Université de Mascara
Faculté des Sciences Exactes
Département de mathématiques
Module : *Equations de la physique mathématique*

Travaux dirigés
L.M.D Année 2016-2017
Enseignant : Dr. Bahlil Mounir

TD n° 02

Exercice 1:
Déterminer pour quels points (x, y) du plan, chacune des EDP linéaires d'ordre 2 suivantes est
$a)$ hyperbolique, $b)$ parabolique et $c)$ elliptique.

$$i)\ x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0;\ \ ii)\ x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (x+3)\frac{\partial u}{\partial y} = u;$$

$$iii)\ e^x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5y\frac{\partial u}{\partial x} = e^x;\ \ i\nu)\ x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$\nu)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - (x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = \sin(x).$$

Exercice 2:
Pour chacune des EDP linéaires d'ordre 2 suivantes
$a)$ déterminer les points du plan x, y où ces équationts sont hyperboliques ;
$b)$ déterminer les coordonnées caractéristiques de ces équations sur le domaine où celles-ci sont hyperboliques ;
$c)$ effectuer le changement de coordonnées pour celles trouvées en $b)$ de façon à obtenir léquation canonique correspondante ;

$$i)\ 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4y\frac{\partial u}{\partial x} - 3u = 0;\ \ ii)\ x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 6y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Exercice 3:
Pour L'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$a)$ déterminer les points du plan x, y où cette équation est parabolique ;
$b)$ déterminer les coordonnées caractéristiques de cette équation sur le domaine où celles-ci est parabolique ;
$c)$ effectuer le changement de coordonnées pour les coordonnées trouvées en $b)$ de façon à obtenir léquation canonique correspondante.

Exercice 4:
Pour l'équation ci-dessous, déterminer le type de l'équation, les équations caractéristiqyes, les coordonnées caractéristiques et ensuite réduire l'équation sous sa forme canonique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 3u = 0.$$

Exercice 5:
Soit L'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$a)$ déterminer si l'équation est hyperbolique, parabolique ou elliptique.
$b)$ déterminer les équations caractéristiques de cette équation.
$c)$ Transformer cette équation dans sa forme canonique.