Correction Examen 1

Exercice 1 :

$$S_n^{*2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j \neq i \\ =1}}^{n} |\mathrm{cov}(\Delta_i ; \Delta_j)|$$

a $\Delta_i = K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)\right)$ centré

donc :

$$\mathrm{cov}(\Delta_i, \Delta_j) = \mathbb{E}\left[\left(K\left(\frac{x-X_i}{h}\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)\right)\right) \times \left(K\left(\frac{x-X_j}{h}\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{x-X_j}{h}\right)\right)\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left(K\left(\frac{x-X_i}{h}\right) K\left(\frac{x-X_j}{h}\right)\right) - \mathbb{E}\left(K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)\right) \cdot \mathbb{E}\left(K\left(\frac{x-X_j}{h}\right)\right)$$

On pose : $K_i = K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)$, $K_j = K\left(\frac{x-X_j}{h}\right)$

$$\mathrm{cov}(\Delta_i, \Delta_j) = \mathbb{E}(K_i K_j) - \mathbb{E}(K_i) \cdot \mathbb{E}(K_j)$$

$$= \iint K\left(\frac{x-u}{h}\right) \cdot K\left(\frac{x-v}{h}\right) f(u,v)\, du \cdot dv$$

$$- \int K\left(\frac{x-u}{h}\right) f(u)\, du \cdot \int K\left(\frac{x-v}{h}\right) f(v)\, dv$$

$$= \iint K\left(\frac{x-u}{h}\right) K\left(\frac{x-v}{h}\right) \left[f(u,v) - f(u) \cdot f(v)\right) du\,d$$

On pose : $z = \frac{x-u}{h} \Rightarrow du = h\,dz$

$t = \frac{x-v}{h} \Rightarrow dv = h\,dt$

$cov(\Delta_i, \Delta_j) = h^2 \iint K(z)\, K(t) \left[f(x-hz, x-ht) - f(x-hz) f(x-ht) \right]$
du . dv .

d'après l'hypothèse H on a K est un noyau borné et $f(u,v)$, $f(u)$, $f(v)$ sont des fcts bornées.

alors :

$$|cov(\Delta_i, \Delta_j)| \leq C . h^2 \Rightarrow \boxed{cov(\Delta_i, \Delta_j) = O(h^2)} . (1)$$

D'autre part, on peut majorer cette covariance par l'inégalité de covariance, on trouve :

$$\boxed{|cov(\Delta_i, \Delta_j)| \leq C\, \alpha(|i-j|)} \quad (2)$$

L'idée de la preuve consiste à introduire une suite u_n entière et d'utiliser tantôt la borne (1) quand i est proche de j, tantôt la borne 2 quand i et j sont éloignés, on arrive à :

$$S_n^{*2} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j} |cov(\Delta_i, \Delta_j)| =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{i<j} |cov(\Delta_i, \Delta_j)| + \sum_{i>j} |cov(\Delta_i, \Delta_j)| \right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{0\leq |i-j|\leq u_n} c h^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{|i-j|>u_n} \alpha(|i-j|) \quad 01$$

$$\leq C n . u_n h^2 + n^2 \alpha(u_n) \quad (*)$$

il suffit de choisir $u_n = \frac{1}{h \lg n}$ 01

$$(*) \leq \frac{c n h}{\lg n} + n^2 \alpha\left(\frac{1}{h \lg n}\right)$$

or $h^{a-1} = o\left(\frac{1}{n \lg n}\right)$ et $\alpha(n) \leq C . n^{-a}$ 01

on trouve $S_n^{*2} = o(nh)$

$$n^2 \alpha\left(\frac{1}{h \lg n}\right) \leq n^2 C . \left(\frac{1}{h \lg n}\right)^{-a}$$

$$\leq n^2 C^{-a} h h^{a-1} \lg n^{a}$$

$$\leq n^2 C' h h^{a-1}$$

$$\leq \frac{n^2 c h}{n \lg n} = \frac{c}{\lg n} n h \Rightarrow$$

$S_n^{*2} = o(nh)$.

1) $E.Q.M\ \hat{f}(x) = \left(E(\hat{f}(x)) - f(x)\right)^2 + Var(\hat{f}(x))$ 0,1

1) $E\,\hat{f}(x) = E\left(\frac{1}{nh}\sum K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)\right)$

$= \frac{1}{h} E\left(\frac{x-X}{h}\right) = \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} K\left(\frac{x-u}{h}\right) f(u)\,du.$

$z = \frac{x-u}{h} \Rightarrow du = h\,dz.$

$= \int K(z) f(x-hz)\,dz.$

$f \in C^2$, on utilise le developpement de Taylor:

$E\,\hat{f}(x) - f(x) = \int K(z)\left(f(x) - \cancel{hz f'(x)} + \frac{h^2 z^2}{2!} f^{(2)}(\theta_z)\right)dz$

$= f(x) - \frac{h^2}{2!}\int z^2 f^{(2)}(\theta_z) K(z)\,dz$

a f st cont alors $h \to 0 \to f(\theta_z) \to f(x)$

$E\,\hat{f}(x) - f(x) = f(x) - \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x) \underbrace{\int z^2 K(z)\,dz}_{<M}$

K st borne d'ordre 2 2

$\Rightarrow \boxed{E\,\hat{f}(x) - f(x) = f(x) - \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x) + o(h^2)}$

2) $Var\,\hat{f}(x) = Var\left(\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)\right) = \frac{1}{n^2h^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} K_i\right)$

$= \frac{1}{n^2h^2}\left[\sum_{i=1}^{n} Var(K_i) - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} cov(K_i, K_j)\right]$ 0,1

$$\mathrm{Var}(K_i) = \mathbb{E}(K_i^2) - \mathbb{E}^2(K_i)$$

$$\mathbb{E}(K_i^2) = \int_{\mathbb{R}} K^2\left(\frac{x-u}{h}\right) f(u)\, du$$

$$z = \frac{x-u}{h} \Rightarrow du = h\, dz$$

$$\mathbb{E}(K_i^2) = \int_{\mathbb{R}} K^2(z) f(x-hz)\, h\, dz.$$

$\cancel{\left(\frac{1}{n^2h^2}\sum\right)}$ f st cont $\Rightarrow f(x-hz) \to f(x)$

$$\mathbb{E}(K_i^2) = \int_{\mathbb{R}} K^2(z) f(x)\, h\, dz = h f(x) \int K^2(z)\, dz.$$

$$\mathbb{E}(K_i) = \int_{\mathbb{R}} K(z) f(x)\, h\, dz = h.f(x)$$

donc.

$$\cancel{\mathrm{Var}(K_i) \geq} \frac{1}{n^2h^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(K_i) =$$

$$\frac{1}{n^2h^2} \sum_{i=1}^{n} \left(h f(x) \int K^2(z)\, dz - h^2 f^2(x)\right) = \frac{1}{n^2h^2}\left(n\, h f(x) \int K^2(z)\, dz - h^2 f^2(x)\right)$$

(1)

$$\cancel{\leq \frac{c}{nh} - \frac{c'}{nh} \leq \frac{c''}{nh} = \frac{\square}{nh} f(x) - f^2(x)}$$

$$\Rightarrow \cancel{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(K_i) = o\left(\frac{1}{nh}\right)} + o\left(\frac{1}{nh}\right)$$

$$= \frac{1}{nh} f(x) \int K^2(z)\, dz - \frac{1}{n} f^2(x) + o\left(\frac{1}{nh}\right)$$

(3)

$$-\frac{2}{n^2h^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} \operatorname{cov}(\Delta_i;\Delta_j) = \frac{-2}{n^2h^2} S_n^{*2} \quad 1$$

or $S_n^{*2} = o(nh)$

$$\Rightarrow \frac{-2}{n^2h^2}\sum\sum \operatorname{cov}(\Delta_i;\Delta_j) \leq \frac{-2}{n^2h^2} C.\, nh$$

$$\leq \frac{C'}{nh} = o(nh).$$

donc :

$$\boxed{\operatorname{Var}(\hat{f}(x)) = \frac{1}{nh} f(x)\int K^2(z)\,dz - \frac{\tilde{f}(x)}{n} + o\left(\frac{1}{nh}\right)} \quad 01$$

$$E.Q.M.\ \hat{f}(x) = \left(f(x) - \frac{h^2}{2} f^{(2)}(x)\int z^2 K(z)\,dz\right)^2 + oh^4$$

$$+ \frac{1}{nh} f(x)\int K^2(z)\,dz - \frac{f^2(x)}{n} + o\left(\frac{1}{nh}\right)$$

$$\boxed{E.Q.M.\ \hat{f}(x) \leq C.\, h^4 + \frac{C'}{nh}} \quad 1$$

x_i	z_i	$F_0(z_i)$	$F(x_i)$	$d^+ = \lvert F(x_i) - F_0(x_i)\rvert$	$d^- = \lvert F(x_{i-1}) - F_0(x_i)\rvert$
0,09	-1,47	0,0708	0,1	0,0292	0,0708
0,13	-0,96	0,1685	0,2	0,0315	0,0685
0,14	-0,83	0,2033	0,3	0,0967	0,0033
0,16	-0,57	0,2843	0,4	0,1157	0,0157
0,17	-0,44	0,3300	0,5	0,1700	0,07
0,19	-0,19	0,4247	0,6	$\boxed{0,1753}$	0,0753
0,25	0,57	0,7157	0,7	0,0157	0,1157
0,28	0,96	0,8315	0,8	0,0315	0,1315
0,30	1,21	0,8869	0,9	0,0131	0,0869
0,34	1,73	0,9582	1	0,0418	0,0582
	0,5	1	0,1	1	1

0,1

$d^+ = 0,1753$

$d^- = 0,1315$ $\Rightarrow$ $\boxed{d_{ob} = 0,1753}$

0,1

$d_\alpha = 0,3026$

0,5

$\bar{x} = 0,205$ 0,5

$\mathrm{Var}\,x = 0,006145$ 0,5

$\sigma_x = 0,078$ 0,5

$d_{ob} < d_\alpha$

On rejette H_0

1

0,5,0/0,0
0,4797
0,0753