Programmes

Objectifs : Acquérir les notions de base pour le traitement du signal et des processus aléatoires.

Connaissances préalables recommandées : Cours de mathématiques de base.

Contenu de la matière :	
Chapitre 1 – *Généralités sur les signaux (3S)*	**Chapitre 4** - *Produit de Convolution : (2S)*
Chapitre 2 - *Analyse de Fourier (2S)*	**Chapitre 5** - *Corrélation des signaux : (2S)*
Chapitre 3 - *Transformée de Laplace : (3S)*	**Chapitre 6** - *Echantillonnage et Signaux discrets (3S)*

Mode d'évaluation : Contrôle continu : 40 % ; Examen final : 60 %.

Références : 1 : S. Haykin_Signals and systems_2ed_John Wiley, 2 : A.V. Oppenheim_Signals and systems_Prentice–Hall et 3 : J. Max, Traitement du signal

Chapitre 1 – *Généralités sur les signaux*

Introduction

Dans la vie quotidienne, les systèmes électroniques sont de plus en plus présents : à la maison (*télévision, cuisinière,...*), au bureau (*fax, ordinateur,...*) et sur la route (*GPS, lecteur media,...*). Tous ces appareils électroniques échangent de l'information sous forme analogique ou numérique. Cette information est émise d'un organe (*PC, capteur...*) et reçue par d'autres dispositifs (*caméra, serveur...*) afin d'être traitée et utilisée.

1 Notions de base et signaux

1.1 Signal - Traitement de signal

Le signal : C'est une entité (électrique, ondes acoustique ou lumineuse, suite de nombres...) engendrée par un phénomène physique et véhiculant une information (musique, parole, image, température…) via un canal. Un signal expérimental est souvent électrique (tension ou courant en fonction du temps) délivré par un capteur ou un appareil électrique.

Le signal utile : C'est le signal qui représente l'information selon l'application.

Le Bruit : C'est un phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal utile.

Le canal de transmission : C'est le support du signal. Il constitue une liaison entre un émetteur d'informations et un récepteur. Il occasionne des dégradations telles que :le retard, la distorsion, l'adjonction de bruit

La théorie du signal : Elle s'intéresse à l'étude mathématique des caractéristiques des signaux.

Le traitement du signal : C'est la manipulation de l'information afin d'extraire le maximum d'informations utiles d'un signal perturbé par le bruit, suivie d'une analyse afin d'extraire un caractère particulier du signal.

1.2 Classifications des signaux

1.2.1 Classification temporelle ou phénoménologique:

Elle recense les signaux en fonction de leur type d'évolution.

1.2.1.1 Les signaux déterministes :

Ce sont des signaux dont l'évolution temporelle est parfaitement définie et peut être prédite par un modèle mathématique approprié.

Les signaux périodiques : Ils se répètent régulièrement au cours du temps. Un signal *s(t)* est périodique de période T si il satisfait la relation : $s(t) = s(t + T) \ \forall t \in \mathbb{R}$. Plusieurs signaux sont considérés comme périodiques tels que :

Le signal périodique composite : Il résulte d'une somme de signaux périodiques dont le rapport des périodes est rationnel (répétition à l'infini d'un motif).

Le signal quasi-périodique : Il résulte d'une somme de signaux périodiques dont le rapport des périodes n'est pas rationnel.

Le signal pseudopériodique : Il résulte d'un signal périodique dont l'amplitude varie au cours du temps.

Le signal non périodique : Il ne satisfait pas à la relation précédente.

1.2.1.2 Les signaux aléatoires

Ce sont des signaux dont le comportement temporel est imprévisible et la description ne peut se faire qu'au travers d'observations statistiques (signal aléatoire ≠ bruit).

Les signaux stationnaires : Ce sont des signaux dont les caractéristiques statistiques ne changent pas au cours du temps (Ex : le bruit électronique).

Les signaux non-stationnaires : Ce sont des signaux dont les caractéristiques statistiques évoluent au cours du temps.

1.2.2 Classifications morphologiques

Un signal est la représentation de l'amplitude en fonction du temps. La classification morphologique se fait selon la nature du temps (*discret ou continu*) et l'amplitude (*discrète ou continue*).

[redacted]		
[redacted]	Signal analogique	Signal quantifié
[redacted]	Signal discret	Signal numérique

1.2.3 Classification énergétique

Elle nous informe sur l'énergie et la puissance, si elles sont finies ou infinies.

L'énergie d'un signal *x(t)* est donnée par la formule suivante :

Energie instantanée	Energie moyenne sur (t_0, t_1)	Energie moyenne sur *R*
$Wi_x = x(t) \cdot x^*(t) = \lvert x(t)\rvert^2$	$Wm_x = \int_{t_0}^{t_1} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$W_x = \lim_{T \to +\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \lvert x(t)\rvert^2 dt$

La puissance d'un signal *x(t)* est donnée par la formule suivante :

Puissance instantanée	Puissance moyenne sur (t_0, t_1)	Puissance moyenne sur *R*
$Pi_x = \frac{dWi_x}{dt} = \frac{d\lvert x(t)\rvert^2}{dt}$	$Pm_x = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \lvert x(t)\rvert^2 dt$

Remarque : L'unité de la puissance ne s'exprime pas en *[W]*, mais en $[V^2]$ ou $[A^2]$ selon le signal.

1.2.4 Classification fréquentielle ou spectrale

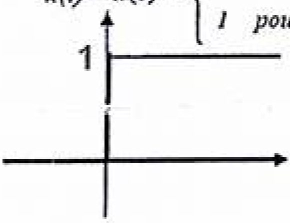
Nom d'onde	Plage de fréquence	Domaines et exemples
Très basses fréquences (TBF)	entre 3 KHz et 30 KHz	Ondes des sons audibles
Basses fréquences (BF)	entre 30 KHz et 300 KHz	Ondes radio
Moyennes fréquences (MF)	entre 300 KHz et 3 MHz	Ondes radio AM
Hautes fréquences (HF)	entre 3 MHz et 30 MHz	Ondes radio amateur
Très hautes fréquences (VHF)	entre 30 MHz et 300 MHz	Ondes radio FM et télévision
Ultra hautes fréquences (UHF)	entre 300 MHz et 3 GHz	Télévision, radio mobile, téléphones cellulaires
Super hautes fréquences (SHF)	entre 3 GHz et 30 GHz	Ondes satellites et radars
Extra hautes fréquences (EHF)	entre 30 GHz et 300 GHz	Armée, astronomie, presse, ambassade
Infra-rouge (IR)	entre 300 GHz et 400 THz	Ondes lasers, photographie
Lumière visible	entre 400 THz et 750 THz	Rayonnement dont nos yeux sont sensibles
Ultra-violet (UV)	entre 750 THz et 30 PHz	Cause le bronzage et les coups de soleil
Rayons X	entre 30 PHz et 30 EHz	Radiographie, photographie
Rayons Gamma	entre 30 EHz 30 ZHz	Emises par des noyaux radioactifs
Rayon cosmiques	>30 ZHz	

1.2.5 Signaux particuliers

Des signaux particuliers sont souvent utilisés dans le traitement du signal, tels que :

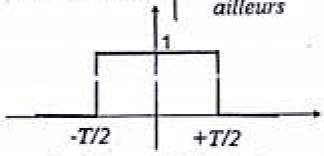
Echelon

$$x(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & pour\ t < 0 \\ 1 & pour\ t > 0 \end{cases}$$



Signal porte ou rectangle

$$x(t) = rect_T(t) = \begin{cases} 1 & pour\ |t| < T/2 \\ & ailleurs \end{cases}$$



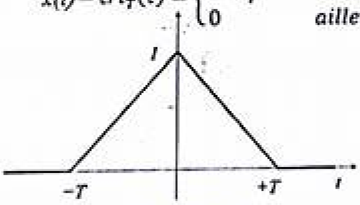
T : Largeur de la porte

Signal Signe

$$x(t) = Sgn(t) = \begin{cases} -1 & si\quad t < 0 \\ 1 & si\quad t > 0 \end{cases}$$

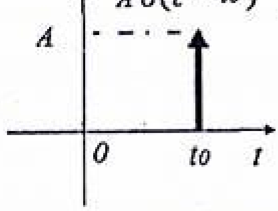
Signal triangulaire

$$x(t) = tri_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & si\quad |t| \leq 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



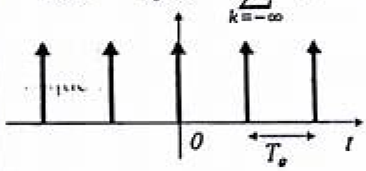
Impulsion de Dirac

$$A\,\delta(t - to)$$



Peigne de Dirac

$$x(t) = \delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$



Propriétés de l'impulsion de Dirac

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t - t_0)dt = x(t_0) \quad \forall x(t)$
$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T}\, rect\left(\frac{t}{T}\right)$	$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0) \quad \forall x(t)$

2 Analyse analogique du signal

2.1 Analyse harmonique

D'habitude l'évolution (l'amplitude) d'un signal est tracée en fonction du temps (représentation temporelle). L'analyse harmonique (*ou fréquentielle*) permet de donner pour un signal déterministe une deuxième représentation dite spectrale. Elle consiste à tracer les caractéristiques trigonométriques (l'amplitude et la phase du même signal) en fonction de la fréquence.

2.2 Série de Fourier

Le fondement de la série de Fourier est basé sur le principe qu'un signal périodique de fréquence f_0 et de puissance finie peut être décomposé en une somme d'ondes sinusoïdales. Le signal composite résultant est la **somme des harmoniques** dont les fréquences sont des multiples de f_0 ($k.f_0$ *avec* $k \in \mathbb{N}$.)

Définition : Considérons un signal périodique *x (t)* de fréquence fondamentale f_0 et de période $T = 1/f_0$. Le développement en série de Fourier de *x (t)* est le suivant :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k cos(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sin(2\pi k f_0 t)$$

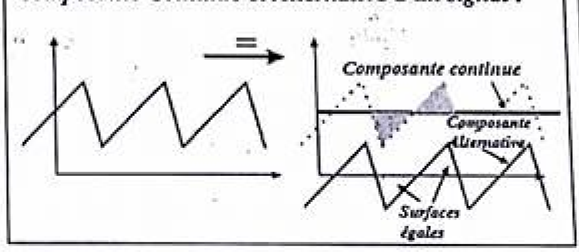
$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\, dt$: valeur moyenne ou composante continue (Figure ci-dessous)

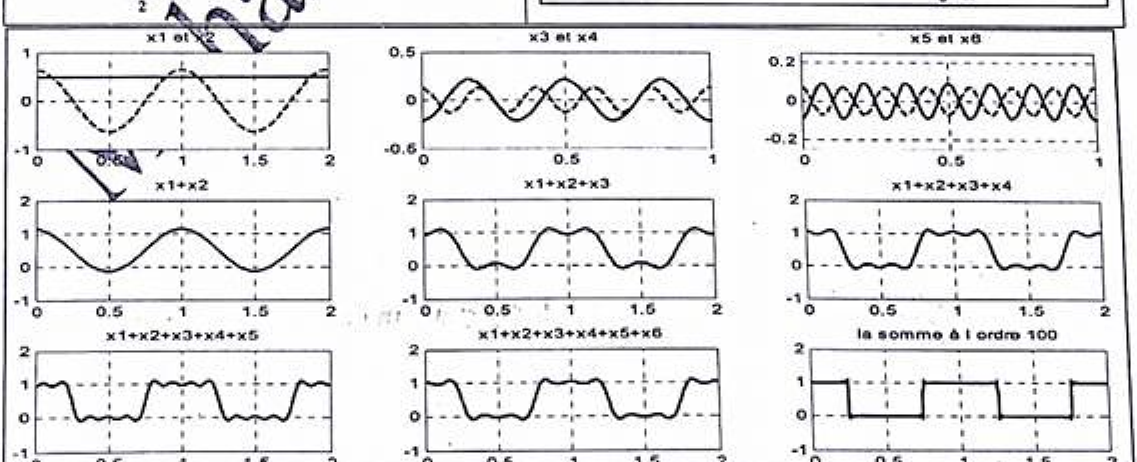
a_k, b_k: coefficients de Fourier (ou des harmoniques-composantes alternatives)

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\, cos(2\pi k f_0 t)\, dt \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\, sin(2\pi k f_0 t)\, dt \quad k \geq 1$$

Composante Continue et Alternative d'un signal :





2.2.1 Série de Fourier sous forme de cosinus

De la relation trigonométrique suivante :

$$A\cos(t) + B\sin(t) = \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(t + \arctan\left(\frac{-B}{A}\right)\right)$$

Le développement en série de Fourier sous forme de somme de sinusoïdes peut s'écrire :

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k)$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \qquad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \alpha_k = \arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$$

La représentation spectrale : Pour un signal périodique *x(t)*, on lui associe le spectre unilatéral (*fréquences positives ou nulles*). Ce dernier représente l'amplitude A_k et la phase α_k chacune en fonction des fréquences $k \cdot f_0$ des harmoniques.

Exemples

2.2.2 Série de Fourier sous forme complexe

En utilisant les relations d'Euler suivantes :

$$\cos(t) = \frac{e^{+jt} + e^{-jt}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(t) = \frac{e^{+jt} - e^{-jt}}{2j}$$

On montre aisément que la série de Fourier peut être transformée en une série de Fourier complexe :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k)\, e^{+j2\pi k f_0 t}$$

où les coefficients *X(k)* sont des complexes de la forme $X(k) = X_r(k) + jX_i(k)$: $X_r(k)$ est la partie réelle et $X_i(k)$ la partie imaginaire. Les coefficients *X(k)* sont calculés par la formule suivante :

$$X(k) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt \qquad pour\ -\infty \le k \le +\infty$$

Spectre bilatéral : C'est la représentation graphique de *X(k)* en fonction des fréquences.

Exemples

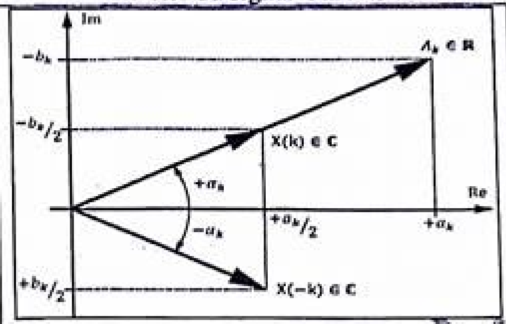
2.2.3 Relation entre les trois formes

La figure et le tableau ci-dessous illustrent de manière graphique et analytique la relation ainsi que le passage entre les trois formes de la série de Fourier (somme de sinusoïdes, cosinus, complexe).

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k cos(2\pi k f_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k sin(2\pi k f_0 t)$$

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \; cos(2\pi k f_0 t + \alpha_k)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k)\, e^{+j2\pi k f_0 t}$$



$k=0$	$\frac{a_0}{2}$	A_0	$X(0)$
$k>0$	$\{a_k, b_k\}$	$\{A_k, \alpha_k\}$	$X(\pm k)$
a_k b_k	a_k b_k	$+A_k \cos(\alpha_k)$ $-A_k \sin(\alpha_k)$	$+2\,\Re\{X(k)\} = +2\,X_r(k)$ $-2\,\Im\{X(k)\} = -2\,X_i(k)$
A_k α_k	$\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ $arctan\left(\frac{-b_k}{a_k}\right)$	A_k α_k	$2\,\lvert X(k)\rvert$ $arctan\left(\frac{\Im\{X(+k)\}}{\Re\{X(+k)\}}\right)$
$X(+k)$ $X(-k)$	$\frac{1}{2}(a_k - jb_k)$ $\frac{1}{2}(a_k + jb_k)$	$\frac{1}{2}A_k\, e^{+j\alpha_k}$ $\frac{1}{2}A_k\, e^{-j\alpha_k}$	$X(+k)$ $X(-k)$

Tableau: Relation entre les trois représentations de la série de Fourier.

2.2.4 Puissance dans les domaines temporel et fréquentiel

La relation existante entre la valeur efficace et la puissance est la suivante :

$$P = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t)\, dt = x_{eff}^2$$

صور متداولة
امتحان

La puissance d'un signal sinusoïdal d'amplitude A est $P_s = \frac{A^2}{2} \Rightarrow x_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}$.

Par similitude, la relation entre les coefficients A_k et $X(k)$ de la série de Fourier et la valeur efficace est :

$$A_{k,eff} = \frac{A_k}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\; |X(k)|$$

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{A_k}{\sqrt{2}}\right)^2 = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2} A_k^2 = X(0)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(2\,|X(k)|\right)^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X(k)|^2$$

La puissance d'un signal périodique peut se calculer dans le domaine temporel ou fréquentiel par :

$$P = X_{eff}^2 = A_0^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2} A_k^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X(k)|^2 = P_{dc} + P_{ac} = X_{dc}^2 + X_{ac}^2$$

2.3 Transformée de Fourier

Avec la série de Fourier nous avons pu décomposer un signal périodique de fréquence fondamentale f_0 en une somme de plusieurs sinusoïdes dont les fréquences $k.f_0$ sont des *k-Tuples* de la fondamentale f_0. Même si la série de Fourier est très utile et puissante avec des signaux périodiques, cela n'est pas le cas avec des signaux non-périodiques. La transformée de Fourier résout ce problème pour les signaux à énergie finie. L'idée vient du fait qu'un signal d'énergie finie est un signal périodique de période infinie. Les équations et les figures suivantes illustrent graphiquement et analytiquement le passage de la série de Fourier à la transformée de Fourier.

On a pour la série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k)\, e^{+j2\pi k f_0 t} \qquad avec \qquad X(k) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

$$X(k) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt \Rightarrow T\,X(k) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

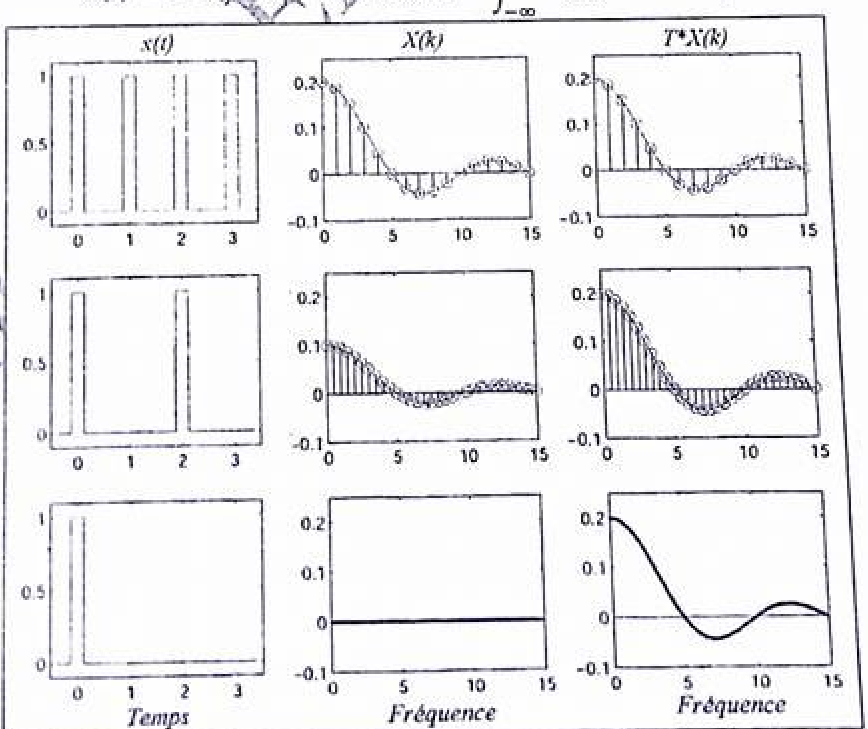
$$Si \qquad T \to \infty \qquad f_0 \to df \qquad k\,f_0 \to f \qquad T\,X(k) \to X(f)$$

$$Alors \qquad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

En notation abrégée :

$$X(f) = TF\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$x(t) = TFI\{X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{+j2\pi f t}\, df$$



La densité spectrale $X(f)$ du signal $x(t)$ est complexe, avec $X_r(f)$ comme partie réelle et $X_i(f)$ comme partie imaginaire :

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f) = X_r(f) + jX_i(f)$$

Les densités spectrales du module et de la phase de $x(t)$ sont données par :

$$|X(f)| = \sqrt{X_r^2(f) + X_i^2(f)} \quad et \qquad arg\{X(f)\} = \alpha(f) = arctan\left(\frac{X_i(f)}{X_r(f)}\right)$$

Exemples

2.3.1 Propriétés de la transformée de Fourier

Linéarité	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
Décalage	$x(t + t_d)$	$X(f)e^{+j2\pi f t_d}$
Modulation	$x(t)e^{+j2\pi f_0 t}$	$X(f - f_0)$
Dérivation	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
Intégration	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f) avec\ X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$
Convolution	$h(t) * x(t)$ $h(t) \cdot x(t)$	$H(f) \cdot X(f)$ $H(f) * X(f)$
Énergie	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt$	$W = \int_{-\infty}^{+\infty} \|X(f)\|^2\, df$
Symétrie	$X(t)$ $X(-t)$	$x(-f)$ $x(f)$
Conjugué	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Contraction du domaine	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{f}{a}\right)$
Impulsion de Dirac	$TF\{\delta(t)\} = 1$	$x(t)\ réel \in \Re \Rightarrow$ $X_r(f)$ paire et $X_i(f)$ impaire module pair et phase impaire
Sinusoïdes	$TF\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]}{2j}$	$TF\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]}{2}$
Peigne de Dirac	$TF\left\{\sum \delta(t + kT_e)\right\} = f_e \sum \delta(f + kf_e) \quad avec \quad f_e = \frac{1}{T_e}$	

L'analyse de Fourier permet de déterminer les fréquences présentes dans un signal donné. Ce dernier subit des dégradations au cours de sa transmission via un canal (filaire ou hertzien). A l'arrivée, le dispositif de réception devrait éliminer les effets de ces dégradations afin d'extraire le signal utile, c'est-à-dire supprimer toutes les fréquences inutiles (qui ne constituent pas le signal). Ce type de procédé s'appelle filtre : il appartient à la famille des Systèmes Linéaires Invariants dans le Temps (SLIT).

Programmes

Objectifs : Acquérir les notions de base pour le traitement du signal et des processus aléatoires.

Connaissances préalables recommandées : Cours de mathématiques de base.

Contenu de la matière :	
Chapitre 1 – *Généralités sur les signaux (3S)*	**Chapitre 4** - *Produit de Convolution : (2S)*
Chapitre 2 - *Analyse de Fourier (2S)*	**Chapitre 5** - *Corrélation des signaux : (2S)*
Chapitre 3 - *Transformée de Laplace : (3S)*	**Chapitre 6** - *Echantillonnage et Signaux discrets (3S)*

Mode d'évaluation : Contrôle continu : 40 % ; Examen final : 60 %.

Références : 1 : S. Haykin_Signals and systems_2ed_John Wiley, 2 : A.V. Oppenheim_Signals and systems_Prentice–Hall et 3 : J. Max, Traitement du signal

Chapitre 1 – *Généralités sur les signaux*

Introduction

Dans la vie quotidienne, les systèmes électroniques sont de plus en plus présents : à la maison (*télévision, cuisinière,...*), au bureau (*fax, ordinateur,...*) et sur la route (*GPS, lecteur media,...*). Tous ces appareils électroniques échangent de l'information sous forme analogique ou numérique. Cette information est émise d'un organe (*PC, capteur...*) et reçue par d'autres dispositifs (*caméra, serveur...*) afin d'être traitée et utilisée.

1 Notions de base et signaux

1.1 Signal - Traitement de signal

Le signal : C'est une entité (électrique, ondes acoustique ou lumineuse, suite de nombres...) engendrée par un phénomène physique et véhiculant une information (musique, parole, image, température…) via un canal. Un signal expérimental est souvent électrique (tension ou courant en fonction du temps) délivré par un capteur ou un appareil électrique.

Le signal utile : C'est le signal qui représente l'information selon l'application.

Le Bruit : C'est un phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal utile.

Le canal de transmission : C'est le support du signal. Il constitue une liaison entre un émetteur d'informations et un récepteur. Il occasionne des dégradations telles que :le retard, la distorsion, l'adjonction de bruit

La théorie du signal : Elle s'intéresse à l'étude mathématique des caractéristiques des signaux.

Le traitement du signal : C'est la manipulation de l'information afin d'extraire le maximum d'informations utiles d'un signal perturbé par le bruit, suivie d'une analyse afin d'extraire un caractère particulier du signal.

1.2 Classifications des signaux

1.2.1 Classification temporelle ou phénoménologique:

Elle recense les signaux en fonction de leur type d'évolution.

1.2.1.1 Les signaux déterministes :

Ce sont des signaux dont l'évolution temporelle est parfaitement définie et peut être prédite par un modèle mathématique approprié.