigences constructives les armatures longitudinales de traction (pour des poutres et des poteaux comportant une zone tendue) doivent avoir une section au moins égale à un millième de la section droite :

$$A_s \geq b h / 1000 = 200 \times 300 / 1000 = 60 \text{ mm}^2,$$

de plus, pour les poteaux, la section de l'armature de chaque côté doit être au moins égale à :

$$A_s = A_s' \geq 4 \text{ (cm}^2\text{)} [2 b + 2 h] / 2 = 4 (2 \times 0,2 + 2 \times 0,3) / 2 = 2 \text{ cm}^2$$

Donc on doit prendre 2Ø 12 avec $A_s = 226 \text{ mm}^2$,

$$2\text{Ø } 12 \text{ avec } A_s' = 226 \text{ mm}^2.$$

Section 3 - 3. Pour cette section on doit considérer deux combinaisons :

- le moment de flexion maximal et l'effort longitudinal correspondant ;
- l'effort longitudinal maximal et le moment de flexion correspondant.

La première combinaison d'application des charges (ligne 5-b, tableau 10.5) donne $M_{u3} = 10,62 \text{ kN m}$. L'effort de compression correspondant à ce moment sera calculé comme suit :

$$\begin{aligned} N_{u3}^* &= N_{u2} + 1,35 G_{(pc)} l_c + [1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l_2 / 2 = \\ &= 94,2 + 27,09 \times 1,5 + 40,19 \times 4,85 / 2 = 232,29 \text{ kN}. \end{aligned}$$

De plus, on doit prendre en compte le poids propre du mur longitudinal en brique creuses G_m (l'épaisseur du mur $\delta_m = 0,23 \text{ m}$, y compris la couche de mortier de plâtre ; la hauteur du mur $2,5 \text{ m}$; le poids volumique de la maçonnerie et du mortier de plâtre $\rho_m = 14 \text{ kN / m}^3$) et le poids propre de la poutre de chaînages au niveau du plancher intermédiaire G_{ch} (les dimensions de la section (de la poutre $b \times h = 0,2 \text{ m} \times 0,2 \text{ m}$, le poids volumique du béton $\rho_b = 25 \text{ kN / m}^3$). La distance entre les poteaux $l_1 = 3,6 \text{ m}$. Avec ces valeurs on trouve :

$$G_m = 0,23 \times 2,5 \times 3,6 \times 14 = 28,98 \text{ kN};$$

$$G_{ch} = 0,2 \times 0,2 \times 3,6 \times 25 = 3,6 \text{ kN}.$$

$$\begin{aligned} N_{u3} &= N_{u3}^* + 1,35 G_m + 1,35 G_{ch} = 232,29 + 1,35 \times 28,98 + 1,35 \times 3,6 = \\ &= 276,27 \text{ kN}. \end{aligned}$$

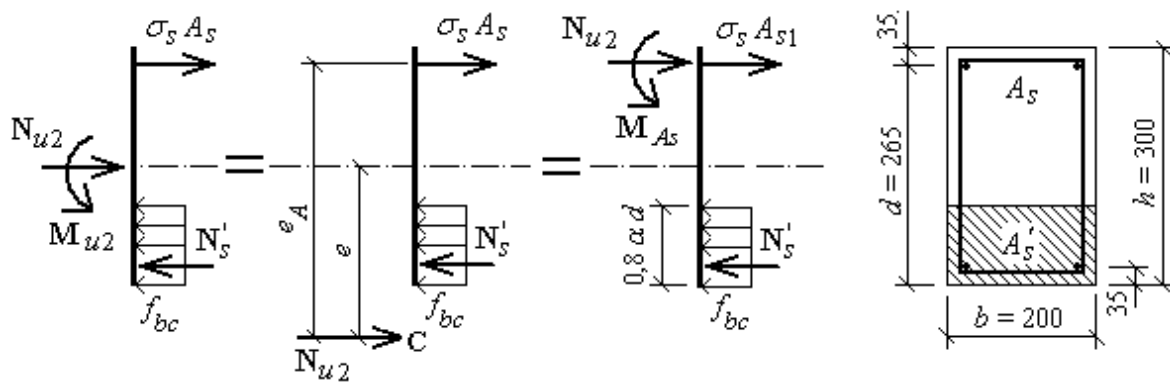


Fig. 10.33. Schéma de calcul de la section 3 - 3

Pour déterminer le moment dû à des charges de service M_{ser} , on calcule comme précédemment (voir le calcul de la section 2 - 2) :

$$M_{w5(ser)} = 18,29 \text{ kN m}, \quad M'_{AB(ser)} = 45,31 \text{ kN m},$$

$$M_{(ser)} = M_{s5(ser)} = [M'_{AB(ser)} - M_{w5(ser)}] (K_{s5} / D_5) = \\ = (45,31 - 18,29) (191,5 / 684,5) = 7,56 \text{ kN m}.$$

Les excentricités d'application des efforts sont :

$$e_1 = M_{u3} / N_{u3} = 10,62 / 276,27 = 0,0384 = 0,038 \text{ m} = 3,8 \text{ cm},$$

$e_a = 2 \text{ cm}$ ($e_a = 2 \text{ cm} > l_{p2} / 250 = 294 / 250 = 1,176 \text{ cm}$, avec $l_{p2} = 2,94 \text{ m}$, la longueur du poteau de rez-de-chaussée) ;

$$\alpha = 10 [1 - (10,62 / 1,5 \times 7,56)] = 0,635.$$

Le poteau de rez-de-chaussée est encasté au niveau de la fondation et assemblé à des poutres de plancher, alors on prend pour la longueur de flambement :

$$l_f = 0,7 l_o = 0,7 \times 3,34 = 2,34 \text{ m}, \quad \text{avec}$$

$$l_o = l_p + h_{pl} = 2,94 + 0,40 = 3,34 \text{ m}.$$

$$e_2 = \frac{3(l_f)^2}{10000 \cdot h} (2 + \alpha \theta) = \frac{3 \cdot 2,34^2}{10000 \cdot 30} (2 + 0,635 \cdot 2) = 1,79 \text{ cm} \approx 0,018 \text{ m}.$$

$$e = e_{tot} = e_1 + e_a + e_2 = 0,038 + 0,02 + 0,018 = 0,076 \text{ m}.$$

Avec cette valeur de l'excentricité on constate que le centre de pression "C" se trouve à l'intérieur du segment limité par des armatures A_s et A'_s , en effet $7,8 \text{ cm} < (d - d') / 2 = (26,5 - 3,5) / 2 = 11,5 \text{ cm}$. Pour établir le cas de travail de la section (partiellement ou entièrement comprimée) on vérifie la condition 4.6 :

$$N_u (d - d') - M_{As} < [0,337 - (0,81 d'/h)] b h^2 f_{bc}, \quad \text{avec}$$

$$\begin{aligned} M_{As} &= N_u e_A = M_{uG} + N_u [d - (h/2)] = N_u e + N_u [d - (h/2)] = \\ &= N_u [e + d - (h/2)] = 276,27 (0,076 + 0,265 - 0,15) = 52,77 \text{ kNm}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_u (d - d') - M_{As} &= 276,27 (0,265 - 0,035) - 52,77 = 10,77 \text{ kNm}; \\ (0,337 - 0,81 d'/h) b h^2 f_{bc} &= (0,337 - 0,81 \times 35 / 300) 200 \times 300^2 \times 11,3 = \\ &= 49,32 \times 10^6 \text{ Nmm} = 49,32 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

Vu que $N_u (d - d') - M_{As} = 10,77 \text{ kNm} < 49,32 \text{ kNm}$, la section est partiellement comprimée *). Donc on peut calculer des armatures comme pour une section travaillant à la flexion simple sous l'action du moment M_{As} :

$$\mu = \frac{M_{As}}{f_{bc} b d^2} = \frac{52,77 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 200 \cdot 265^2} = 0,332.$$

D'après le tableau A.1 on trouve : $\mu_l = 0,392$, $1000 \varepsilon_l = 1,739$ et d'après le tableau A.3 : $\beta = 0,790$, $1000 \varepsilon_s = 3,162$. Vu que $\mu = 0,332 < \mu_l = 0,392$, on n'a pas besoin d'armature comprimée (théoriquement), et que $1000 \varepsilon_s > 1000 \varepsilon_l$ la contrainte de l'armature tendue est prise égale à $\sigma_s = 348 \text{ MPa}$. Donc on peut calculer la section fictive de l'armature :

$$A_{s1} = \frac{M_{As}}{\beta d \sigma_s} = \frac{52,77 \cdot 10^6}{0,790 \cdot 265 \cdot 348} = 724 \text{ mm}^2.$$

La section exigée de l'armature tendue alors sera égale à :

$$A_s = A_{s1} - N_u / \sigma_s = 724 - 276,27 \times 10^3 / 348 < 0.$$

Alors, toutes les deux zones doivent être armées par des armatures d'après les exigences constructives :

$$A_s = A_s' > 4 (2b + 2h) / 2 = 4 (2 \times 200 + 2 \times 300) = 200 \text{ mm}^2$$

On prend $2 \varnothing 12 \text{ mm}$ pour la zone comprimée et $2 \varnothing 12 \text{ mm}$ pour la zone tendue (avec $A_s = A_s' = 226 \text{ mm}^2$).

Deuxième combinaison d'application des charges (ligne 5-a, tableau 10.5).

Le moment de flexion $M_{u3} = M_{s5} = 5,80 \text{ kNm}$. L'effort de compression N_{u3} correspondant à ce moment (en prenant aussi en compte le poids propre du mur) est égal à :

$$\begin{aligned} N_{u3} &= N_{u2} + [1,35 G_{(pc)} + 1,5 Q_{B(pc)}] l_c + \\ &+ [1,35 G_{(p)} + 1,5 Q_{B(p)}] l_2 / 2 + 1,35 G_m + 1,35 G_{ch} = \\ &= 94,2 + 46,00 \times 1,5 + (40,19 \times 4,85) / 2 + 1,35 (28,98 + 3,6) = 304,64 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Pour déterminer le moment dû à des charges de service, on prend :

$$P_{w5(ser)} = G_{(pc)} + Q_{B(pc)} = 20,07 + 12,25 = 32,32 \text{ kN/m} ;$$

$$P_{e5(ser)} = G_{(p)} + Q_{B(p)} = 22,77 + 6,3 = 29,07 \text{ kN/m} ;$$

$$M_{w5(ser)} = \frac{P_{w5(ser)} (l_c)^2}{2} = \frac{32,32 \cdot 1,35^2}{2} = 29,45 \text{ kNm} ;$$

$$M'_{AB(ser)} = \frac{P_{e5(ser)} (l'_{e5})^2}{8,5} = \frac{29,07 \cdot 3,64^2}{8,5} = 45,31 \text{ kNm} ;$$

$$\begin{aligned} M_{ser} = M_{s5(ser)} &= [M'_{AB(ser)} - M_{w5(ser)}] (K_{s5} / D_5) = \\ &= (45,31 - 29,45) \times (191,5 / 684,5) = 4,44 \text{ kNm}. \end{aligned}$$

Les excentricités d'application des efforts sont :

$$e_1 = M_{u3} / N_{u3} = 5,80 / 304,64 = 0,019 \text{ m}, \quad e_a = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m} ;$$

$$\alpha = 10 [1 - (5,80 / 1,5 \times 4,44)] = 1,29 ;$$

$$e_2 = (3 \times 234^2 / 10000 \times 30) \times (2 + 1,29 \times 2) = 2,51 \text{ cm} = 0,0251 \text{ m} ;$$

$$e = e_1 + e_a + e_2 = 0,019 + 0,02 + 0,0251 = 0,0641 \text{ m} \approx 0,064 \text{ m}.$$

L'excentricité totale d'application des efforts $e = 6,5 \text{ cm} < (d - d') / 2 = 11,5 \text{ cm}$,

donc, le centre de pression "C" se trouve entre les armatures A_s et A_s' .

On vérifie la condition (4.6) :

$$M_{As} = N_u (e + d - h / 2) = 304,64 (0,064 + 0,265 - 0,15) = 54,53 \text{ kNm},$$

$$N_u (d - d') - M_{As} = 304,64 (0,265 - 0,035) - 54,53 = 15,54 \text{ kNm},$$

$$(0,337 - 0,81 d' / h) b h^2 f_{bc} = 49,32 \text{ kNm},$$

donc, la condition (4.6) est satisfaite, c'est-à-dire que la section est partiellement comprimée. On calcule :

$$\mu = \frac{M_{As}}{f_{bc} b d^2} = \frac{54,53 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 200 \cdot 265^2} = 0,3436 \approx 0,34.$$

D'après le tableau A.3 on trouve : $\beta = 0,783$, $1000 \varepsilon_s = 2,947$. On a que $\mu = 0,340 < \mu_l = 0,392$, donc, on n'a pas besoin d'armature comprimée ; et que $1000 \varepsilon_s > 1000 \varepsilon_l$, donc la contrainte de l'armature tendue est prise égale à $\sigma_s = 348 \text{ MPa}$. On calcule la section fictive de l'armature :

$$A_{s1} = \frac{M_{As}}{\beta d \sigma_s} = \frac{54,53 \cdot 10^6}{0,783 \cdot 265 \cdot 348} = 755,18 \text{ mm}^2.$$

La section exigée de l'armature tendue alors sera égale à :

$$A_s = A_{1s} - N_u / \sigma_s = 755,18 - 303,83 \times 10^3 / 348 < 0.$$

Pour le ferrailage on prend la section minimale des armatures :

- dans la zone tendue $2 \varnothing 12 \text{ mm}$ avec $A_s = 226 \text{ mm}^2$,

- dans la zone comprimée $2 \varnothing 12 \text{ mm}$ avec $A_s' = 226 \text{ mm}^2$.

Section 4 - 4. Les moments au niveau de la fondation peuvent être déterminés en prenant en compte le fait que les points du moment nul dans les poteaux se trouvent à la distance $h'_s = 0,8 h_s$ au-dessous du nu inférieur des poutres. Dans le cas d'application des charges verticales seulement, les poteaux ne recevant pas de charges directement appliquées, les diagrammes des moments de flexion sont constitués par des droites.

Le moment maximal au niveau de la fondation (ligne 5-b, tableau 10.5) est:

$$M_u = M_{fond} = M_{s5} (0,2 h_s / 0,8 h_s) = 10,62 \times 0,25 = 2,655 \text{ kNm}.$$

L'effort de compression correspondant à ce moment est égal à (voir le calcul précédent pour la première combinaison de la section 3 - 3) :

$$N_{u4} = N_{u3} + 1,35 G_{pot} = 276,27 + 1,35 \times 0,2 \times 0,3 \times 25 \times 2,94 = 282,22 \text{ kN}.$$

Le moment de flexion dû à des charges de service est égal à $1 / 4$ de celui pour la section 3 - 3 : $M_{ser} = 0,25 \times 7,56 = 1,89 \text{ kNm}$.

Les excentricités d'application des efforts sont :

$$e_1 = M_{u4} / N_{u4} = 2,655 / 282,22 = 0,0094 \text{ m} = 0,94 \text{ cm}, \quad e_a = 2 \text{ cm};$$

$$\alpha = 10 [1 - (2,655 / 1,5 \times 1,89)] = 0,635,$$

$$e_2 = (3 \times 234^2 / 10000 \times 30) \times (2 + 0,635 \times 2) = 1,79 \text{ cm};$$

$$e = 0,94 + 2 + 1,79 = 4,73 \text{ cm} = 0,0473 \text{ m}.$$

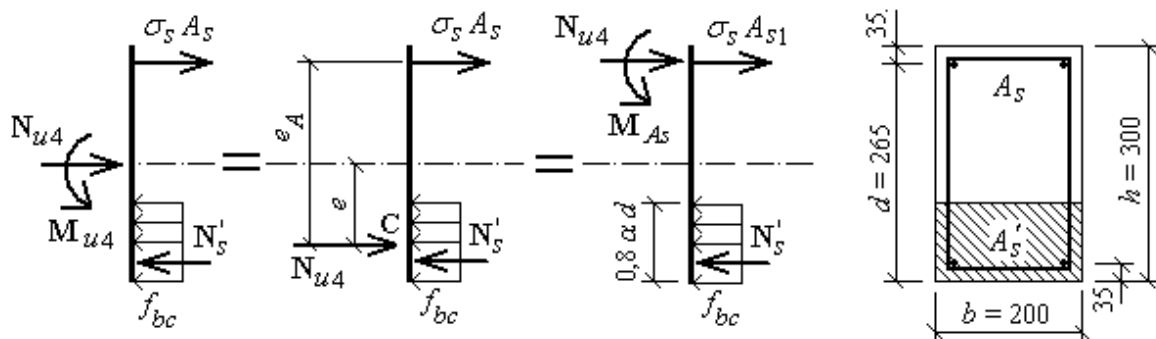


Fig. 10. 34. Schéma de calcul de la section 4 - 4

On a que $e = 4,73 \text{ cm} < (d - d') / 2 = 11,5 \text{ cm}$, alors on vérifie la condition (4.6) :

$$M_{As} = 282,22 (0,0473 + 0,265 - 0,3 / 2) = 45,80 \text{ kNm} ;$$

$$N_{u4} (d - d') - M_{As} = 282,22 (0,265 - 0,035) - 45,80 = 19,11 \text{ kNm} ;$$

$$(0,337 - 0,81 d' / h) b d^2 f_{bc} = 49,32 \text{ kNm} ;$$

$$N_{u4} (d - d') - M_{As} = 19,11 \text{ kNm} < 49,32 \text{ kNm}, *)$$

donc, la section est partiellement comprimée.

$$\mu = \frac{M_{As}}{f_{bc} b d^2} = \frac{45,80 \cdot 10^6}{11,3 \cdot 200 \cdot 265^2} = 0,288.$$

D'après le tableau A.3 on trouve : $\beta = 0,826$, $1000 \varepsilon_s = 4,53$. On a que $\mu = 0,288 < \mu_l = 0,392$, donc, on n'a pas besoin d'armature comprimée ; et que $1000 \varepsilon_s = 4,60 > 1000 \varepsilon_l = 1,739$, donc la contrainte de l'armature tendue est prise égale à $\sigma_s = 348 \text{ MPa}$. On calcule la section fictive de l'armature :

$$A_{s1} = \frac{M_{As}}{\beta d \sigma_s} = \frac{45,80 \cdot 10^6}{0,826 \cdot 265 \cdot 348} = 601 \text{ mm}^2.$$

La section exigée de l'armature tendue alors sera égale à :

$$A_s = A_{s1} - N_u / \sigma_s = 601 - (282,22 \times 10^3 / 348) < 0.$$

On prend $2 \varnothing 12 \text{ mm}$ avec $A_s = 226 \text{ mm}^2$;

$$2 \varnothing 12 \text{ mm} \text{ avec } A_s' = 226 \text{ mm}^2.$$

L'effort maximal au niveau de la fondation a lieu quand on applique les charges totales à la console et dans la travée AB (ligne 5-a, tableau 10.5). La valeur de cet effort est égale à (voir le calcul de la section 3 - 3, deuxième combinaison) :

$$N_{u4} = N_{u3} + 1,35 G_{pot} = 304,64 + 5,95 = 310,59 \text{ kN}.$$

Le moment de flexion correspondant à cet effort est :

$$M_{u4} = 0,25 M_{s5} = 0,25 \times 5,80 = 1,45 \text{ kNm}.$$

Le calcul pour cette combinaison est fait comme précédemment et il donne $A_s < 0$, $A_s' < 0$. On prend d'après les exigences constructives $2 \varnothing 12 \text{ mm}$ pour la zone tendue et comprimée.

Les résultats de calcul sont donnés par le tableau 10.6.

*) Si cette condition n'est pas satisfaite, la section est entièrement comprimée, et alors elle est calculée d'après la méthode exposée au paragraphe 4.3.

Tableau 10.6

Sections	M_u (kN m)	N_u (kN)	Armatures exigées		Armatures adoptées	
			A_{sw} (mm ²)	A_{se} (mm ²)	A_{sw} (mm ²)	A_{se} (mm ²)
1 - 1	24,89	89,14	247,8	< 0	2 Ø 14	2 Ø 12
2 - 2	- 11,09	94,20	< 0	46,5	2 Ø 12	2 Ø 12
3 - 3	10,62	276,27	< 0	< 0	2 Ø 12	2 Ø 12
	5,94	303,83	< 0	< 0	2 Ø 12	2 Ø 12
4 - 4	- 2,65	282,22	< 0	< 0	2 Ø 12	2 Ø 12
	- 1,48	309,78	< 0	< 0	2 Ø 12	2 Ø 12

Comme ferrailage du poteau par des armatures longitudinales on prend :

- pour le poteau de l'étage : 2 Ø 14 mm du côté gauche de la section,
2 Ø 12 mm du côté droit de la section ;
- pour le poteau de rez-de-chaussée :
2 Ø 12 mm du côté gauche de la section,
2 Ø 12 mm du côté droit de la section.

Comme armature transversale on utilise les ronds lisses en acier *Fe E 215* de 6 mm de diamètre (le diamètre des barres transversales doit satisfaire la condition $\varnothing_t > \varnothing_{l(max)} / 3 = 14 / 3 = 4,7$ mm. Ici on a pris 6 mm, parce que c'est le plus petit diamètre des barres en acier *Fe E 215*).

L'espacement des barres transversales est pris d'après la condition:

$$S_t \leq 15 \varnothing_{l(min)} = 15 \times 12 = 180 \text{ mm.}$$

La longueur de recouvrement l_r des barres longitudinales qui sont faites sans crochets, et qui sont susceptibles d'être tendues, est prise comme pour des barres tendues, donc $l_r = l_s = 40 \varnothing_{l(max)} = 40 \times 14 = 560$ mm (il s'agit des barres longitudinales du poteau de l'étage ayant le plus grand diamètre).

Dans cette longueur de recouvrement, il faut prévoir au moins trois plans d'armatures transversales, un plan à chaque extrémité du recouvrement et un au milieu. Pour le cas considéré on doit prendre 4 barres avec l'espacement 120 mm (fig.10.30).

Le ferrailage du poteau est donné sur la figure 10.30.b.

Le poteau de rive droite et les poteaux centraux sont calculés de la même manière que celui de rive gauche.

10.5. Calcul des fondations sous les poteaux

Les fondations sous des poteaux sont des fondations superficielles dont la profondeur n'excède pas en général 2 à 3 mètres. Ces fondations sont sollicitées par les efforts qui sont transmis par des poteaux. Dans le cas considéré (on n'a pas pris en compte la pression latérale du vent), ce sont des charges permanentes et des charges d'exploitation (charges verticales) qui engendrent les efforts repris par la fondation. On doit examiner les différentes combinaisons d'application de ces charges pour trouver les sollicitations les plus défavorables.

10.5.1. Calcul de la fondation sous le poteau de rive gauche

Première combinaison d'application des efforts (voir le calcul du poteau, section 4 - 4) : $M_{u(max)} = M_{u4} = 2,655 \text{ kN m}$. L'effort de compression correspondant à ce moment transmis par le poteau est $N_{u4} = 282,22 \text{ kN}$. On doit également prendre en compte le poids propre du mur de rez-de-chaussée ($\delta_m = 0,23 \text{ m}$, $l_1 = 3,6 \text{ m}$, $h_m = 2,94 - 0,2 = 2,74 \text{ m}$, $\rho_m = 14 \text{ kN/m}^3$) et de la poutre de longrine qui est appuyée sur la fondation en lui transmettant le poids du mur ($b \times h = 0,2 \text{ m} \times 0,2 \text{ m}$, $\rho_b = 25 \text{ kN/m}^3$) :

$$1,35 G_m = 1,35 [(0,23 \times 2,74 \times 3,6 \times 14) + (0,2 \times 0,2 \times 3,6 \times 25)] = 47,74 \text{ kN}$$

(ici on a diminué la hauteur du mur de 20 cm ce qui représente la hauteur de la poutre de longrine).

Ainsi, l'effort de compression pour la combinaison considérée est égal à :

$$P_u = N_u = N_{u4} + 1,35 G_m = 282,22 + 47,74 = 329,96 \approx 330 \text{ kN}$$

La fondation est faite en béton ayant $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$ et est armée par des armatures en acier de nuance $Fe E 400$. La contrainte limite admissible au sol $\sigma^* = 0,5 \text{ MPa}$.

Pour le dimensionnement de la surface au sol, on prend en considération les charges de service :

$$M_{ser} = 1,89 \text{ kN m} \text{ (voir le calcul de la section 4 - 4 du poteau) ;}$$

$$\begin{aligned} P_{ser} = N_{ser} &= \frac{N_u}{1,35} - \frac{1,5 [Q_{B(couv)} + Q_{B(pl)}] l_2}{2 \cdot 1,35} + \frac{[Q_{B(couv)} + Q_{B(pl)}] l_2}{2} = \\ &= \frac{330}{1,35} - \frac{1,5 [3,6 + 6,3] 4,85}{2 \cdot 1,35} + \frac{[3,6 + 6,3] 4,85}{2} = 241,77 \text{ kN} \end{aligned}$$

(pour cette combinaison d'application des efforts, la console est chargée par des charges permanentes).

La fondation est sollicitée également par des efforts tranchants "V", dont les valeurs sont (d'après le diagramme des moments, fig. 10.30) :

$$V_u = M_u / 0,2 l_{p2} = 2,655 / (0,2 \times 2,94) = 4,51 \text{ kN} ;$$

$$V_{ser} = M_{ser} / 0,2 l_{p2} = 1,89 / (0,2 \times 2,94) = 3,21 \text{ kN}.$$

Pour commencer le calcul, on établit la hauteur totale de la fondation (en première approximation) d'après les exigences constructives :

$$h \geq 20 \varnothing_1 + 5 \text{ cm} = 20 \times 1,2 + 5 = 29 \text{ cm}$$

On prend $h = 30 \text{ cm}$, $d_b = d_a = 30 - 5 = 25 \text{ cm}$.

Les dimensions de la semelle peuvent être calculées d'après la condition (9.12) comme pour une semelle soumise à un effort normal centré :

$AB \geq (P_{ser} + G_o) / \sigma^*$, avec $G_o = h \cdot A \cdot B \cdot \rho_b$ - le poids propre de la semelle.

$$\text{Donc on a : } C = A \cdot B = \frac{P_{ser}}{\sigma^* - \rho_b h} = \frac{241,77}{500 - 25 \cdot 0,3} = 0,491 \text{ m}^2,$$

avec $\sigma^* = 0,5 \text{ MPa} = 500 \text{ kN/m}^2$.

Pour les fondations sous des poteaux rectangulaires on préfère prendre les sections homothétiques de la semelle et du poteau, donc avec le rapport des dimensions : $k = h_p / b_p = 0,3 / 0,2 = 1,5$, donc $B = k A = 1,5 A$.

Pour tenir compte du moment de flexion, on recommande d'augmenter les dimensions de la semelle dans le plan de flexion à la valeur $2 e_o$. L'excentricité d'application des efforts $e_{o(ser)}$ au niveau de la base de la semelle est égale à :

$$e_{o(ser)} = \frac{M_{ser} + V_{ser} h}{N_{ser} + G_o} = \frac{2,853}{245,45} = 0,0116,$$

où $M_{ser} + V_{ser} h = 1,89 + 3,21 \times 0,3 = 2,853 \text{ kNm}$;

$$N_{ser} + G_o = N_{ser} + \rho_b h A B = 241,77 + 25 \times 0,3 \times 0,491 = 245,4 \text{ kN}.$$

Avec ces valeurs, on calcule (en posant $AB = C$) **) :

$$A = \frac{e_{o(ser)}}{k} + \sqrt{\left[\frac{e_{o(ser)}}{k} \right]^2 + \frac{C}{k}} = \frac{0,0116}{1,5} + \sqrt{\left[\frac{0,0116}{1,5} \right]^2 + \frac{0,491}{1,5}} = 0,58 \text{ m}.$$

On prend : $A = 0,6 \text{ m}$, $B = k A = 1,5 \times 0,6 = 0,9 \text{ m}$, $AB = 0,6 \times 0,9 = 0,54 \text{ m}^2$.

La hauteur utile de la semelle doit satisfaire les conditions :

$$d_b = 0,25 \text{ m} > (B - b) / 4 = (0,9 - 0,3) / 4 = 0,15 \text{ m} ;$$

$$d_a = 0,25 \text{ m} > (A - a) / 4 = (0,6 - 0,2) / 4 = 0,10 \text{ m}.$$

Donc, les conditions sont satisfaites.

**) Il est à noter, que le plus souvent le poids propre des semelles est très petit par rapport aux efforts longitudinaux, et il joue un rôle négligeable pour le dimensionnement de la semelle. C'est pourquoi au cours du calcul pratique assez souvent on le néglige. En effet, dans le cas considéré, les dimensions de la semelle calculées sans tenir compte du poids G_o seront égales à :

$$AB = P_{ser} / \sigma^* = 241,77 / 500 = 0,483 \text{ m}, \text{ ce qui peu diffère de } 0,491 \text{ m}.$$

Les contraintes du sol sous la semelle sont vérifiées d'après la formule (9.27):

$$\sigma_M = \frac{P_{ser} + G_o}{A \cdot B} \left(1 + \frac{6 e_{o(ser)}}{B} \right) = \frac{245,45}{0,54} \left(1 + \frac{6 \cdot 0,0116}{0,9} \right) = 490 \text{ kN/m}^2 ;$$

$$\sigma_m = \frac{P_{ser} + G_o}{A \cdot B} \left(1 - \frac{6 e_{o(ser)}}{B} \right) = \frac{245,45}{0,54} \left(1 - \frac{6 \cdot 0,0116}{0,9} \right) = 419,4 \text{ kN/m}^2 .$$

(pour cette combinaison d'application des efforts, la console est chargée par des charges permanentes et celles d'exploitation).

On a que $\sigma_m = 419,4 \text{ kN/m}^2 > 0$;

$$\sigma_M = 490 \text{ kN/m}^2 < 1,33 \sigma^* = 1,33 \times 500 = 665 \text{ kN/m}^2 ,$$

ce qui signifie que le diagramme de répartition des contraintes sous la semelle est trapézoïdal, et que les valeurs maximales et minimales de ces contraintes sont dans les limites admissibles. On vérifie également la contrainte du sol à la distance $3/4$ de la semelle du côté de σ_M , sa valeur ne doit pas dépasser σ^* :

$$\sigma_{3/4} = (3 \sigma_M + \sigma_m) / 4 = (3 \times 490 + 419,4) / 4 = 472,35 \text{ kN/m}^2 < \sigma^* .$$

Donc, toutes les conditions sont vérifiées.

Les armatures de la semelle sont calculées d'après les efforts de calcul. Ces efforts au niveau de la base de la semelle sont égaux (sans prendre en compte le poids propre de la semelle) :

$$P_u = N_u = 330 \text{ kN} ;$$

$$M_u + V_u h = 2,655 + 4,51 \times 0,3 = 4,0 \text{ kN m} .$$

L'excentricité d'application des efforts est :

$$e_{o(u)} = (M_u + V_u h) / P_u = 4,00 / 330 = 0,0121 \text{ m} .$$

Vu que $e_{o(u)} = 0,0121 \text{ m} < B / 24 = 0,9 / 24 = 0,0375 \text{ m}$ (c'est-à-dire que la différence entre la contrainte maximale et la contrainte minimale ne dépasse pas la moitié de la contrainte moyenne), on peut calculer les armatures dans la direction "B" et "A" en utilisant la méthode des bielles. On remplace la force réelle P_u par une charge fictive (formule 9.31) :

$$P'_u = P_u [1 + 3 e_{o(u)} / B] = 330 (1 + 3 \times 0,0121 / 0,9) = 343,3 \text{ kN} .$$

Les armatures de la semelle seront égales à :

- dans la direction "B" (formule 9.33):

$$A_b = \frac{P'_u (B - b)}{8 d_b \sigma_s} = \frac{343,3 \cdot 10^3 (900 - 300)}{8 \cdot 250 \cdot 348} = 295,95 \text{ mm}^2 ;$$

- dans la direction "A" (formule 9.32):

$$A_a = \frac{P'_u (A - a)}{8 d_a \sigma_s} = \frac{343,3 \cdot 10^3 (600 - 200)}{8 \cdot 250 \cdot 348} = 197,30 \text{ mm}^2 .$$

Deuxième combinaison d'application des efforts : $M_u = M_{u4} = 1,45 \text{ kN m}$,

$$P_u = N_{u(max)} = N_{u4} + 1,35 G_m = 310,59 + 47,74 = 358,33 \text{ kN}.$$

Pour vérifier les contraintes du sol sous la semelle, on détermine les efforts dus à des charges de service (voir le calcul de la section 4 - 4 du poteau) :

$$M_{ser} = 0,25 \times 4,35 = 1,09 \text{ kN m}.$$

$$N_{ser} = \frac{N_{u(max)}}{1,35} - \frac{1,5 [Q_{B(couv)} + Q_{B(pl)}] l_2}{2 \cdot 1,35} - \frac{1,5 Q_{B(pc)} l_c}{1,35} + \frac{[Q_{B(couv)} + Q_{B(pl)}] l_2}{2} + Q_{B(pc)} l_c = \frac{358,33}{1,35} - \frac{1,5 [3,6 + 6,3] 4,85}{2 \cdot 1,35} - \frac{1,5 \cdot 12,60 \cdot 1,35}{1,35} + \frac{[3,6 + 6,3] 4,85}{2} + 12,60 \cdot 1,35 = 260,87 \text{ kN}.$$

$$V_{ser} = M_{ser} / 0,2 l_{p2} = 1,09 / (0,2 \times 2,95) = 1,85 \text{ kN}.$$

Les efforts au niveau de la base de la semelle sont :

$$M_{ser} + V_{ser} h = 1,09 + 1,85 \times 0,3 = 1,645 \text{ kN m} ;$$

$$N_{ser} + G_o = 260,87 + 25 \times 0,3 \times 0,6 \times 0,9 = 264,92 \text{ kN}.$$

L'excentricité d'application de ces efforts est égale à :

$$e_{o(ser)} = \frac{M_{ser} + V_{ser} \cdot h}{N_{ser} + G_o} = \frac{1,645}{264,92} = 0,0062 \text{ m}.$$

Les contraintes du sol sous la semelle sont :

$$\sigma_M = \frac{P_{ser} + G_o}{A \cdot B} \left(1 + \frac{6 e_{o(ser)}}{B} \right) = \frac{264,92}{0,54} \left(1 + \frac{6 \cdot 0,0062}{0,9} \right) = 510,9 \text{ kN/m}^2 ;$$

$$\sigma_m = \frac{P_{ser} + G_o}{A \cdot B} \left(1 - \frac{6 e_{o(ser)}}{B} \right) = \frac{264,92}{0,54} \left(1 - \frac{6 \cdot 0,0062}{0,9} \right) = 470,3 \text{ kN/m}^2.$$

On a que $\sigma_m = 469,0 \text{ kN/m}^2 > 0$;

$$\sigma_M = 510,1 \text{ kN/m}^2 < 1,33 \sigma^* = 1,33 \times 500 = 665 \text{ kN/m}^2 ;$$

$$\sigma_{3/4} = (3 \times 510,1 + 469,0) / 4 = 499,8 \text{ kN/m}^2 < \sigma^*.$$

Donc, les dimensions de la semelle sont suffisantes. Les efforts au niveau de la base de la fondation dus à des charges de calcul sont :

$$M_u + V_u h = 1,45 + 2,466 \times 0,3 = 2,19 \text{ kN m},$$

avec $V_u = M_u / 0,2 l_{p2} = 1,45 / (0,2 \times 2,94) = 2,466 \text{ kN} ;$

$$P_u = N_{u(max)} = 358,33 \text{ kN} \text{ (sans tenir compte le poids de la semelle).}$$

L'excentricité de ces efforts est égale à :

$$e_{o(u)} = (M_u + V_u h) / P_u = 2,19 / 358,33 = 0,0061 \text{ m.}$$

On a que $e_{o(u)} = 0,0061 \text{ m} < B / 24 = 0,0375 \text{ m}$, alors les armatures de la semelle dans la direction "B" et "A" sont calculées par la méthode des bielles. On détermine l'effort fictif P'_u :

$$P'_u = P_u [1 + 3 e_{o(u)} / B] = 358,33 [1 + 3 \times 0,0061 / 0,9] = 365,6 \text{ kN} ;$$

Sous l'action de cet effort on calcule des armatures :

- dans la direction "B" (formule 9.33) :

$$A_b = \frac{P'_u (B - b)}{8 d_b \sigma_s} = \frac{365,6 \cdot 10^3 (900 - 300)}{8 \cdot 250 \cdot 348} = 315,2 \text{ mm}^2 ;$$

- dans la direction "A" (formule 9.32):

$$A_a = \frac{P'_u (A - a)}{8 d_a \sigma_s} = \frac{365,6 \cdot 10^3 (600 - 200)}{8 \cdot 250 \cdot 348} = 210,1 \text{ mm}^2.$$

Ainsi, la deuxième combinaison donne les armatures les plus grandes.

La fissuration de la semelle est considérée comme préjudiciable. Donc on doit vérifier le ferrailage pour l'état-limite de service.

La résistance des armatures est prise égale à $\sigma_s = 200 \text{ MPa}$ (tableau 2.1).

L'effort de service (sans tenir compte du poids propre de la semelle) est :

$$P_{ser} = 260,87 \text{ kN}, \quad M_{ser} + V_{ser} h = 1,645 \text{ kNm} ;$$

$$e_{o(ser)} = (M_{ser} + V_{ser} h) / P_{ser} = 1,645 / 260,87 = 0,0063 \text{ m} ;$$

$$P'_{ser} = 260,87 [1 + 3 \times 0,0063 / 0,9] = 266,3 \text{ kN} ;$$

$$A_b = \frac{P'_{ser} (B - b)}{8 d_b \sigma_s} = \frac{266,3 \cdot 10^3 (900 - 300)}{8 \cdot 250 \cdot 200} = 399,4 \text{ mm}^2 ;$$

$$A_a = \frac{P'_{ser} (A - a)}{8 d_a \sigma_s} = \frac{266,3 \cdot 10^3 (600 - 200)}{8 \cdot 250 \cdot 200} = 266,3 \text{ mm}^2.$$

Donc, le ferrailage de la semelle doit être pris d'après le dernier calcul (pour l'état-limite de service) qui donne les valeurs les plus grandes. On prend comme armatures :

- dans la direction "B" : 6 \varnothing 10 mm avec $A_b = 471 \text{ mm}^2$;
- dans la direction "A" : 6 \varnothing 8 mm avec $A_a = 302 \text{ mm}^2$.

La longueur de scellement des barres est égale à (avec $\tau_s = 2,83 \text{ MPa}$) :

- dans la direction "B" (\varnothing 10 mm) :

$$l_{s(b)} = (\varnothing f_e) / (4 \tau_s) = (10 \times 400) / (4 \times 2,83) = 353 \text{ mm} = 35,3 \text{ cm} ;$$

- dans la direction "A" ($\varnothing 8 \text{ mm}$) :

$$l_{s(a)} = (\varnothing f_e) / (4 \tau_s) = (8 \times 400) / (4 \times 2,83) = 282,7 \text{ mm} \approx 28,3 \text{ cm}.$$

On a que : $l_{s(b)} = 35,3 \text{ cm} > B / 4 = 22,5 \text{ cm}$, $l_{s(a)} = 28,7 \text{ cm} > A / 4 = 15 \text{ cm}$.

Dans ce cas les barres doivent être prolongées jusqu'aux extrémités de la semelle et comportées des ancrages courbes. Le ferrailage de la semelle est donné par la figure 10.35.

Les fondations sous les autres poteaux sont calculées de la même manière.

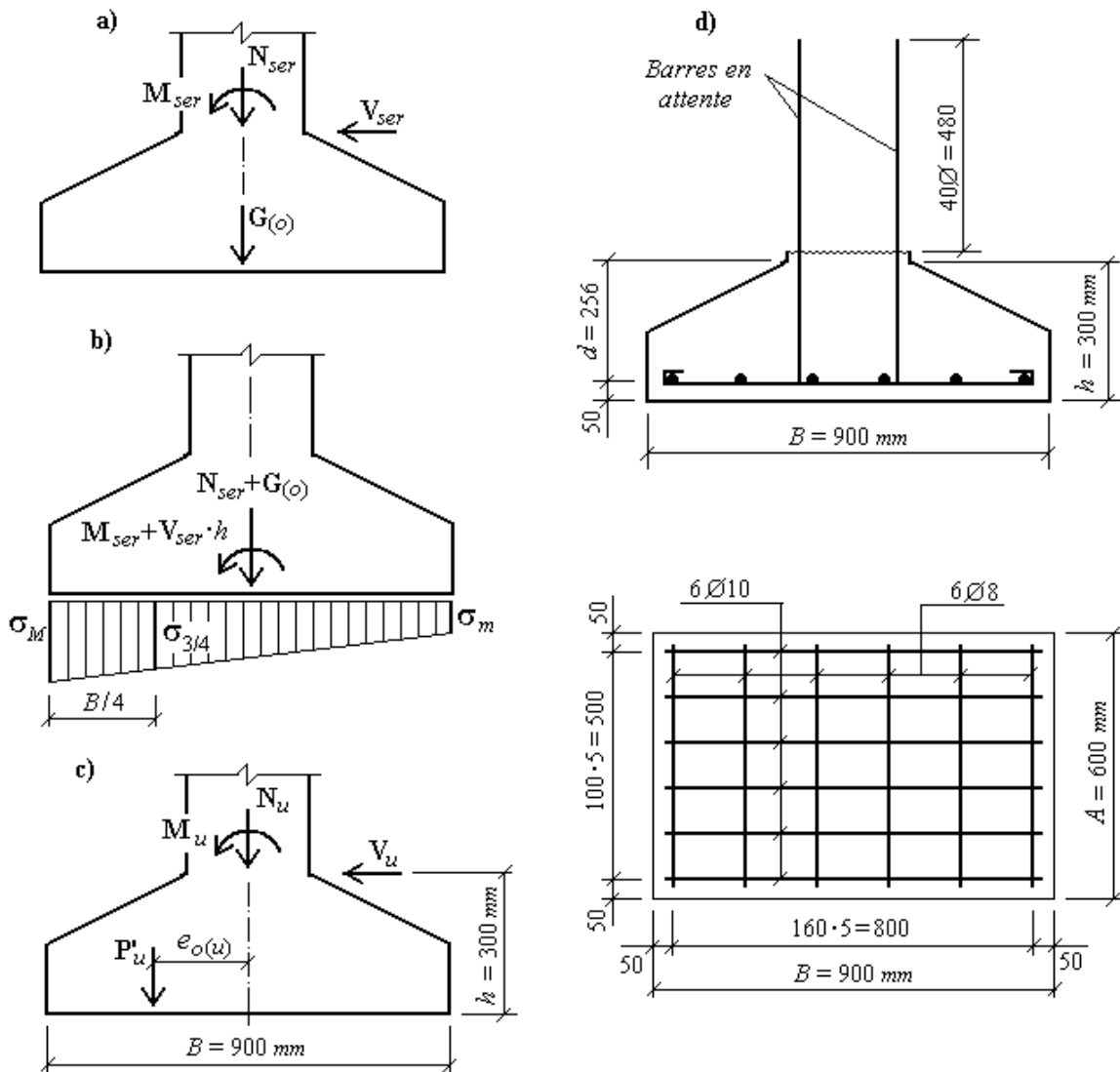


Fig. 10.35

a - schéma d'application des efforts transmis par le poteau ; b - schéma de calcul des dimensions de la semelle ; c - schéma de calcul du ferrailage de la semelle ; d - ferrailage de la semelle

Tableau A.1

Valeurs de f_e et de $1000 \epsilon_l$, α_l , μ_l , β_l pour $\gamma_s = 1,15$

	Nuance	f_e (MPa)	$1000 \epsilon_l$	α_l	μ_l	β_l	σ_s (MPa)	
Ronds lisses	Fe E 215	215	0,935	0,789	0,432	0,684	$\mu \leq 0,432$	$\sigma_s = 187$
							$\mu > 0,432$	$\sigma_s = 200 (1000 \epsilon_s)$
	Fe E 235	235	1,022	0,774	0,428	0,690	$\mu \leq 0,428$	$\sigma_s = 204$
							$\mu > 0,428$	$\sigma_s = 200 (1000 \epsilon_s)$
Barres HA type 1	Fe E 400	400	1,739	0,668	0,392	0,733	$\mu \leq 0,392$	$\sigma_s = 348$
							$\mu > 0,392$	$\sigma_s = 200 (1000 \epsilon_s)$
	Fe E 500	500	2,174	0,617	0,372	0,753	$\mu \leq 0,372$	$\sigma_s = 435$
							$\mu > 0,372$	$\sigma_s = 200 (1000 \epsilon_s)$
Barres HA type 2	Fe E 400	400	3,739	0,483	0,312	0,807	$\mu \leq 0,417$	$\sigma_s = \text{voir tabl. A.4, A.5}$
							$\mu > 0,417$	$\sigma_s = 200 (1000 \epsilon_s)$
	Fe E 500	500	4,174	0,456	0,298	0,818	$\mu \leq 0,402$	$\sigma_s = \text{voir tabl. A.4, A.5}$
							$\mu > 0,402$	$\sigma_s = 200 (1000 \epsilon_s)$
Fils HA type 3	Fe TE 400	400	1,739	0,668	0,392	0,733	$\mu \leq 0,392$	$\sigma_s = 348$
							$\mu > 0,392$	$\sigma_s = 200 (1000 \epsilon_s)$
	Fe TE 500	500	2,174	0,617	0,372	0,753	$\mu \leq 0,372$	$\sigma_s = 435$
							$\mu > 0,372$	$\sigma_s = 200 (1000 \epsilon_s)$
Treillis soudés en fils lisses	TLE 520 ($\varnothing < 6$ mm)	520	2,261	0,607	0,368	0,757	$\mu \leq 0,368$	$\sigma_s = 452$
							$\mu > 0,368$	$\sigma_s = 200 (1000 \epsilon_s)$
	TLE 500 ($\varnothing > 6$ mm)	500	2,174	0,617	0,372	0,753	$\mu \leq 0,372$	$\sigma_s = 435$
							$\mu > 0,372$	$\sigma_s = 200 (1000 \epsilon_s)$

Tableau A.2

Valeurs de f_e et de $1000 \varepsilon_s$, α_l , μ_l , β_l pour $\gamma_s = 1,0$

	Nuance	f_e (MPa)	$1000 \varepsilon_s$	α_l	μ_l	β_l	σ_s (MPa)	
							$\mu \leq$	$\mu >$
Ronds lisses	Fe E 215	215	1,075	0,765	0,425	0,694	$\mu \leq$ 0,425	$\sigma_s = 215$
							$\mu >$ 0,425	$\sigma_s = 200 (1000 \varepsilon_s)$
Barres HA type 1	Fe E 235	235	1,175	0,749	0,420	0,700	$\mu \leq$ 0,420	$\sigma_s = 235$
							$\mu >$ 0,420	$\sigma_s = 200 (1000 \varepsilon_s)$
Barres HA type 1	Fe E 400	400	2,000	0,636	0,379	0,746	$\mu \leq$ 0,379	$\sigma_s = 400$
							$\mu >$ 0,379	$\sigma_s = 200 (1000 \varepsilon_s)$
Barres HA type 2	Fe E 500	500	2,500	0,583	0,358	0,767	$\mu \leq$ 0,358	$\sigma_s = 500$
							$\mu >$ 0,358	$\sigma_s = 200 (1000 \varepsilon_s)$
Barres HA type 2	Fe E 400	400	4,000	0,467	0,304	0,813	$\mu \leq$ 0,408	$\sigma_s =$ voir tabl. A.4, A.5
							$\mu >$ 0,408	$\sigma_s = 200 (1000 \varepsilon_s)$
Fils HA type 3	Fe TE 500	500	4,500	0,438	0,289	0,825	$\mu \leq$ 0,391	$\sigma_s =$ voir tabl. A.4, A.5
							$\mu >$ 0,391	$\sigma_s = 200 (1000 \varepsilon_s)$
Fils HA type 3	Fe TE 400	400	2,000	0,636	0,379	0,746	$\mu \leq$ 0,379	$\sigma_s = 400$
							$\mu >$ 0,379	$\sigma_s = 200 (1000 \varepsilon_s)$
Treillis soudés en fils lisses	TLE 520 ($\varnothing < 6$ mm)	520	2,600	0,574	0,354	0,770	$\mu \leq$ 0,354	$\sigma_s = 520$
							$\mu >$ 0,354	$\sigma_s = 200 (1000 \varepsilon_s)$
Treillis soudés en fils lisses	TLE 500 ($\varnothing > 6$ mm)	500	2,500	0,583	0,358	0,767	$\mu \leq$ 0,358	$\sigma_s = 500$
							$\mu >$ 0,358	$\sigma_s = 200 (1000 \varepsilon_s)$

Tableau A.3

Valeurs de α , β et $1000 \varepsilon_s$ en fonction de μ

(section rectangulaire en flexion simple, sans armatures comprimées, diagramme rectangulaire)

μ	α	β	$1000 \varepsilon_s$	μ	α	β	$1000 \varepsilon_s$	μ	α	β	$1000 \varepsilon_s$
0,000	0,0000	1,000	10	0,080	0,1044	0,958	10	0,160	0,2193	0,912	10
0,004	0,0050	0,998	10	0,084	0,1099	0,956	10	0,164	0,2253	0,910	10
0,008	0,0100	0,996	10	0,088	0,1154	0,954	10	0,168	0,2314	0,907	10
0,012	0,0151	0,994	10	0,092	0,1209	0,952	10	0,172	0,2376	0,905	10
0,016	0,0201	0,992	10	0,096	0,1264	0,949	10	0,176	0,2438	0,902	10
0,020	0,0252	0,990	10	0,100	0,1320	0,947	10	0,180	0,2500	0,900	10
0,024	0,0304	0,988	10	0,104	0,1376	0,945	10	0,184	0,2562	0,898	10
0,028	0,0355	0,986	10	0,108	0,1431	0,943	10	0,188	0,2626	0,895	9,83
0,032	0,0406	0,984	10	0,112	0,1489	0,940	10	0,192	0,2689	0,892	9,52
0,036	0,0459	0,982	10	0,116	0,1546	0,938	10	0,196	0,2753	0,890	9,21
0,040	0,0510	0,980	10	0,120	0,1603	0,936	10	0,200	0,2818	0,887	8,92
0,044	0,0562	0,978	10	0,124	0,1660	0,934	10	0,204	0,2882	0,885	8,64
0,048	0,0615	0,975	10	0,128	0,1719	0,931	10	0,208	0,2948	0,882	8,37
0,052	0,0667	0,973	10	0,132	0,1776	0,929	10	0,212	0,3013	0,879	8,12
0,056	0,0721	0,971	10	0,136	0,1835	0,927	10	0,216	0,3079	0,877	7,87
0,060	0,0774	0,969	10	0,140	0,1895	0,924	10	0,220	0,3146	0,874	7,63
0,064	0,0828	0,967	10	0,144	0,1953	0,922	10	0,224	0,3112	0,872	7,40
0,068	0,0881	0,965	10	0,148	0,2013	0,919	10	0,228	0,3280	0,869	7,17
0,072	0,0935	0,963	10	0,152	0,2071	0,917	10	0,232	0,3349	0,866	6,95
0,076	0,0989	0,960	10	0,156	0,2131	0,915	10	0,236	0,3417	0,863	6,74

Tableau A.3 (suite)

Valeurs de α , β et $1000 \epsilon_s$ en fonction de μ

(section rectangulaire en flexion simple, sans armatures comprimées, diagramme rectangulaire)

μ	α	β	$1000 \epsilon_s$	μ	α	β	$1000 \epsilon_s$	μ	α	β	$1000 \epsilon_s$
0,240	0,3486	0,861	6,54	0,320	0,5000	0,800	3,500	0,400	0,6910	0,724	1,565
0,244	0,3556	0,858	6,34	0,324	0,5083	0,797	3,386	0,404	0,7023	0,719	1,484
0,248	0,3626	0,855	6,15	0,328	0,5169	0,793	3,271	0,408	0,7138	0,714	1,403
0,252	0,3696	0,852	5,97	0,332	0,5254	0,790	3,162	0,412	0,7246	0,710	1,324
0,256	0,3768	0,849	5,79	0,336	0,5341	0,786	3,053	0,416	0,7376	0,705	1,248
0,260	0,3840	0,846	5,62	0,340	0,5429	0,783	2,947	0,420	0,7500	0,700	1,166
0,264	0,3913	0,843	5,45	0,344	0,5518	0,779	2,843	0,424	0,7626	0,695	1,090
0,268	0,3985	0,841	5,28	0,348	0,5608	0,776	2,741	0,428	0,7756	0,690	1,013
0,272	0,4059	0,838	5,12	0,352	0,5699	0,772	2,641	0,432	0,7890	0,684	0,936
0,276	0,4134	0,835	4,97	0,356	0,5791	0,768	2,544	0,436	0,8028	0,679	0,860
0,280	0,4209	0,832	4,82	0,360	0,5885	0,765	2,447	0,440	0,8170	0,673	0,784
0,284	0,4284	0,829	4,67	0,364	0,5981	0,761	2,352	0,444	0,8316	0,667	0,708
0,288	0,4361	0,826	4,53	0,368	0,6078	0,757	2,258	0,448	0,8469	0,661	0,633
0,292	0,4437	0,823	4,39	0,372	0,6175	0,753	2,168	0,452	0,8630	0,655	0,557
0,296	0,4516	0,819	4,25	0,376	0,6275	0,749	2,078	0,456	0,8792	0,648	0,481
0,300	0,4595	0,816	4,12	0,380	0,6376	0,745	1,990	0,460	0,8965	0,641	0,404
0,304	0,4674	0,813	3,99	0,384	0,6479	0,741	1,902	0,464	0,9164	0,634	0,327
0,308	0,4754	0,810	3,86	0,388	0,6584	0,737	1,816	0,468	0,9337	0,626	0,248
0,312	0,4835	0,805	3,68	0,392	0,6691	0,732	1,731	0,472	0,9542	0,618	0,168
0,316	0,4918	0,803	3,62	0,396	0,6799	0,728	1,648	0,476	0,9761	0,610	0,080

Tableau A.4

Valeurs de σ_s en fonction de $1000 \varepsilon_s$ et de γ_s
(acier Fe E 400, type 2)

σ_s (MPa)	1000 ε_s		σ_s (MPa)	1000 ε_s		σ_s (MPa)	1000 ε_s	
	$\gamma_s = 1,15$	$\gamma_s = 1,0$		$\gamma_s = 1,15$	$\gamma_s = 1,0$		$\gamma_s = 1,15$	$\gamma_s = 1,0$
244	1,220	1,220	314	1,852	1,574	384		2,898
248	1,240	1,240	318	1,961	1,595	388		3,122
252	1,260	1,260	322	2,092	1,620	392		3,376
256	1,280	1,280	326	2,248	1,646	396		3,668
258	1,290	1,290	328	2,337	1,660	398		3,828
262	1,310	1,310	332	2,538	1,690	402		4,182
266	1,331	1,330	336	2,776	1,724	406		4,582
270	1,352	1,350	340	3,054	1,762	410		5,033
274	1,374	1,370	344	3,379	1,806	414		5,542
278	1,398	1,390	348	3,765	1,857	418		6,112
282	1,424	1,410	352	4,193	1,915	422		6,749
286	1,452	1,430	356	4,696	1,984	426		7,460
290	1,485	1,450	360	5,272	2,063	430		8,252
294	1,523	1,470	364	5,930	2,156	434		9,130
298	1,568	1,490	368	6,677	2,264	438		10,102
302	1,621	1,510	372	7,527	2,390			
306	1,684	1,531	376	8,489	2,535			
310	1,760	1,552	380	9,581	2,704			
312	1,804	1,563	382	10,155	2,797			

1. Pour les valeurs de $1000 \varepsilon_s$ inférieures à celles indiquées sur le tableau, on prend $\sigma_s = 200 (1000 \varepsilon_s)$, avec σ_s en MPa.
2. Les valeurs de σ'_s , en fonction de $1000 \varepsilon'_s$, sont égales aux valeurs de σ_s pour $1000 \varepsilon_s = 1000 \varepsilon'_s$.

Tableau A.5

Valeurs de σ_s en fonction de $1000 \varepsilon_s$ et de γ_s
(acier Fe E 500, type 2)

σ_s (MPa)	1000 ε_s		σ_s (MPa)	1000 ε_s		σ_s (MPa)	1000 ε_s	
	$\gamma_s = 1,15$	$\gamma_s = 1,0$		$\gamma_s = 1,15$	$\gamma_s = 1,0$		$\gamma_s = 1,15$	$\gamma_s = 1,0$
304	1,520	1,520	374	1,957	1,870	444	5,033	2,413
308	1,540	1,540	378	2,005	1,890	448	5,480	2,478
312	1,560	1,560	383	2,060	1,911	452	5,977	2,551
316	1,580	1,580	386	2,122	1,932	456	6,529	2,632
320	1,600	1,600	390	2,194	1,953	460	7,140	2,724
324	1,620	1,620	394	2,277	1,974	464	7,813	2,827
328	1,640	1,640	398	2,372	1,997	468	8,558	2,942
332	1,661	1,660	402	2,480	2,020	472	9,376	3,072
336	1,682	1,680	406	2,605	2,044	476	10,270	3,216
340	1,703	1,700	410	2,747	2,070	480		3,294
344	1,725	1,720	414	2,910	2,098	484		3,557
348	1,749	1,740	418	3,094	2,128	488		3,758
352	1,773	1,760	422	3,304	2,161	492		3,980
356	1,799	1,780	426	3,541	2,197	496		4,226
360	1,828	1,800	430	3,809	2,236	500		4,500
364	1,860	1,820	434	4,110	2,280	504		4,800
368	1,895	1,840	438	4,449	2,329	508		5,134
372	1,935	1,860	442	4,828	2,383	512		5,499
514		5,698	518		6,115	522		6,572
526		7,077	530		7,627	534		8,224
538		8,876	542		9,580	546		10,344

1. Pour les valeurs de $1000 \varepsilon_s$ inférieures à celles indiquées sur le tableau, on prend $\sigma_s = 200 (1000 \varepsilon_s)$, avec σ_s en MPa.
2. Les valeurs de σ'_s , en fonction de $1000 \varepsilon'_s$, sont égales aux valeurs de σ_s pour $1000 \varepsilon_s = 1000 \varepsilon'_s$.

Tableau A.6

Valeurs de β_1 , k et ρ_1 en fonction de μ_1

μ_1	β_1	k	ρ_1	μ_1	β_1	k	ρ_1	μ_1	β_1	k	ρ_1
0,5222	0,680	1,600	76,80	0,0469	0,760	0,171	6,17	0,0124	0,840	0,062	1,48
0,4498	0,682	1,382	65,95	0,0453	0,762	0,166	5,94	0,0120	0,842	0,060	1,42
0,3940	0,684	1,215	57,61	0,0437	0,764	0,161	5,72	0,0116	0,844	0,059	1,37
0,3498	0,686	1,082	51,00	0,0422	0,766	0,157	5,51	0,0112	0,846	0,057	1,32
0,3139	0,688	0,975	45,63	0,0408	0,768	0,153	5,31	0,0108	0,848	0,056	1,27
0,2842	0,690	0,886	41,19	0,0394	0,770	0,148	5,12	0,0104	0,850	0,055	1,23
0,2591	0,692	0,812	37,45	0,0381	0,772	0,144	4,93	0,0101	0,852	0,053	1,18
0,2377	0,694	0,746	34,26	0,0368	0,774	0,140	4,76	0,0097	0,854	0,052	1,14
0,2193	0,696	0,691	31,51	0,0356	0,776	0,137	4,59	0,0094	0,856	0,051	1,10
0,2032	0,698	0,642	29,11	0,0344	0,778	0,133	4,43	0,0090	0,858	0,049	1,05
0,1890	0,700	0,600	27,00	0,0333	0,780	0,129	4,27	0,0087	0,860	0,048	1,01
0,1764	0,702	0,562	25,13	0,0322	0,782	0,126	4,12	0,0084	0,862	0,047	0,97
0,1652	0,704	0,528	23,47	0,0312	0,784	0,123	3,98	0,0081	0,864	0,046	0,94
0,1551	0,706	0,498	21,97	0,0302	0,786	0,120	3,84	0,0078	0,866	0,045	0,90
0,1460	0,708	0,472	20,63	0,0292	0,788	0,117	3,70	0,0075	0,868	0,044	0,87
0,1378	0,710	0,446	19,41	0,0282	0,790	0,114	3,58	0,0072	0,870	0,043	0,83
0,1303	0,712	0,423	18,30	0,0273	0,792	0,111	3,45	0,0070	0,872	0,042	0,80
0,1233	0,714	0,403	17,28	0,0265	0,794	0,108	3,33	0,0067	0,874	0,041	0,77
0,1170	0,716	0,384	16,35	0,0256	0,796	0,105	3,22	0,0064	0,876	0,039	0,73
0,1112	0,718	0,366	15,49	0,0248	0,798	0,103	3,11	0,0061	0,878	0,038	0,70

Tableau A.6 (suite)

Valeurs de β_1 , k et ρ_1 en fonction de μ_1

μ_1	β_1	k	ρ_1	μ_1	β_1	k	ρ_1	μ_1	β_1	k	ρ_1
0,1058	0,720	0,350	14,70	0,0240	0,800	0,100	3,00	0,0059	0,880	0,037	0,67
0,1008	0,722	0,335	13,97	0,0232	0,802	0,097	2,90	0,0057	0,882	0,037	0,65
0,0962	0,724	0,321	13,29	0,0225	0,804	0,095	2,80	0,0055	0,884	0,036	0,62
0,0919	0,726	0,308	12,65	0,0218	0,806	0,093	2,70	0,0052	0,886	0,035	0,59
0,0878	0,728	0,296	12,06	0,0211	0,808	0,091	2,69	0,0050	0,888	0,034	0,57
0,0840	0,730	0,284	11,51	0,0204	0,810	0,088	2,52	0,0048	0,890	0,033	0,54
0,0805	0,732	0,273	10,99	0,0197	0,812	0,086	2,43	0,0046	0,892	0,032	0,52
0,0771	0,734	0,263	10,51	0,0191	0,814	0,084	2,35	0,0044	0,894	0,031	0,49
0,0740	0,736	0,254	10,05	0,0185	0,816	0,082	2,27	0,0042	0,896	0,030	0,47
0,0710	0,738	0,245	9,62	0,0179	0,818	0,080	2,19	0,0040	0,898	0,029	0,45
0,0682	0,740	0,236	9,22	0,0173	0,820	0,078	2,11	0,0038	0,900	0,029	0,43
0,0656	0,742	0,228	8,84	0,0168	0,822	0,076	2,04	0,0034	0,905	0,027	0,38
0,0630	0,744	0,221	8,47	0,0162	0,824	0,075	1,97	0,0030	0,910	0,025	0,33
0,0606	0,746	0,214	8,13	0,0157	0,826	0,073	1,90	0,0026	0,915	0,023	0,29
0,0584	0,748	0,207	7,81	0,0152	0,828	0,071	1,83	0,0023	0,920	0,021	0,25
0,0562	0,750	0,200	7,50	0,0147	0,830	0,069	1,77	0,0020	0,925	0,019	0,22
0,0542	0,752	0,194	7,21	0,0142	0,832	0,068	1,71	0,0017	0,930	0,018	0,19
0,0522	0,754	0,188	6,93	0,0137	0,834	0,066	1,65	0,0015	0,935	0,016	0,16
0,0504	0,756	0,182	6,66	0,0133	0,836	0,065	1,59	0,0012	0,940	0,015	0,13
0,0486	0,758	0,177	6,41	0,0128	0,838	0,063	1,53	0,0010	0,945	0,013	0,11

Tableau A.7

Diamètre, mm	Section d'armature (mm ²) en fonction du nombre des barres									Masse kg / m
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	7,07	14,1	21,2	28,3	35,3	42,4	49,5	56,5	63,6	0,055
4	12,6	25,1	37,7	50,3	62,8	75,4	87,9	101	113	0,099
5	19,6	39,3	58,9	78,5	98,2	118	137	157	177	0,153
6	28,3	56,6	84,9	113	141	170	198	226	254	0,222
7	38,5	77	115	154	192	231	269	308	346	0,302
8	50,3	101	151	201	252	302	352	402	453	0,395
10	78,5	157	236	314	393	471	550	628	707	0,617
12	113	226	339	452	565	679	792	905	1017	0,887
14	154	308	462	616	770	923	1077	1231	1386	1,208
16	201	402	603	804	1005	1206	1407	1608	1809	1,578
18	254	509	763	1017	1272	1527	1781	2035	2290	1,998
20	314	628	942	1256	1570	1885	2199	2513	2827	2,466
22	380	760	1140	1520	1900	2281	2661	3041	3420	2,984
25	491	982	1473	1964	2455	2945	3436	3927	4419	3,853
28	616	1232	1848	2463	3079	3665	4311	4926	5542	4,834
32	804	1609	2413	3217	4021	4825	5730	6434	7238	6,313
36	1018	2036	3054	4072	5090	6107	7126	8144	9162	7,991
40	1257	2513	3770	5027	6283	7538	8796	10048	11310	9,865

BIBLIOGRAPHIE

1. B.A.E.L. 91. Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé, suivant la méthode des états limites. Editions Eyrolles, 1992.
2. Pierre CHARON. Calcul des ouvrages en béton armé suivant les Règles B.A.E.L. 83. Théorie et applications. Editions Eyrolles.
3. Jean-Pierre MOUJIN. Cours de béton armé B.A.E.L. 91. Calcul des éléments simples et des structures de bâtiments. Editions Eyrolles, 1992.
4. Jean PERCHAT, Jean ROUX. Maîtrise du B.A.E.L. 91 et des D.T.U. associés. Editions Eyrolles, 1992.
5. Jean Perchat. Règles étrangers de Béton armé. Etude comparative des Codes CEB-BSI-DIN-ACI. Paris : EYROLLES, 1982.
6. KOLMOGOROV A. Constructions en béton armé. Volume I (Application des Règles SNIP, Russie). Conakry, 2003.
7. KOLMOGOROV A. Constructions en béton armé. Volume II (Application des Règles SNIP, Russie). Conakry, 2004.

Учебное издание

АНАТОЛИЙ ГАВРИЛОВИЧ КОЛМОГОРОВ

**РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
(по нормам BAEL-91/99, Франция)**

Издание второе, исправленное и дополненное

Учебное пособие

Редактор Г.Г. Семухина
Компьютерная верстка Н.В. Удлер, А.С. Шестакова

Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 24,41. Уч-изд. л. 22,11. Тираж 100 экз. Заказ № 420.

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15