I) دالة اللوغاريتم النبيري

1) تعريف

نسمي دالة اللوغاريتم النبيري الدالة الأصلية F للدالة

$$f :]0,+\infty[\to IR$$
$$x \to \frac{1}{x}$$

والتي تحقق $F(1)=0$ ونرمز لها بـ $\ln$ أو Log

ملاحظة

a) * $\ln :]0,+\infty[\to IR$

* $D_{\ln} =]0,+\infty[$

b) * نعتبر الدالة $f(x)=\ln(u(x))$ لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow u(x)>0$

* نعتبر الدالة $f(x)=\ln|u(x)|$ لدينا $x\in D_f \Leftrightarrow u(x)\neq 0$

c) * $\ln(1)=0$

* $\ln(e)=1$ (مع $e\approx 2,71828$)

* $(\forall r\in Q) : \ln(e^r)=r$

2) خاصيات الدالة $\ln$

ليكن $a>0$ و $b>0$ و $r\in Q$

* $\ln(ab)=\ln a+\ln b$
* $\ln(a^r)=r\ln a$
* $\ln(\frac{1}{a})=-\ln a$
* $\ln(\frac{a}{b})=\ln a-\ln b$
* $\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$
* $\ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$

ملاحظة :

* إذا كان $ab>0$ فإن : $\ln(ab)=\ln|a|+\ln|b|$
* إذا كان $\frac{a}{b}>0$ فإن : $\ln(\frac{a}{b})=\ln|a|-\ln|b|$
* إذا كان $a^n>0$ فإن : $\ln(a^n)=n\ln|a|$

3) إشارة $\ln(x)$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	

4) الإشتقاق

* $(\forall x>0) : (\ln x)'=\frac{1}{x}$
* $(\ln u(x))'=\frac{u'(x)}{u(x)}$
* $(\ln u|x|)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

5) النهايات الإعتيادية

a) $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ ($\ln(+\infty)=+\infty$)

b) $\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ ($\ln(0)=-\infty$)

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

d) $\lim_{x\to0^+}x\ln x=0$

e) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ أو $\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

ملاحظة

$$\frac{u(x)\ln(v(x))}{w(x)} \quad \left| \begin{array}{l} v(x)\to+\infty \to \frac{\ln t}{t} \\ v(x)\to 0^+ \to t\ln t \\ v(x)\to a\neq 0 \to \frac{\ln t}{t-1} \end{array} \right.$$

II) دالة الأس النبيري

1) تعريف

نسمي دالة الأس النبيري الدالة العكسية للدلة ln ونرمز لها بالرمز $x\to e^x$

ملاحظة

a) * الدالة $x\to e^x$ معرفة على $\mathbb{R}$.

* $(\forall x\in\mathbb{R}) : e^x>0$

b) * $e^0=1$ * $e^1=e$

c) * $(\forall x\in\mathbb{R}) : \ln(e^x)=x$

* $(\forall x>0) : e^{\ln(x)}=x$

d) * $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y>0) \ : e^x=y \Leftrightarrow ln(y)=x$

2) خاصيات

ليكن $x,y\in\mathbb{R}$ و $r\in Q$

* $e^{x+y}=e^x\cdot e^y$ * $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$
* $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$ * $e^{rx}=(e^x)^r$
* $e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$
* $e^x<e^y \Leftrightarrow x<y$

3) الإشتقاق

* $(\forall x\in\mathbb{R}) : (e^x)'=e^x$
* $(e^{u(x)})'=u'(x)e^{u(x)}$

4) النهايات الإعتيادية

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\quad (e^{+\infty} = +\infty)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\quad (e^{-\infty} = 0)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

e) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

ملاحظة

$$\frac{u(x)e^{v(x)} - \varphi(x)}{w(x)} \quad \left| \quad \begin{array}{l} v(x)\to+\infty \to \frac{e^t}{t} \\ v(x)\to-\infty \to te^t \\ v(x)\to a\in\mathbb{R} \to \frac{e^t - 1}{t} \end{array} \right.$$

III) دالة اللوغاريتم للأساس a .

1) تعريف

ليكن $a \in \mathbb{R}^{*+} - \{1\}$ نسمي دالة اللوغاريتم للأساس a

الدالة التي نرمز لها بـــ $\log_a$ والمعرفة بـــ :

$$(\forall x > 0) : \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

حالات خاصة

*) الدالة $\log_{10}$ نسمى دالة اللوغاريتم العشري ونرمز لها

بـــالرمز $\log$

$$(\forall x > 0) : \log(x) = \log_{10}(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

*) دالة اللوغارتم النبيري هي دالة اللوغاريتم ذات الأساس e .

2) خاصيات

*) الدالة $\log_a$ لها نفس خاصيات $\ln$.

*) $\log_a(a) = 1$ $\qquad$ *) $\log_a(1) = 0$

*) $\log(10) = 1$ $\qquad$ *) $\log(1) = 0$

IV) الأس الحقيقي لعدد حقيقي موجب قطعا

1) تعريف

$$(\forall a > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) :\ a^x = e^{x\ln(a)}$$

2) خاصيات

ليكن $a > 0$ و $b > 0$ و x و y من $\mathbb{R}$.

*) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ $\qquad$ *) $a^{xy} = (a^x)^y$

*) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ $\qquad$ *) $a^x b^x = (ab)^x$

*) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\qquad$ *) $\frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$

*) $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

*) $\ln(a^x) = x\ln a$

1 - تعريف :

الدالة الأصلية للدالة $\frac{1}{x}$ ← x على المجال $]0,+\infty[$ التي تنعدم في النقطة 1 تسمى دالة اللوغاريتم النبيري و نرمز لها بـ $\ln$ أو Log .

بمعنى : $f(1)=0$ و $x>0$ و $f(x)=\ln(x) \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$

مثال 1 :

تحديد مجموعة تعريف الدالة f بحيث $f(x)=\ln(x^2+x-2)$

$x\in Df \Leftrightarrow x^2+x-2>0$. لنحل المتراجحة $x^2+x-2>0$.

$\Delta=1-4\times1\times(-2)=9$ إذن المعادلة $x^2+x-2=0$ تقبل حلين مختلفين هما : $x_1=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$ و $x_2=\frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2$.

ومنه فإن $x^2+x-2>0$ إذا كان $x>1$ أو $x<-2$ و بالتالي $Df=]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$.

مثال 2 :

تحديد مجموعة تعريف الدالة f بحيث $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}$.

$x\in Df \Leftrightarrow x+1>0$ و $x>0$ و $\ln(x)\neq 0$

يعني $x\neq1$ و $x>0$ و $x>-1$ (تقاطع المجالين $]0,+\infty[$ و $]-1,+\infty[$)

إذن $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$

و منه $Df=]0,1[\cup]1,+\infty[$

2 - خاصيات :

خاصية 1 :

إذا كان x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا .

$\ln x<\ln y \Leftrightarrow x<y$ و $\ln x=\ln y \Leftrightarrow x=y$ و $\ln x>\ln y \Leftrightarrow x>y$.

مثال 3 :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\ln(x-2)=\ln(5-x)$.

لكي يكون التعبير صحيحا يجب أن يكون $x>2$ و $x<5$ يعني $x\in]2,5[$

لدينا : $\ln(x-2)=\ln(5-x)$ يعني $x-2=5-x$ يعني $x+x=5+2$ يعني $2x=7$ يعني $x=\frac{7}{2}$.

و بما أن $\frac{7}{2}\in]2,5[$ فإن حل المعادلة هو العدد $\frac{7}{2}$.

مثال 4 :

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\ln(x-1)>\ln(x)$.

لكي يكون التعبير صحيحا يجب أن يكون $x>1$ و $x>0$ يعني $x\in]1,+\infty[$ (تقاطع المجالين $]0,+\infty[$ و $]1,+\infty[$)

لدينا $\ln(x-1)>\ln(x)$ يعني $x-1>x$ يعني $2x>1$ يعني $x>\frac{1}{2}$.

و لدينا تقاطع المجالين $]1,+\infty[$ و $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ هو المجال $]1,+\infty[$ إذن حل المتراجحة هو المجال $]1,+\infty[$.

خاصية 2 :

إذا كان x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا

$$\ln(x\times y)=\ln x+\ln y$$

$$\ln(\frac{1}{x})=-\ln x$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$$

$$\ln\left(x^r\right)=r\ln x$$

أمثلة :

لنكتب بدلالة $\ln 2$ و $\ln 3$ الأعداد التالية :

— $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$. لدينا $\ln\left(\frac{2}{3}\right)=\ln 2-\ln 3$

— $\ln\left(\frac{8}{3}\right)$. $\ln\left(\frac{8}{3}\right)=\ln 8-\ln 3=\ln\left(2^3\right)-\ln 3=3\ln 2-\ln 3$

— $\ln\left(\frac{4}{81}\right)$. $\ln\left(\frac{4}{81}\right)=\ln 4-\ln 81=\ln\left(2^2\right)-\ln\left(3^4\right)=2\ln 2-4\ln 3$

— $\ln(216)$. $\ln(216)=\ln\left(2^3\times 3^3\right)=\ln\left(2^3\right)+\ln\left(3^3\right)=3\ln 2+3\ln 3$

— $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\right)$. $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}\right)=\ln\left(\sqrt[3]{2}\right)-\ln\left(\sqrt{3}\right)=\ln\left(2^{\frac{1}{3}}\right)-\ln\left(3^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{3}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3$

— بسط A بحيث : $A=\ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+\ln\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

$$A=\ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+\ln\sqrt{2-\sqrt{2}}=\ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)=\ln\left(\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}\right)=\ln\left(\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\right)=\ln\left(\sqrt{4-2}\right)=\ln\left(\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\ln 2$$

3 – النهايات :

خاصية :

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0^+}x\ln x=0$$

$$\text{و} \quad \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

أمثلة :

— لنحسب : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\ln x}$ و $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\ln x}$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty}1+\ln x=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\ln x}=0$

لدينا $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ إذن $\lim_{x\to0^+}1+\ln x=-\infty$ ومنه $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\ln x}=0$

— لنحسب : $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)+x$ و $\lim_{x\to0^+}\ln(x)+x$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)+x=+\infty$.

لدينا $\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ إذن $\lim_{x\to0^+}\ln(x)+x=-\infty$.

— لنحسب : $\lim_{x\to0^+}\ln(x)-x$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-x$.

لدينا $\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ إذن $\lim_{x\to0^+}\ln(x)-x=-\infty$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-x$ لا يمكن حسابها مباشرة (شكل غير محدد)

الطريقة استعمال النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$. و بالتالي $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right)$

و بما ان $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right)=-1$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\ln(x)-x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right)=-\infty$.

— لنحسب : $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{1-\ln(x)}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{1-\ln(x)}$.

لدينا $\lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to0^+}1-\ln(x)=+\infty$ إذن $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1-\ln x}$ لا يمكن حسابها مباشرة (شكل غير محدد)

الطريقة هي التعميل ب $\ln x$. و بالتالي $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1-\ln x}$

و بما أن $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0$ و منه $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)} = -1$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} 1-\ln(x) = -\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1-\ln x}$ لا يمكن حسابها مباشرة (شكل غير محدد)

<u>الطريقة هي التعميل ب $\ln x$</u> . و بالتالي $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1-\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}$

و بما أن $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$ و منه $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)} = -1$.

– لنحسب : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2}$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} = 0 \times \frac{1}{+\infty} = 0 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \times +\infty = -\infty$$

– لنحسب : $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(-\infty)^2}{0^+} = +\infty \times +\infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2$$

و بما أن $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = 0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 = 0$ إذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

4 – المشتقة اللوغاريتمية :

خاصية :

u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و لا تنعدم على هذا المجال .

لكل عدد x من I لدينا : $\left(\ln|u(x)|\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

أمثلة :

$$\left(\ln|2x+1|\right)' = \frac{(2x+1)'}{2x+1} = \frac{2}{2x+1}$$

$$\left(\ln|-x^2+4x|\right)' = \frac{(-x^2+4x)'}{(-x^2+4x)} = \frac{-2x+4}{-x^2+4x}$$

$$\left(\ln\sqrt{x}\right)' = \frac{(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

تعريف :

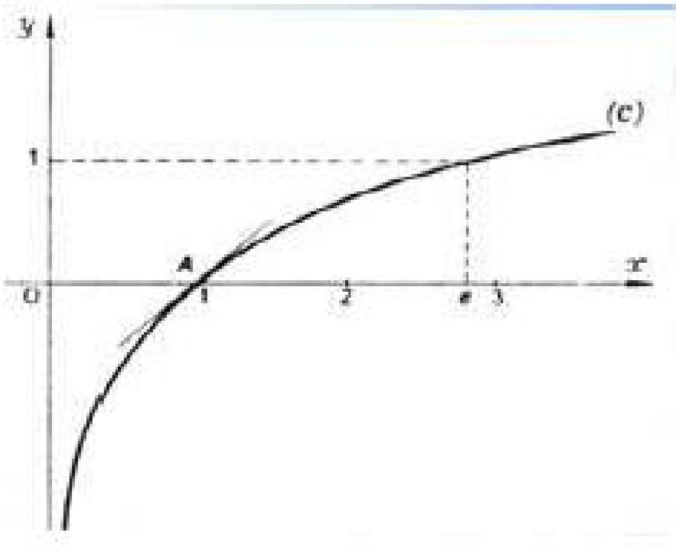
u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I و لا تنعدم على هذا المجال .

الدالة $\frac{u'}{u}$ تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I .

أمثلة :

لنحدد الدالة المشتقة للدالة التالية : $\ln(x+\sqrt{x})$: $\left(\ln(x+\sqrt{x})\right)$

$$\left(\ln(x+\sqrt{x})\right)' = \frac{\left(x+\sqrt{x}\right)'}{x+\sqrt{x}} = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}} = \frac{\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}}{x+\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{x+\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}\right)}$$



التمثيل المبياني للدالة ln x

نتائج

a و b عددان حقيقيان موجبان تماما و n عدد من $\mathbb{Z}$ $\ln(a.b)=\ln a+\ln b$ ؛ $\ln(a^n)=n\ln a$ ؛ $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$ ؛ $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ ؛ $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
$\ln a=\ln b$ تكافئ $a=b$ ؛ $\ln a>\ln b$ تكافئ $a>b$ ؛ $\ln a<\ln b$ تكافئ $a<b$
من أجل $x>1$: $\ln x>0$ ؛ من أجل $0<x<1$: $\ln x<0$

و) نهايات الدالة اللوغاريتمية

لدينا (1) $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty}$

البرهان (2) : $\boxed{\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty}$

نضع $x=\frac{1}{t}$ نجد : $t=\frac{1}{x}$: لما $x\to0^+$ فإن : $t\to+\infty$

و عليه : $\lim_{x\to0^+}\ln x=\lim_{t\to+\infty}\ln\frac{1}{t}=\lim_{t\to+\infty}(-\ln t)=-\infty$

البرهان (3) : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0}$

من أجل $x>0$ نضع $t=\ln x$ و $x=e^t$ مع $\lim_{x\to+\infty}t=+\infty$ ،

و بالتالي $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0$

البرهان (4) : $\boxed{\lim_{x\to0^+}x\ln x=0}$

نضع : $x=\frac{1}{t}$ أي : $t=\frac{1}{x}$ فإنه : لما $x\to0^+$ فإن : $t\to+\infty$

و بالتالي $\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\ln t}{t}=0$

البرهان (5) : $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$

الدالة $f:t\to\ln t$ معرفة و قابلة لاشتقاق على $]0;+\infty[$

فهي تقبل الاشتقاق عند 1 و لدينا :

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

أي أن : $f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}$ ...(I)

و من جهة أخرى $f'(t)=\frac{1}{t}$ و عليه : $f'(1)=1$ ...(II)

إذن من (I) و (II) ينتج $\lim_{h\to0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$

و بالتالي : $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

نهايات أساسية :

$\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$	$\lim_{u\to0^+}\ln u=-\infty$	$\lim_{u\to0^+}u\ln u=0$	$\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}=0$	$\lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$

ب) الدالة المشتقة للدالة اللوغاريتمية النيبرية :

1 الدالة المشتقة للدالة $x\mapsto\left(e^{\ln x}\right)$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x

لدينا : $e^{\ln x}=x$ و عليه $\left(e^{\ln x}\right)'=x'$

تكافئ $(\ln x)'\left(e^{\ln x}\right)=1$

تكافئ $(\ln x)'=\frac{1}{\left(e^{\ln x}\right)}$

تكافئ $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ؛ $\boxed{(\ln x)'=\frac{1}{x}}$

2 الدالة المشتقة للدالة $x\mapsto\ln|u(x)|$ حيث

u دالة غير معدومة و قابلة للاشتقاق على مجال I .

الدالة $x\mapsto\ln|u(x)|$ هي مركب الدالتان u و $\ln$ حيث u

موجبة تماما وتقبل الاشتقاق على I و الدالة $\ln$

تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و عليه الدالة تقبل الاشتقاق على I

و دالتها المشتقة هي الدالة $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ أي :

$$(\ln u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

البرهان

لدينا : $\left(e^{\ln u(x)}\right)=u(x)$

لنحسب الدالة المشتقة للدالة $x\mapsto e^{\ln u(x)}$

$\left(e^{\ln u(x)}\right)'=u'(x)$ تكافئ $(\ln u(x))'\left(e^{\ln u(x)}\right)=u'(x)$

تكافئ $(\ln u(x))'=\frac{u'(x)}{\left(e^{\ln u}\right)}$

تكافئ $\boxed{(\ln u(x))'=\frac{u'(x)}{u(x)}}$

ملخص دوال أسية و لوغاريتمية

تمرين 1

أكمل الجدول التالي

قواعد الحساب	
$e^a \times e^b = \dots\dots\dots\dots$	$\ln(a \times b) = \dots\dots\dots\dots$
$\frac{e^a}{e^b} = \dots\dots\dots\dots$	$\ln(\frac{a}{b}) = \dots\dots\dots\dots$
$(e^a)^b = \dots\dots\dots\dots$	$\ln(a^n) = \dots\dots\dots\dots$
$e^{-b} = \dots\dots\dots\dots$	$\ln(\frac{1}{b}) = \dots\dots\dots\dots$
$e^0 = \dots\dots\dots\dots$	$\ln(1) = \dots\dots\dots\dots$
$e^{\ln(x)} = \dots\dots\dots\dots$	$\ln(e^x) = \dots\dots\dots\dots$

نهايات أساسية	
$\lim\limits_{u\to+\infty} e^u = \dots\dots\dots\dots$	$\lim\limits_{u\to+\infty} \ln(u) = \dots\dots\dots\dots$
$\lim\limits_{u\to-\infty} e^u = \dots\dots\dots\dots$	$\lim\limits_{u\to0^+} \ln(u) = \dots\dots\dots\dots$
$\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u^n} = \dots\dots\dots\dots$	$\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{\ln(u)}{u^n} = \dots\dots\dots\dots$
$\lim\limits_{u\to-\infty} u^n e^u = \dots\dots\dots\dots$	$\lim\limits_{u\to0^+} u^n\ln(u) = \dots\dots\dots\dots$
$\lim\limits_{u\to0} \frac{e^u-1}{u} = \dots\dots\dots\dots$	$\lim\limits_{u\to0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \dots\dots\dots\dots$

الاشتقاق	
$[e^x]' = \dots\dots\dots\dots$	$[\ln(x)]' = \dots\dots\dots\dots$
$[e^u]' = \dots\dots\dots\dots$	$[\ln(u)]' = \dots\dots\dots\dots$

تمرين 2

حل في $\mathbb{R}$ ما يلي:

- 1 $2\ln(x-3) = \ln 4$
- 2 $\ln(3x-2) = 0$
- 3 $\ln(x-4) + \ln(x-1) = 1$
- 4 $(\ln(x))^2 - \ln(x^2) - 3 = 0$

تمرين 3

حل في $\mathbb{R}^2$ الجمل التالية :

(1 $\begin{cases} x+y=60 \\ \ln x + \ln y = \ln 1000 \end{cases}$ (2 $\begin{cases} x^2+2y=16 \\ \ln\frac{x}{y} = -\ln 3 \end{cases}$

(3 $\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases}$ (4 $\begin{cases} 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0 \\ e^x \times e^y = 1 \end{cases}$

- 5 $(\ln(x))^4 - 34(\ln(x))^2 + 225 = 0$
- 6 $\ln x + \ln(x+2) \le \ln(x^2 - 2x + 2)$.
- 7 $\ln(x^2 + 2x + 2) \ge \ln(3-x) + \ln(x+1)$.

تمرين 4

احسب النهايات التالية :

(1 $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ ، (2 $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ ، 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \ln(\ln x)$ ، 5) $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} \frac{e^x}{\ln x}$ ، 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - \ln x)$ ، 7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

تمرين 5

عين مجموعة التعريف و مجموعة قابلية الاشتقاق للدوال f و احسب دالتها المشتقة في كل حالة مما يلي

1) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln x$ ، 2) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

3) $f(x) = x\ln|x|$ ، 5) $f(x) = x\ln(-x)$

6) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ ، 7) $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

تمرين 6

I ـ لتكن g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2-2\ln x$

1 ـ أدرس تغيرات الدالة g ثم أعط جدول تغيراتها

(حساب النهايات غير مطلوب)

2 ـ إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $x>0$ ، فإن : $g(x)>0$

II ـ نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}+\frac{1+\ln x}{x}.$$

نسمي (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة هي $2cm$)

1 ـ أ ـ أدرس نهاية الدالة f عند 0 بقيم أكبر من 0

ثم إستنتج وجود مستقيم مقارب للمنحني (C_f)

ـ ب ـ أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$. (لاحظ أنه من أجل كل x ، $x>0$ ، فإن : $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$)

2 ـ أ ـ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، حيث $x>0$ ، فإن : $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$

ـ ب ـ أستنتج إشارة $f'(x)$. (إستعمل نتيجة الجزء ـ I ـ)

، ثم تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

ـ جـ ـ أعط جدول تغيرات الدالة f .

3 ـ ليكن (D) المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

ـ أ ـ برهن أن المستقيم (D) مقارب مائل للمنحني (C_f) .

ـ ب ـ أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

4 ـ أرسم في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (C_f) و (D).

تمرين 7

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1.أ− ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

ب−عين الدالة المشتقة للدالة f

ج−ادرس إشارة $f'(x)$ ،استنتج تغيرات f

2.أ− بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=2x$

مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

ب− ارسم المستقيم D والمنحني (C).

3.k عدد حقيقي موجب تماما

ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $e^{2x}-e^x+1-k=0$

أ) بالحساب . ب) باستعمال تغيرات الدالة f

تمرين 8

الجزء1: نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$u(x)=2x^2-1+2\ln|x|$$

1.ادرس تغيرات الدالة u على $\mathbb{R}^*$.

2. أدرس نهايات الدالة u عند 0 و $+\infty$.

3.نعتبر المعادلة $u(x)=0$

أ− بين أن هذه المعادلة تقبل حلا واحدا α حيث $\alpha\in\left]\frac{1}{2};1\right[$

ب− أعط حصرا بعددين كسريين للعدد α من الشكل $\frac{n}{10}$ و $\frac{n+1}{10}$ حيث n عدد طبيعي.

4.إستنتج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}^*$

الجزء2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي

$$f(x)=2x-\frac{\ln|x|}{x^2}$$

نرمز بـ (C) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1.ادرس نهايات الدالة f عند 0 ، $-\infty$ و $+\infty$.

(نقبل أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^2}=0$)

2.احسب $f'(x)$.

3.ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

4.أ− بين أن $f'(\alpha)=3\alpha-\frac{1}{2\alpha^2}$.

ب− باستعمال حصر α في الجزء1 (3−ب) بين أن:

$1,6<f(\alpha)<2,1$ (لا يطلب رسم المنحني (C))

تمرين 9

الجزء1: 1 ـ $P(x)$ ، كثير حدود للمتغير الحقيقي x ، حيث :

$$P(x)=3x^3-2x^2-1$$

ـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن :

$$P(x)=(x-1)(3x^2+x+1)$$

ثم إستنتج إشارة $P(x)$ في المجال $]0,+\infty[$.

2 ـ لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي :

$$g(x)=x^3-x^2+1-\ln x$$

ـ أدرس إتجاه تغيرات الدالة g (حساب النهايات غير مطلوب) .

ـ إستنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0,+\infty[$.

الجزء2 ـ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{2\ln x}{x}+x^2-2x+3$

1 ـ أحسب : $\lim_{x\to 0} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب ـ أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارته (إستعمل نتيجة السؤال ـ 2 ـ).

جـ ـ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.5<\alpha<0.6$

2 ـ المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، (الوحدة هي $2cm$)

(P) القطع المكافئ الذي معادلته : $y=x^2-2x+3$

و (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f .

أ ـ أحسب : $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x^2-2x+3)\right)$ ،

ماذا يمكن القول عن المنحنيين (C_f) و (P) ؟