Université Mustapha STAMBOULI Mascara
Faculté des Sciences Exacts
Département de Mathématiques

3ème année L.M.D-Math
Module : Mesure Et Intégration
Année Universitaire : 2017/2018

Examen du 25 janvier 2018, Durée : 1 h 30 m

Exercice 1 *(Algèbre)(06 pts)*
Soit E un ensemble et $\xi \subset P(E)$;

1. *Montrer que ξ est une Algèbre ssi ξ vérifie les deux propriétés suivantes :*
   (a) $E \in \xi$
   (b) $A, B \in \xi \Rightarrow A \setminus B \in \xi$
2. *Soit $(\xi_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbre (sur E). Montrer que :*

$$\bigcap_{i \in I} \xi_i = \{A \in P(E); A \in \xi_i, \textit{ pour tout } i \in I\} \textit{ est encore une algèbre.}$$

Exercice 2 *(Mesure complète)(08 pts)*
Soit (E, T, m) un espace mesuré. Une partie B est dite ***Négligeable****, si elle est incluse dans un élément de T de mesure nulle.*
On note N_m l'ensemble des parties négligeables.
On pose $\overline{T} = \{A \cup N; A \in T, N \in N_m\}$.

1. *Montrer que $\overline{T}$ est une tribu et que $T \cup N_m \subset \overline{T}$*
2. *Soit $A_1, A_2 \in T$ et $N_1, N_2 \in N_m$ tels que $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$. Montrer que $m(A_1) = m(A_2)$.*
3. *Pour $B \in \overline{T}$, soit $A \in T$ et $N \in N_m$ tel que $B = A \cup N$; on pose $\overline{m}(B) = m(A)$.*
   (a) *Montrer que $\overline{m}$ set une mesure sur $\overline{T}$ et $\overline{m} = m$.*

Exercice 3 *(06 pts)*
Soit (X, T) un espace mesurable et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$, pour $a > 0$, on définit la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : X & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & f_a(x) = \begin{cases} a & , \ si\ f(x) > a \\ f(x) & , \ si\ |f(x)| \leq a \\ -a & , \ si\ f(x) < -a \end{cases} \end{array}$$

1. *Monter que f_a est mesurable.*

Proverbe : Le mérite ne saurait se mesurer avec le succès.