UNIVERSITÉ BATNA 2
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT S.C.S.T.

Matière : Méthodes Numériques
Travaux Dirigés : Série N°1
Année Universitaire : 2016/2017

Résolution des équations non linéaires

Exercice 1 : ✓

Soit l'équation $f(x) = 2\tan x - x - 1 = 0$ avec $x \in]-\pi, \pi[$.

1) Séparer ***analytiquement*** les racines de cette équation.

2) On veut déterminer la racine ***maximale*** de cette équation en utilisant la méthode de ***dichotomie***.

a) Donner le nombre **n** d'itérations nécessaires pour approcher cette racine à 10^{-3} près.

b) Calculer cette racine.

Exercice 2 :

Trouver une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre ***irrationnel*** $\sqrt{31}$ en utilisant la méthode de ***dichotomie***.

Exercice 3 : ✓

Soit l'équation $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$.

1) Séparer ***analytiquement*** les racines de cette équation.

2) Trouver des fonctions $F_i(x)$ qui vérifient la condition $x = F_i(x)$, équivalente à $f(x) = 0$, pour $i = 1, .., 6$.

3) Parmi elles, trouver une fonction F pour laquelle la méthode du ***point fixe*** converge vers la racine ***maximale*** de l'équation $f(x) = 0$.

4) Calculer cette racine à 10^{-4} près.

Exercice 4 :

Résoudre à 10^{-3} près l'équation $f(x) = x - 2^{-x} = 0$ par la méthode du ***point fixe***.

Exercice 5 : ✓

Soit l'équation $f(x) = x.\ln x - 0.8 = 0$.

1) Séparer ***analytiquement*** les racines de cette équation.

2) Calculer à 10^{-7} près la racine ***minimale*** de cette équation en utilisant la méthode de ***Newton-Raphson***.

Exercice 6 :

الآلة الحاسبة فقط جمع و ضرب و طرح

Vous possédez une calculatrice qui ne peut exécuter que l'addition, la multiplication et la soustraction. Soit a un nombre réel donné. Vous voulez calculer son inverse $\frac{1}{a}$.

عدد حقيقي معلوم

1) Expliquer comment la méthode de ***Newton-Raphson*** peut être utilisée pour calculer $\frac{1}{a}$. (Trouver l'***équation récurrente*** appropriée).

العلاقة تراجعية التي تسمح بحساب القيمة التقريبية
و متماشية مع عملية القسمة

2) En déduire la valeur approchée à 10^{-6} près de l'inverse du nombre a = 2.2. On prendra $x_0 = 0.2$.

استنتج تقريب

FIN

TD N° 1

Exo 1 :-

$f(x) = 2\tan x - x - 1 = 0 \qquad x \in]-\pi, \pi[$

$D_f =]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$

$\lim_{x \to -\pi} f(x) = 2.14 \quad ; \lim_{x \overset{<}{\to} \pi} f(x) = -4.14$

$\lim_{x \overset{<}{\to} -\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty \quad ; \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \overset{>}{\to} -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty \quad ; \lim_{x \overset{>}{\to} \frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{\cos^2 x} = 1$

$\Rightarrow \cos^2 x = 2 \Rightarrow$ impossible الإشارة دائما ثابتة

لأن cos محصور
بين -1 و 1

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow$

$0 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \geq 1$

$\frac{2}{\cos^2 x} \geq 2 \Rightarrow \frac{2}{\cos^2 x} - 1 \geq 1$

$f'(x) > 0 \; \forall \in D_f$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	||	$+$	||	$+$	
	$2,14$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$-4,14$

pour $x \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$

$f(-\pi) \times f(-\frac{\pi}{2}) > 0$ $2,14$

$f'(x) > 0$ $(+) = +\infty$

il n'y a aucune racine ds l'intervalle $]-\pi; -\frac{\pi}{2}[$

pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$f(-\frac{\pi}{2}) \times f(\pi/2) < 0$

$f'(x) > 0$ $\}$

∃ une et une seule racine ds l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

pour $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

$(\frac{\pi}{2}) \times f(\pi) > 0$

$f'(x) > 0$ $\}$

∃ aucune racine ds l'intervalle $]\frac{\pi}{2}, \pi[$

donc l'equ $2 tg\, x - x - 1 = 0$ admet une racine unique ds $]-\pi, \pi[$

2) $f(0) = -1$, $f(1) = 1,114$

$f(0) \times f(1) < 0$ سالب و

$x^* \in]0, 1[$ موجب

a l estimation du nombre d'iterations.

$$n \geqslant \frac{\log \frac{b-a}{\varepsilon}}{\log 2} - 1$$

$$n \geqslant \frac{\log \frac{1}{10^{-3}}}{\log 2} - 1$$

$\Rightarrow n \geqslant 8,957$

$\simeq 9$

Pour $x \in]-\infty, -1[$
$f(-\infty) \times f(-1) < 0$
$f'(x) > 0$
} $\exists!$ racine dan l'intervalle $]-\infty, -1[$

pour $x \in]-1, 1[$
$f(-1) \times f(1) < 0$
$f'(x) < 0$
} $\exists!$ racine dans l'intervalle $]-1, 1[$

pour $x \in]1, +\infty[$
$f(1) \times f(+\infty) < 0$
$f'(x) > 0$
} $\exists!$ racine dans l'intervalle $]1, +\infty[$

ماشي كاين جذر -1 , $+\infty$

donc l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet 3 racine réelles

نخرجو أشكال x يساوي.

2- $x = F_i(x)$ $\quad i = 1 - 6$

$x^3 - 3x + 1 = 0$

$x^3 + 1 = 3x \Rightarrow x = \dfrac{x^3+1}{3}$ $\quad F_1(x)$

methode 2:-

$x^3 = 3x - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3x-1} = F_2(x)$

methode 3:-

نقسم طرفين على x :-

$x^3 = 3x - 1 \Rightarrow$

$x^2 = \frac{3x-1}{x}$

$x = \sqrt{\frac{3x-1}{x}}$ $F_3(x)$

ou

$x = -\sqrt{\frac{3x-1}{x}}$ $F_4(x)$

méthode 4:-

نقسم على x^2 .

$x = \frac{3x-1}{x^2}$ $F_5(x)$

méthode 5:-

$x^3 - 3x + 1 = 0$

$x^3 - 3x = -1$

$x(x^2-3) = -1$

نقسم على x^2-3 :-

$x = \frac{-1}{x^2-3}$ $F_6(x)$

3) $x_{max} \in]1, +\infty[$

$f(1) = -1$ $f(2) = 3$ $\Rightarrow x_{max} \in]1, 2[$

نجربوا أيا وحدة

$x = F_1(x) = \frac{x^3+1}{3}$

X $F'(x) = x^2$

$1 < x < 2$

$1 < x^2 < 4$

نبدلو معادلة هذه ما ساعدتناش

⑤

$x = F_2(x) = \sqrt[3]{3x-1}$

$f'(x) = (3x-1)^{1/3} = \left(\frac{3}{3}\right)(3x-1)$

$(3x-1)^{-2/3} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{3x-1}\right)^2}$

لازم دير باوقية مطلقة

$$F_2'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}}$$

نديروا الحصر:-

$1 < x < 2$

$3 < 3x < 6 \Leftarrow$ نضرب في 3

لازم كنحصرو مجال مغلوق نزيدوا ساوي في <

$2 < 3x-1 < 5$ نقص 1

نربع الآن:-

$4 < (3x-1)^2 < 25$

ندخل جذع تكعيبي:

$\sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{(3x-1)^2} < \sqrt[3]{25}$

ثم مقلوبا:-

$$\frac{1}{\sqrt[3]{25}} < \frac{1}{\sqrt[3]{(3x-1)^2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$|F'(x)| < 0,63 < 1$

هذا راها أقل من 1.

نحسبوا المشتقة الثانية باش نعرفوا بلي راهي متزايدة أو متناقصة.

$$\boxed{\left(a^{f(x)}\right)' = \ln a \times f'(x) \times a^{f(x)}}$$

Ex 4 :-

$f(x) = x - 2^{-x} = 0$

1) séparation des racines

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 1 + \ln 2 \cdot 2^{-x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \ln 2 \times 2^{-x} = 0$

$f'(x) = 0$

$2^{-x} = \dfrac{-1}{\ln 2}$ Impossible

donc : $f'(x) \neq 0$

$f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow -1 \nearrow +\infty$

pour $x \in]-\infty, +\infty[$

$f(-\infty) \times f(+\infty) < 0$ } racine sur $\mathbb{R}$

$f'(x) \neq 0$

donc l'équation $x - 2^{-x}$

$\Rightarrow$ admet une racine unique sur $\mathbb{R}$

$f(0) = 1$, $f(1) = 0.5$

$x^* \in [0, 1]$

$x = 2^{-x} = F(x)$

$F'(x) = -\ln 2 \times 2^{-x}$

$|F'(x)| = \ln 2 . 2^{-x}$

$F''(x) = -(\ln 2)^2 . 2^{-x} < 0$

$\Rightarrow |F'(x)| \searrow$ sur $[0, 1]$

$\max |F'(x)| = |F'(0)| = \ln 2$

$|F'(x)| \leq \ln 2 < 1$

donc le méthode du point fixe converge $\forall x_0 [0, 1]$

$x = F(x) = 2^{-x}$

$x_0 = 0.5 \qquad \varepsilon = 10^{-3}$

$x = F(x) = 2^{-x_n}$

$x_1 = 0,707$

$x_2 = 0,613$

$x_3 = 0.654$

Exercice 5 :-

$f(x) = x \ln x - 0.8 = 0$

1) Separation des racine

$\lim_{x \to 0} f(x) = -0,8$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \ln x + 1$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 1 = 0$

$\ln x = -1$

$\Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$; $f(1/e) = -\frac{1}{e} - 0,8$

x	0 $\quad$ $1/e$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f(x)$	$-0,8$ $\searrow$ $\frac{1}{e}-0,8$ $\nearrow$ $+\infty$

Pour $x \in]0, \frac{1}{e}[$

$f(0) \times f(1/e) > 0$; $f'(x) < 0$ $\Big\}$ $\nexists$ racine dans l'intervalle $]0, 1/e[$

donc l'equation $x \ln x - 0,8 = 0$ admet une racine unique sur Df.

condition de converge de l'algorithme de Newton Raphson $[a, b]$

$f(a) \times f(b) < 0$

1) $f'(x) \neq 0$; $f''(x) \neq 0$

$f(x_0) \times f''(x_0) > 0$

3 شروط هذوا لازم نتحققو

2) calcule de la racine a conditions de converge

1) $f'(x) > 0$

$f'(x) > 0 \ \forall x \in]\frac{1}{e}; +\infty[$

Deja Verifé

2) $f''(x) \overset{?}{\neq} 0$

$f''(x) \neq 0$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \ \forall x \in]\frac{1}{e}; +\infty[$

3) pour $x_0 = 2$

$f(2) = 2\ln 2 - 0,8 > 0$

$f'(2) = \frac{1}{2} > 0$

donc $f(2) \times f''(2) > 0$

donc la méthode de Newton Raphson converge.

b- calcul de la racine

$f(x) = x\ln x - 0{,}8 = 0$

$x_0 = 2 \quad ; \quad \varepsilon = 10^{-7}$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n \ln x_n - 0{,}8}{\ln x_n + 1}$$

$x_1 = 1{,}6537251$

$x_2 = 1{,}6325186$

$x_3 = 1{,}6324270$

$x_4 = 1{,}6324270$

$|x_4 - x_3| < 10^{-7} \Rightarrow x \simeq x_4$

$= 1{,}6324270$ à 10^{-7} près

Ex06 :-

$$x = \frac{1}{a}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - a$$

نبدلوا واش عطانا f و x

ثم نطبق عليها هذي ⇓

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1/x_n - a}{-1/x_n^2}$$

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2\left(\frac{1}{x_n} - a\right)$$

$$= x_n + x_n - a x_n^2$$

$$\boxed{x_{n+1} = -a x_n^2 + 2x_n}$$

ومن هذي لي لقيناها مونهاش فسمة يعني صحيحة

2- calcul de $\frac{1}{2{,}2}$

$x_{n+1} = -2{,}2 x_n^2 + 2x_n$,

$x_0 = 0{,}2 \quad , \varepsilon = 10^{-6}$

$x_1 = 0{,}312000$

$x_2 = 0{,}409843$

$x_3 = 0{,}450149$

$x_4 = 0{,}454503$

$x_5 = 0{,}454545$

donc la méthode de Newton Raphson converge.

b- calcul de la racine

$f(x) = x\ln x - 0{,}8 = 0$

$x_0 = 2 \; ; \; \varepsilon = 10^{-7}$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n \ln x_n - 0{,}8}{\ln x_n + 1}$$

$x_1 = 1{,}6537251$

$x_2 = 1{,}6325186$

$x_3 = 1{,}6324270$

$x_4 = 1{,}6324270$

$|x_4 - x_3| < 10^{-7} \Rightarrow x \simeq x_4$

$= 1{,}6324270 \text{ à } 10^{-7} \text{ près}$

Ex 06 :-

$$x = \frac{1}{a}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - a$$

f و x نبدلوا واش عطانا

ثم نطبق عليها هذي ⇓

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1/x_n - a}{-1/x_n^2}$$

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2\left(\frac{1}{x_n} - a\right)$$

$$= x_n + x_n - a x_n^2$$

$$\boxed{x_{n+1} = -a x_n^2 + 2x_n}$$

ومنه هذي لي لقيناها هيهاش فلسفة يعني صحيحة

2) calcul de $\frac{1}{2{,}2}$

$x_{n+1} = -2{,}2\,x_n^2 + 2x_n \, ,$

$x_0 = 0{,}2 \quad , \; \varepsilon = 10^{-6}$

$x_1 = 0{,}312000$

$x_2 = 0{,}409843$

$x_3 = 0{,}450149$

$x_4 = 0{,}454503$

$x_5 = 0{,}454545$

$x_6 = 0,454545$

$|x_6 - x_5| < 10^{-6} \Rightarrow \frac{1}{2.2}$

$\simeq x_6 = 0,454545$ à 10^{-6} près