Université de Mascara
Faculté des Sciences Exactes
Département de mathématiques
Module : Analyse1

Travaux dirigés
L.M.D Année 2016-2017
Enseignant : Dr. Bahlil Mounir

TD n° 03

Exercice 1

Montrer, en utilisant la définition de la limite des fonctions numériques, que :
1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)=1$, 2) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, 3) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+x+1}{1-x}=1$, 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}=0$, 5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x^2+x+1}=0$,
6) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2+x+1)=+\infty$.

Exercice 2

Soient f et g deux fonctions définies sur $]a,b[\subset \mathbb{R}$ (a et b peuvent être infinis) et x_0 un point adhérent à l'intervalle $]a,b[$.
Montrer que si g est bornée et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x).f(x)=0$.
Application : Calculer
a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\tan x.\cos(1+\frac{1}{x^2})^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 3

Calculer le plus rapidement possible la limite de $f(x)$ lorsque $x\longrightarrow +\infty$
1) $f(x)=\frac{\cos x^2+\ln 2x-x^3}{3x^3+\sin x-x}$, 2) $f(x)=\frac{\ln(5x+1)-\sin x^2+e^x}{e^{2x}+e^{\sin x}-\ln x}$, 3) $f(x)=\frac{[x]}{x}$,
4) $f(x)=x\ln(1+x)-x\ln x$, 5) $f(x)=[1+\frac{a}{x}]^x$, $a>0$, 6) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}-x$.

Exercice 4

Etudier la limite éventuelle des expressions suivantes :
1) $f(x)=3x+\sqrt{9x^2-7x+2}$; $x\longrightarrow -\infty$, 2) $f(x)=[\frac{\ln x}{\ln(x+1)}]^{x\ln(x+1)}$; $x\longrightarrow +\infty$,
3) $f(x)=x^{\ln(x+1);\ \ x\longrightarrow 0^+}$.

Exercice 5

la fonction f est définie sur $I=\mathbb{R}$.
1) On définit f par $f(x)=x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?
2) On définit f par $f(x)=\frac{\sin(\sqrt{x^2})}{x}$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=1$. L'application f a-t-elle une limite en 0 ? une limite à droite en 0 ? une limite à gauche en 0 ?
3) Pour $x\in\mathbb{R}$, on note $E(x)=\sup\{n\in\mathbb{Z};\ \ n\leq x\}$. On définit f par $f(x)=x-\sqrt{x-E(x)}$ pour tout $x\neq 0$, soit $n\in\mathbb{Z}$, L'application f a-t-elle une limite en n ? une limite à droite en n ? une limite à gauche en n ?

Exercice 6

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $T>0$ t.q. $f(x+T)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ (on dit alors que f est périodique de période T).
On suppose de plus que f admet une limite finie, notée l, en $+\infty$. Montrer que f est une fonction constante.

Exercice 7

1) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?
2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
démontrer que la fonction réelle f, n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.

Exercice 8

Etudier la continuité des trois applications suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
a) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } x < 0 \\ 1 & , \quad \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$,
c) $h(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & , \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$, d) $k(x) = \begin{cases} |\frac{\sin x}{x}| & , \quad \text{si } x \neq 0 \\ 1 & , \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Exercice 9

Etudier la continuité uniforme, sur les intervalles correspondants, des fonctions définie par :
1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty[$.
2) $f(x) = x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in]0, 1]$.
4) $f(x) = x^2$, $x \in [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.
5) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \in]0, 1]$.
6) $f(x) = \ln x$, $x \in]0, +\infty[$.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue (c'est-à-dire continue en tout points de $\mathbb{R}$). on suppose que $f(x) \in \{0, 1\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que f est constante. [Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires]

Exercice 11

Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}, \qquad u_0 = a \geq 0.$$