Chapitre IV Calcul des pertes de charge dans les conduites

TD N°4

Exercice 1

Pour que les conditions soient celles d'un écoulement laminaire, quelle doit être la taille d'un tuyau, s'il doit transporter du fuel-oil (υ =6.0810^{-6}m^2/s) à rythme de 5.67 10^{-3} m^3/s ?

Exercice 2

De l'eau de viscosité dynamique μ=10 $^{-3}$kg/ms s'écoule avec une vitesse de 10cm/s dans l'espace annulaire de deux tubes circulaires concentriques. Le diamètre intérieur du tube externe est D=5cmet celui du tube interne est d=3cm

1-Déterminer le régime de l'écoulement.

2-Calculer la perte de charge pour 1m de longueur de la conduite.

Exercice 3

On considère une conduite cylindrique de diamètre D=1m et de rugosité k=3.71mm, qui véhicule de l'eau avec une vitesse de 2.51m/s.

1-Déterminer le régime de l'écoulement.

2-Calculer la perte de charge pour 1m de longueur de la conduite.

Exercice 4

Une conduite de forme hexagonale de côté a=1m et ayant une rugosité de 2mm véhicule un débit de 5.2m^3/s d'eau.

1-Calculer la perte de charge pour une longueur unitaire.

2-Comparer avec une conduite circulaire de même section.

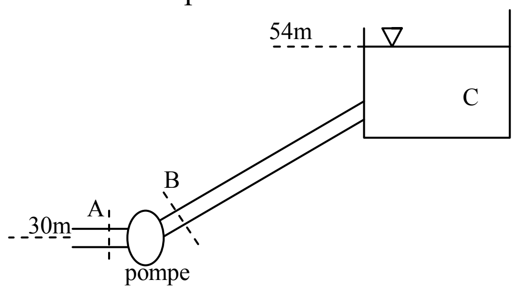
Exercice 5

Pour véhiculer un débit de 1.178m^3/s d'eau nous disposons de trois conduites en acier de rugosité k=0.1mm. Ces conduites sont de formes différentes mais de sections égales et qui sont:

a- Un triangle équilatérale de côté a=1.44672m
b- Un cercle de diamètre D=1m.
c- Un rectangle de longueur L=1m et de largeur l=0;7854m.

Quelle est la conduite qui offre la perte de charge minimale pour une longueur unitaire de la conduite?

Exercice 6 On pompe de l'huile de densité d=0.861 jusqu'au réservoir C par 1800m de conduite de 40cm de diamètre et 0.18cm de rugosité (figure).La pression effective en A est 1400Pa quand le débit est de 197 l/s.



1er cas : on considère que l'huile est un fluide parfait.

2ème cas : on considère que l'hile est un fluide réel de viscosité μ=6.316 $\times$10^{-3}kg/ms

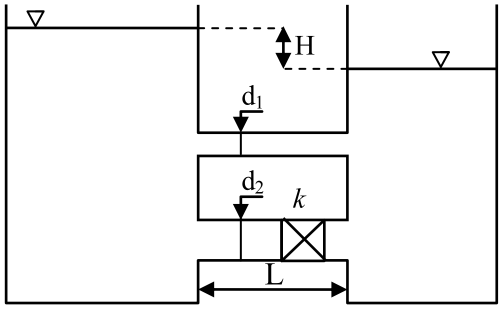
a- Quelle est la puissance fournie par la pompe dans les deux cas?

b- Quelle doit être la pression effective en B dans les deux cas?

Chapitre IV Calcul des pertes de charge dans les conduites

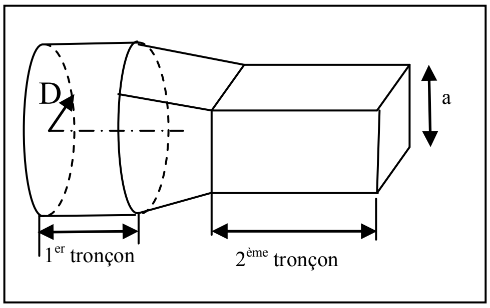
TD N°4 (suite)

Exercice 7 : Un système de deux conduites en parallèle de diamètre d_1=25mm et d_2=30mm et de longueur L=20m relie deux réservoirs dont les surfaces libres du liquide sont maintenues constante (figure). La dénivellation H=1.5m. Les coefficients de perte de charge linéaire sont λ_1=0.045, λ_2=0.035.



- Si les débits dans les deux conduites sont égaux Q_1=Q_2, déterminer le débit total Q= Q_1+Q_2 .
- Déterminer le coefficient de perte singulière *k* du robinet. (Négliger les autres pertes singulières).

Exercice 8 : L'eau s'écoule dans une conduite avec un débit volumique de 16 l/s. Cette conduite est constituée de deux tronçons successifs (جزءين متتاليين). Le premier tronçon est de section circulaire de diamètre D=20cm. Le deuxième tronçon est de section carrée de côté (ضلع المربع) **a** (voir figure).



1- Calculer la perte de charge linéaire par **unité de longueur** dans le premier tronçon. On donne la viscosité cinématique de l'eau $\upsilon = 10^{-6} m^2/s$ et la rugosité de la conduite $\varepsilon = 0.15mm$

2- Si on considère que la perte de charge linéaire par unité de longueur et le coefficient de perte de charge linéaire sont les mêmes dans les deux tronçons, quel est le côté **a** de la section carrée ?

3- Calculer la vitesse d'écoulement de l'eau dans le deuxième tronçon.

Exercice 9 : Dans une conduite circulaire de diamètre D = 10cm, dont la longueur est L=1km et dont la rugosité est k=3mm ; circule de l'eau de viscosité cinématique $\nu=10^{-6}m^2/s$.

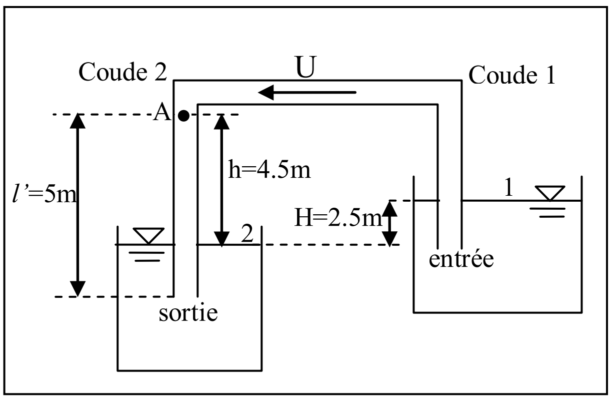
1-Montrez que la perte de charge linéaire ΔH se produisant dans cette conduite peut être donnée par l'expression suivante : $\Delta H = \frac{8L}{g\pi^2 D^5} Q^2 \lambda$, λ étant le coefficient de perte de charge

2-Calculer la perte de charge dans cette conduite pour un débit Q = 1.5708 10^{-4} m^3/s.

3-Que devient cette perte de charge quand le débit devient Q = 7.854 10^{-3} m^3/s.

Exercice 10 :

Une conduite de longueur totale (de l'entrée à la sortie) L=25m et de diamètre d=0.4m permet l'écoulement de l'eau d'un réservoir à l'autre avec une vitesse U (voir figure).



Le coefficient de perte de charge linéaire est λ=0.02.
Les coefficients de pertes de charge singulières sont :
- à l'entrée de la conduite k_e=0.5
- à la sortie de la conduite k_s=1
- à chacun des deux coudes k_c=0.4
- Calculer le débit volumique d'eau dans la conduite.
- Si un point A se trouve juste après le coude 2 dans la conduite, calculer la pression effective en A. (La viscosité cinématique de l'eau $\nu=10^6 m^2/s$).

①

TD4

Ecoulement des fluides réels

EX01 : La taille du tuyau pour un régime Lam.

Le débit ds un tuyau de diamètre d est:

$$Q = U.\frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow U = \frac{4Q}{\pi D^2}$$

• Ds un régime laminaire $Re < 2300$

$$Re = \frac{U.D_H}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D^2}.\frac{D}{\nu} < 2300$$

donc: $\boxed{D > \frac{4Q}{\pi \nu .2300}} = \frac{4.\ 5,67.10^{-3}}{\pi.\ 6,08.10^{-3}.\ 2300}$

$\boxed{D > 0,5\,m}$

EX02

• Calculer la perte de charge pour 1m de longueur de la conduite : ΔH

$$\boxed{\Delta H = \lambda \frac{U^2 L}{2g\ D_H}}$$

• $D_H = 4\left[\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\right] / \pi(D+d) = D - d = 0,05 - 0,03 = \boxed{0,02\,m = D_H}$

λ dépend du régime de l'écoulement il faut calculer Re:

$$Re = \frac{U.D_H}{\nu} = \rho\frac{U D_H}{\mu}$$

AN:

$$Re = \frac{10^3 . 10.10^{-2} . 2.10^{-2}}{10^{-3}} = 2.10^3 = 2000 < 2300$$

donc le régime est laminaire

$$\boxed{\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{2\times10^3} = 32.10^{-3}}$$

AN:

$$\Delta H = 32.10^{-3} . \frac{(10.10^{-2})^2}{2.9,81} . \frac{1}{2.10^{-2}} \boxed{= 0,815\,mm = \Delta H}$$

EX03

Calculer la perte de charge pour 1m de longueur:

$$\text{On a: } \Delta H = \lambda . \frac{U^2}{2g} . \frac{L}{D_H}$$

$\lambda = ?$ dépend du régime de l'écoulement.

- Déterminer le régime d'écoulement.
- Calculer Re:

$$Re = \frac{U.D_H}{\nu} = \frac{2,51 . 1}{10^{-6}}$$

$Re = 2,51.10^6 > 2300$ le régime est turbulent

- Calculer la perte de charge pour 1m

On calcule λ de la formule de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{k}{3,71D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$$

C'est une Eq non linéaire pour la résoudre on emploie la méthode du point fixe: on pose $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = x$ on aura:

$$x = -2\log_{10}\left(\frac{k}{3,71D} + \frac{2,51}{Re}x\right)$$

$$x = -2\log_{10}\left(\frac{3,71.10^{-3}}{3,71\times1} + \frac{2,51}{2,51.10^6}x\right)$$

$$x = -2\log_{10} 10^{-3}(1 + 10^{-3}x)$$

$$= 6 - 2\log_{10}(1 + 10^{-3}x).$$

On donne une valeur initiale pour $x^0 = 0$ et on calcule x^1

$x^1 = 6 - 2\log_{10} 1 = 6$

$x^2 = 6 - 2\log_{10}(1 + 6.10^{-3}) = 5,994804$

$x^3 = 6 - 2\log_{10}(1 + 10^{-3}.5,994804) = 5,9948085$

on pose $\boxed{x = 5,9948085}$ donc $\boxed{\lambda = \frac{1}{x^2} = 0,0278}$

et $\Delta H = 0,0278 . (2,51)^2 . \frac{1m}{\ldots} \simeq 0,0089\,m \boxed{\simeq 9\,mm}$

Ex04

$a = 1m$

$\varepsilon = 2mm = 2.10^{-3} m$

$Q = 5,2 \, m^3/s$

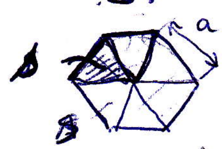
eau $\Rightarrow \nu = 10^{-6} \, m^2/s$

- Calculer la perte de charge pour une longueur unitaire d'une conduite à section hexagonale.

$$\Delta H = \lambda \frac{U^2}{2g} \cdot \frac{L}{D_H}$$

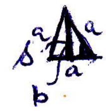
- calculer la vitesse de l'écoul^t : U :

$$Q = U.S \Rightarrow U = \frac{Q}{S}$$



- $S = 6 \times s$.

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} a \cdot a \sin 60$$



$$s = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} , \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = s$$

$$S_{\hexagon} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1^2 \boxed{\approx 2,59 m^2 \; S_{\hexagon}}$$

- $U = \frac{5,2}{2,59} \approx \boxed{2 \, m/s = U}$

- Calculer le diamètre hydraulique : $D_{H\hexagon}$

$$D_{H\hexagon} = 4 \cdot \frac{\text{Section mouillée}}{\text{périmètre mouillée}}$$

$$= \frac{4 \cdot S}{6 \cdot a} = \frac{4 \cdot 3\sqrt{3}}{6 \cdot 1} = \boxed{\sqrt{3} = D_{H\hexagon} = 1,732 \, m}$$

- Calculer λ : voir le régime de l'écoul^t :

$$Re = \frac{U \cdot D_H}{\nu} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{10^{-6}} = \boxed{3,464 \cdot 10^6 \; Re} > 2300$$

donc le régime de l'écoul^t est turbulent : pour calculer λ, on applique la formule de Colebrook :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3,71 D_H} + \frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} \right)$$

on pose $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = X \Rightarrow X = -2 \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3,71 \cdot D_H} + \frac{2,51}{Re} X \right)$

AN: $X = -2 \log \left(\frac{2.10^{-3}}{3,71 \cdot 1,732} + \frac{2,51}{3,464 \cdot 10^6} X \right)$

$x_0 = 0 ; x_1 = 7,0139 ; x_2 = 6,9998 ; x_3 = 6,9998$

on obtient $\boxed{\lambda = 2,0409 \cdot 10^{-2}}$ $\boxed{\lambda \approx 0,020}$

donc $\Delta H = \lambda \cdot \frac{U^2 \cdot L}{2 \cdot g D_H}$

AN: $\Delta H \approx 2,041 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{2^2}{2 \cdot 9,81} \cdot \frac{1}{1,732}$

$$\boxed{\Delta H = 2,4 \cdot 10^{-3} m = 2,4 \, mm}$$

$\Delta H_{\hexagon} = 2,37 \, mm$

- Calculer ΔH pour une conduite circulaire

$$\Delta H_o = \lambda_o \frac{U_o^2}{2g} \cdot \frac{L_o}{D_{Ho}}$$

- Calculer la vitesse d'écoul^t.

$U_o = \frac{Q}{S_o}$ / on a $S_o = S_{\hexagon} = 2,59 \, m^2$

donc : $\boxed{U_o = U_{\hexagon} = 2 m/s}$

- $D_{Ho} = D_o$ (ds un cylindre rempli de fluide $D_H = D$)

$$D_o = \sqrt{\frac{4 S_o}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,59}{\pi}} = \boxed{1,816 \, m = D_o}$$

- λ_o dépend du régime d'écoulement, on calcule Re_o

- $Re_o = \frac{U \cdot D_o}{\nu} = \frac{2 \cdot 1,816}{10^{-6}} = 3,632 \cdot 10^6 > 2300$

$Re_o > 2300 \Rightarrow$ régime turbulent, donc de la même façon on calcule λ_o en appliquant la formule de Colebrook :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_o}} = -2 \log \left(\frac{k}{3,71 D_{Ho}} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda_o}} \right)$$

on trouve : $\lambda_o \approx 2,01 \cdot 10^{-2}$

$$\Delta H_o = 2,01 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{2^2}{2 \cdot 9,81} \cdot \frac{1}{1,816}$$

$$\boxed{\Delta H_o \approx 2,26 m} < \Delta H_{\hexagon}$$

EXO5

$1{,}178\ m^3/s = Q$.

$\rho = 10^3\ kg/m^3$

$k = 0{,}1 \cdot 10^{-3}\ m$.

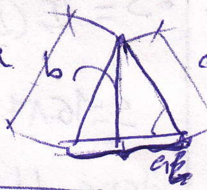
• La section qui offre la perte de charge minimale ?

$$\Delta H_l = \lambda \cdot \frac{U^2}{2g} \cdot \frac{L}{D_H}$$

– ① ~~Section~~ d'un triangle équilatéral :

$a = 1{,}34672\ m$

• $S_\Delta = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right) \cdot b = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right) \cdot a \sin 60\ a$



$S_\Delta = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (1{,}34672)^2 = \boxed{0{,}78533\ m^2 = S_\Delta}$

donc : $U = \frac{Q}{S} = \frac{1{,}178}{0{,}78533} = \boxed{1{,}5\ m/s = U_\Delta}$

• $D_{H_\Delta} = 4\ \frac{S_\Delta}{Peri} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1{,}34672$

$\boxed{D_{H_\Delta} = 0{,}77753\ m}$

• $\lambda = ?$ pour calculer λ, il faut déterminer la nature du régime d'écoulement, donc, calculer Re.

• $Re = \frac{U \cdot D_H}{\nu} = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}77753}{10^{-6}} = \boxed{1{,}1663 \cdot 10^6 = Re} > 2300$

donc l'écoulement est turbulent, On calcule λ de la formule de Colebrook : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{k}{3{,}71 D_H} + \frac{2{,}51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$

on pose $x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ donc :

$$x = -2\log\left(\frac{0{,}1 \cdot 10^{-3}}{3{,}71 \cdot 0{,}77753} + \frac{2{,}51}{1{,}1663 \cdot 10^6} \cdot x\right)$$

$$x = 8 - 2\log(0{,}3466 + 0{,}02152x)$$

on pose $x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = 8{,}92018$; $x_2 = 8{,}53751$;

$x_3 = 8{,}55089$; $x_4 = 8{,}550425$; $x_5 = 8{,}55044$

on prend donc $x = 8{,}5504 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{x^2} = \boxed{0{,}01367 = \lambda_\Delta}$

$$\Delta H_\Delta = \lambda_\Delta \cdot \frac{U_\Delta^2}{2g} \cdot \frac{L}{D_{H_\Delta}}$$

$$= 13{,}67 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{(1{,}5)^2}{2 \cdot 9{,}81} \cdot \frac{1\ m}{0{,}77753}$$

$\boxed{\Delta H_\Delta = 2{,}016\ mm}$

• ② . Cercle :

$D = 1\ m$.

$S_0 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi}{4} = \boxed{0{,}7854\ m^2 = S_0}$

donc : $U = \frac{Q}{S_0} = \frac{1{,}178}{0{,}7854} \simeq \boxed{1{,}5\ m/s = U_0}$

• $\lambda = ?$

• $Re = \frac{U \cdot D}{\nu} = \frac{1{,}5 \cdot 1}{10^{-6}} = \boxed{1{,}5 \cdot 10^6 = Re} > 2300$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{0{,}1 \cdot 10^{-3}}{3{,}71 \cdot 1} + \frac{2{,}51}{1{,}5 \cdot 10^6 \sqrt{\lambda}}\right)$$

$$x = -2\log\left(0{,}2695 \cdot 10^{-4} + 0{,}01673 \cdot 10^{-4}\, x\right)$$

$$x = 8 - 2\log(0{,}2695 + 0{,}01673x)$$

$x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = 9{,}13888$; $x_2 = 8{,}74850$

$x_3 = 8{,}76203$; $x_4 = 8{,}761566$; $x_5 = 8{,}76158$

donc $\lambda = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{8{,}76158^2} = \boxed{0{,}01302 = \lambda_0}$

$\Delta H_0 = 0{,}01302 \cdot \frac{1{,}5^2}{2 \cdot 9{,}81} \cdot \frac{1}{1} \simeq \boxed{1{,}49\ mm = \Delta H_0}$

③ Rectangle : $L \times l =$

• $S_\square = L \times l = 1 \times 0{,}7854 = \boxed{0{,}7854\ m^2 = S_\square}$

• $U_\square = \frac{Q}{S} = \frac{1{,}178}{0{,}7854} = \boxed{1{,}5\ m/s = U_\square}$

• $D_H = 4\ \frac{S}{P} = 4 \cdot \frac{L \times l}{2(L+l)} = 2 \cdot \frac{L \times l}{(L+l)} = 2 \cdot \frac{0{,}7854}{1{,}7854}$

$\boxed{D_{H_\square} = 0{,}8798\ m}$

• $\lambda = ?$

• $Re = \frac{U \cdot D_H}{\nu} = \frac{1{,}5 \cdot 0{,}8798}{10^{-6}} = \boxed{1{,}32 \cdot 10^6 = Re} > 2300$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{10^{-4}}{3{,}71 \cdot 0{,}8798} + \frac{2{,}51}{1{,}32 \cdot 10^6 \sqrt{\lambda}}\right)$$

$$x = 8 - 2\log(0,3063 + 0,0190\,x)$$

$x_0 = 0$; $x_1 = 9,0277$; $x_2 = 8,64146$; $x_3 = 8,6549$.
$x_4 = 8,65443$; $x_5 = 8,65443$.

$$\lambda = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{8,65443^2} = \boxed{0,01335 = \lambda_{\square}}$$

$$\Delta H_{\square} = 0,01335 \cdot \frac{1,5^2}{2 \cdot 9,81} \cdot \frac{1}{0,8798}$$

$$\Delta H_{\square} = 1,740 \cdot 10^{-3}\,m = \boxed{1,74\,mm = \Delta H_{\square}}$$

	Δ	O	$\square$
S(m²)	0,7853	0,7853	0,7853
U(m/s)	1,5	1,5	1,5
D_H(m)	0,77	1	0,88
Re	$1,16.10^6$	$1,5.10^6$	$1,32.10^6$
λ ($\times 10^{-2}$)	1,36	1,30	1,33
ΔH (mm)	2,016	1,49	1,74
Perimètre	4,040	3,1416	3,5708

• Ainsi, la section circulaire est celle qui offre la perte de charge minimale.

2 La conduite la plus économique.

EXO6

1er cas, l'huile est un fluide parfait :

donc : ($\Delta H = 0$.)
$d_H = 0,861 \Rightarrow \rho_H = d_H \cdot \rho_{H_2O} = 861\ kg/m^3$
Eq de Bernoulli entre A et C s'écrit :

(a)
$$\frac{U_A^2}{2} + \frac{P_A}{\rho} + g z_A = \frac{U_C^2}{2} + \frac{P_C}{\rho} + g z_C + w'$$

$P_c = P_{atm}$.

$U_c = 0$

$z_c = 54\,m$

$z_A = 30\,m$.

$$U_A = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \times 197.10^{-3}}{\pi (0,4)^2} = \boxed{1,57\,m/s = U_A}$$

$w' = -w_p$ (travail de la pompe).

$$w_p = (z_c - z_A)g - \frac{P_{Aeff}}{\rho} - \frac{U_A^2}{2}$$

$$= (54 - 30)\,9,81 - \frac{1400}{861} - \frac{1,57^2}{2}$$

$w_p = 235,08\ J/kg$.
$= 233,$

La puissance de la pompe P :

$$P = w_p \cdot \dot{m} = \rho \cdot Q \cdot w_p$$

$$= 861 \cdot 197.10^{-3} \cdot 232,58$$

$$\boxed{P = 39449,52\ Watt}$$

39 525,84

(b) La pression effective au pt B :

Eq de Bernoulli entre A et B :

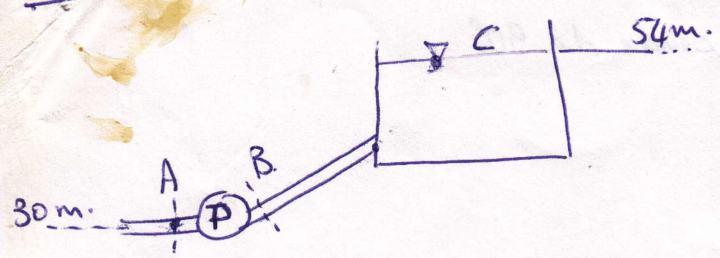
$$\cancel{\frac{U_A^2}{2}} + \frac{P_A}{\rho} + \cancel{g z_A} = \cancel{\frac{U_B^2}{2}} + \frac{P_B}{\rho} + \cancel{g z_B} - w_p$$

$$P_{B_{abs}} = P_{A_{abs}} + \rho w_p$$

donc $P_{Beff} = P_{Aeff} + \rho w_p = 1400 + 861 \times 232,58$

$\boxed{P_{Beff} \simeq 2,02\ bar}$

Exo 6



$d_{huile} = 0,861 \Rightarrow \rho = d.\rho_{eau} = 0,861.10^3\ kg/m^3$.

$\mu = 6,316.10^{-3}\ kg/m.s$

$L = 1800\ m$.

$D = 0,40\ m$.

$\epsilon = 0,18.10^{-2}\ m$.

$P_{Aeff} = 1400\ Pa$.

$Q = 197\ l/s = 197.10^{-3}\ m^3/s$.

2ème cas : L'huile est un fluide réel

a) calculer la perte de charge ΔH_l :

$$\Delta H_l = \lambda \frac{U^2}{2g} \cdot \frac{L}{D_H}$$

- $U = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 197.10^{-3}}{\pi (0,4)^2} = \boxed{1,57\ m/s = U}$

- $\lambda = ?$ Pour déterminer λ, il faut voir le régime de l'écoulement, donc calculer Re :

- $Re = \rho \frac{U.D_H}{\mu} = 861 \cdot \frac{1,57 \cdot 0,4}{6,316.10^{-3}}$

$\boxed{Re = 85,61.10^3} > 2300$ donc l'écoul. est turbulent, On détermine le coefficient de perte de charge linéaire de la formule de Colebrook :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\epsilon}{3,71 D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$$

posons : $x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ donc :

$$x = -2\log\left(\frac{0,18.10^{-2}}{3,71 \cdot 0,4} + \frac{2,51}{85,61.10^3} x\right)$$

$$x = -2\log\left(1,213.10^{-3} + 0,029.10^{-3} x\right)$$

$$x = 6 - 2\log(1,213 + 0,029x)$$

on pose $x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = 5,8322$; $x_2 = 5,7177$

$x_3 = 5,7198$, $x_4 = 5,7198$

donc $x = 5,7198 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{x^2}$

$$\boxed{\lambda = 0,030}$$

Ainsi $\Delta H_l = 0,03 \cdot \frac{(1,57)^2}{2 \cdot 9,81} \cdot \frac{1800}{0,4}$

$$\boxed{\Delta H_l = 16,96\ m.}$$

b) La puissance fournie par la pompe : $\mathcal{P}$.

Appliquer l'éq de Bernoulli entre A et C.

$$\frac{U_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + z_A + h_p = \frac{U_C^2}{2g} + \frac{P_C}{\rho g} + z_C + \Delta H_{L\,A-C}$$

- $P_C = P_{atm}$
- $U_C \simeq 0$
- $z_C = 54\ m$
- $z_A = 30\ m$

on trouve :

$$\frac{U_A^2}{2g} + \frac{P_A - P_{atm}}{\rho g} + z_A = z_C - h_p + \Delta H_{A-C}$$

donc : $h_p = (z_C - z_A) - \frac{P_{Aeff}}{\rho g} - \frac{U_A^2}{2g} + \Delta H_{A-C}$

$$h_p = (54 - 30) - \frac{1400}{861 \cdot 9,81} - \frac{(1,57)^2}{2} + 16,96$$

$$\boxed{h_p = 40,89\ m}$$

La puissance de la pompe est :

$\mathcal{P} = g h_p \cdot \dot{m} = \rho . Q . h_p . g$

$\mathcal{P} = (9,81 \cdot 40,89 \cdot 197.10^{-3} \cdot 398,96)$ Watt

$$\boxed{\mathcal{P} = 67670,398\ Watt}$$

c) La pression effective au point B.

C] La pression effective au point B :

Appliquer l'éq. de Bernoulli entre A et B, (ou bien entre B et C,) on trouve :

$$\frac{U_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + Z_A + h_p = \frac{U_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g} + Z_B$$

$U_A = U_B$ (m. conduite, m. débit).

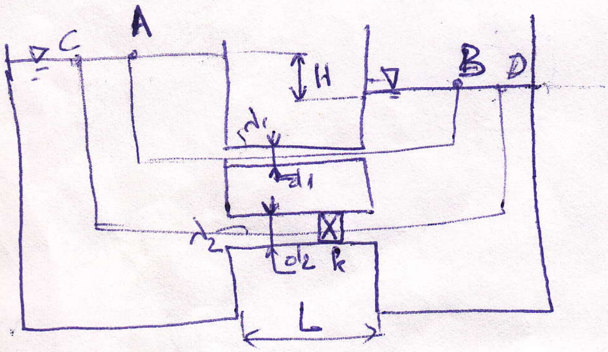
$Z_A = Z_B$

donc $P_{B_{abs}} - P_{A_{abs}} = \rho \cdot g h_p$

$P_{B_{eff}} = P_{A_{eff}} + \rho g h_p$

$$\boxed{P_{B_{eff}} = 344904{,}56\ Pa \simeq 3{,}45\ bar}$$

EXO 7



$d_1 = 25\ mm = 25 \cdot 10^{-3}\ m.$

$d_2 = 30\ mm = 30 \cdot 10^{-3}\ m.$

$L = 20\ m$

$H = 1{,}5\ m.$

$\lambda_1 = 0{,}045$

$\lambda_2 = 0{,}035$

$Q_1 = Q_2$

- Déterminer le débit total Q :

$Q = Q_1 + Q_2 = 2Q_1 = 2Q_2$

• $Q_1 = U_1 \cdot \frac{\pi d_1^2}{4}$

$U_1 = ?$

Appliquer l'éq. de Bernoulli entre A et B (la ligne de courant qui passe par la 1ère conduite) :

$$\frac{U_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + Z_A = \frac{U_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g} + Z_B + \Delta H_{A-B}$$

Patm

$U_A = U_B = 0$ (grand réservoir) vitesse de la surface libre

$P_A = P_B = P_{atm}$

$\Delta H_{A-B} = \lambda_1 \cdot \frac{U_1^2}{2g} \frac{L}{d_1}$

$Z_A - Z_B = H$

$\boxed{\Delta H_{A-B} = H}$

$$\lambda_1 \cdot \frac{U_1^2}{2g} \frac{L}{d_1} = Z_A - Z_B = H$$

donc : $U_1 = \sqrt{\frac{2g \cdot d_1\, H}{\lambda_1 \cdot L}}$

A.N : $U_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}5}{0{,}045 \cdot 20}}$

$$\boxed{U_1 = 0{,}904\ m/s}$$

donc le débit $Q_1 = 0{,}904 \cdot \frac{\pi \cdot (0{,}025)^2}{4}$

$Q_1 = 0{,}44 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$

et $\boxed{Q = 2 \times Q_1 = 0{,}88 \cdot 10^{-3}\ m^3/s}$

- Déterminer le coefficient de perte de charge singulière k du robinet.

Appliquer l'éq. de Bernoulli entre C et D appartenant à la ligne de courant qui passe par la 2ème conduite :

$$\frac{U_C^2}{2g} + \frac{P_C}{\rho g} + Z_C = \frac{U_D^2}{2g} + \frac{P_D}{\rho g} + Z_D + \Delta H_{l_{CD}} + \Delta H_s$$

Patm

$U_C = U_D = 0$

$P_C = P_D = P_{atm}$.

$Z_C - Z_D = H$

$\Delta H_{l_{CD}} = \lambda_2 \cdot \frac{U_2^2}{2g} \cdot \frac{L}{d_2}$

$\Delta H_S = k \cdot \frac{U_2^2}{2g}$

donc on aura :

$$H = \left(\lambda_2 \frac{L}{2g \cdot d_2} + \frac{k}{2g}\right) \cdot U_2^2$$ donc

$$\boxed{k = \frac{H\, 2g}{U_2^2} - \lambda_2 \cdot \frac{L}{d_2}}$$

• Calculer U_2 :

On a : $U_2 = \frac{4Q_2}{\pi d_2^2} = \frac{4Q_1}{\pi d_2^2} \cdot \left[(Q_1 = Q_2)\right]$

$$U_2 = \frac{4 \cdot 0,44 \cdot 10^{-3}}{\pi (30 \cdot 10^{-3})^2}$$

$U_2 = 0,622 \ m/s$

ainsi $k = \frac{2gH}{U_2^2} - \lambda_2 \frac{L}{d_2}$.

$$= \frac{2 \cdot 9,81 \cdot 1,5}{(0,622)^2} - 0,035 \cdot \frac{20}{0,03}$$

$$\boxed{k = 52,736}$$

EXO8 :

1- Calculer la perte de charge linéaire par unité de longueur dans le 1er tronçon :

$$\Delta H_0 = \lambda_0 \cdot \frac{V_0^2}{2g} \cdot \frac{L}{D_{H_0}}$$

- $V_0 = \frac{Q}{S_0} = \frac{4Q}{\pi D^2}$

$$= \frac{4 \cdot (16 \cdot 10^{-3}) \ m^3/s}{\pi (0,2 \ m)^2} = \boxed{0,509 \ m/s = V_0}$$

- $D_{H_0} = D_0 = 0,2 m$.

- λ_0 ? Pour calculer λ, il faut déterminer le régime d'écoulement donc calculer Re_0 :

$$Re_0 = \frac{V_0 D_H}{\nu} = \frac{0,509 \cdot 0,2}{10^{-6}}$$

$Re_0 = 1,018 \cdot 10^5 > 2300$ donc le régime d'écoulement est turbulent

On calcule λ à partir de la formule de Colebrook.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3,71 D_H} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$$

on pose $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = x \Rightarrow$.

$$x = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3,71 D_H} + \frac{2,51}{Re} x\right)$$

$$x = -2\log\left(\frac{0,15 \cdot 10^{-3}}{3,71 \cdot 0,2} + \frac{2,51}{1,018 \cdot 10^5} x\right)$$

$$x = -2\log(0,202 \cdot 10^{-3} + 0,02465 \cdot 10^{-3} x)$$

$$x = 6 - 2\log(0,202 + 0,02465 x).$$

on pose $x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = 7,3892$; $x_2 = 6,831$; $x_3 = 6,8629$; $x_4 = 6,8608$; $x_5 = 6,8609$.

donc $\boxed{\lambda = \frac{1}{x_5^2} = 0,021}$

Ainsi $\Delta H = 0,021 \cdot \frac{0,509^2}{2 \cdot 9,81} \cdot \frac{1}{0,2}$

$\Delta H_{L_0} \simeq 0,0014 m = 1,4 mm$.

2- Le côté de la section carrée : a.

On a :

$$\Delta H_{\square} / \text{unité de longueur} = \Delta H_0 / \text{unité de longueur}.$$

$$\Delta H_{\square} = \lambda_{\square} \frac{V_{\square}^2}{2g} \cdot \frac{1m}{D_{H_{\square}}}$$

$$V_{\square} = \frac{Q}{S_{\square}} = \frac{Q}{a^2}$$

$$D_H = 4 \cdot \frac{S_{\square}}{P_{eri}} = 4 \cdot \frac{a^2}{4a} = a$$

$\lambda_{\square} = \lambda_0$

$$\Delta H_{\square} = \lambda \left(\frac{Q}{a^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{1}{a} = \lambda \frac{Q^2}{2g} \cdot \frac{1}{a^5}$$

donc

$$\boxed{a = \left(\frac{\lambda}{\Delta H_{\square}} \cdot \frac{Q^2}{2 \cdot g} \cdot 1m\right)^{1/5}}$$

ou bien :

$$\lambda_{\square}\left(\frac{Q}{a^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{L}{a} = \lambda_o \left(\frac{Q \cdot 4}{\pi d^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{L}{d}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \left(\frac{\pi^2}{16}\right)^{1/5} \cdot d}$$

on trouve :

$$\boxed{a = 0{,}1815\,m}$$

3_ La vitesse d'écoulement dans le 2ème tronçon :

$$V_{\square} = \frac{Q}{a^2} = \frac{16 \cdot 10^{-3}}{(0{,}1815)^2} = \boxed{0{,}485\ m/s = V_{\square}}$$

EXO 9

1 Montrer que $\Delta H_L = \frac{8L \cdot Q^2}{g\pi^2 D^5} \cdot \lambda$.

On a :

$$\Delta H_L = \lambda \cdot \frac{U^2}{2g} \cdot \frac{L}{D_H}.$$

$$U = \frac{4Q}{\pi D^2}, \quad D_H = D.$$

$$\Delta H_L = \lambda \left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{L}{D}$$

$$= \lambda \frac{16Q^2}{\pi^2 D^4} \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{L}{D}$$

$$\Delta H_L = \lambda \frac{8Q^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{L}{D^5}$$

$$\boxed{\Delta H = \frac{8L}{g\pi^2 \cdot D^5} \cdot \lambda}$$

2 - Calculer la perte de charge pour $Q = 1{,}5708 \cdot 10^{-4}\ m^3/s$.

Corrigé du TD 4 (Suite)

Exercice 9

1) Expression de la perte de charge :

La perte de charge est donnée par la relation suivante :

$$\Delta H = \frac{U^2}{2g}\lambda\frac{L}{D}$$

mais

$$\Rightarrow \quad U^2 = \frac{16Q^2}{\pi^2 D^4}$$

et donc $\Delta H = \dfrac{8\,L}{g\,\pi^2 D^5} Q^2\,\lambda$

2) Pertes de charge pour un débit volumique Q = 1.5708 10^{-4} m^3/s.

-Régime de l'écoulement : on calcule le nombre de Reynolds en fonction du débit au lieu de la vitesse, on a

$R_e = \dfrac{UD}{\nu} = \dfrac{4Q}{\nu\pi D}$ comme Q = 1.5708 10^{-4} m^3/s alors $R_e = 2.10^3 \langle\ 2300$

Donc le régime est laminaire et le coefficient de pertes de charge est donné par la relation : $\lambda = \dfrac{64}{R_e} = 3{,}210^{-2}$

Et par conséquents :

$$\Delta H = \frac{8\ L}{g\ \pi^2\ D^5} Q^2\ \lambda = 6.5\ 10^{-3}\ m$$

3) Pertes de charge pour un débit volumique Q = 7.854 10^{-3} m^3/s.

-Régime de l'écoulement : on calcule le nombre de Reynolds

$R_e = \dfrac{UD}{\nu} = \dfrac{4Q}{\nu\pi D}$ comme Q = 7.854 10^{-3} m^3/s alors $R_e = 1.10^5 > 2300$

Donc le régime est turbulent on calcule le coefficient de frottement λ par la relation de

COLEBROOK $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2Log_{10}\left[\dfrac{k}{3{,}71D} + \dfrac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right]$

après itérations on trouve λ = 5,741632 10^{-2}

et donc ΔH = 29,27 m

EXO 10

10

∴ La perte de charge linéaire : ΔH_l.

$$\Delta H_l = \lambda \frac{U^2}{2g}\cdot\frac{L}{D_H} = 0{,}02\cdot\frac{U^2}{2.9{,}81}\cdot\frac{25}{0{,}4} = \boxed{0{,}0637\,U^2 = \Delta H_l}$$

0,5 0,5

$(D_H = d)$

2- La perte de charge singulière ΔH_S :

$$\Delta H_S = k_e\cdot\frac{U^2}{2g} + k_c\cdot\frac{U^2}{2g} + k_c\cdot\frac{U^2}{2g} + k_s\cdot\frac{U^2}{2g} = (k_e + 2k_c + k_s)\frac{U^2}{2g}$$ 0,5

$$\Delta H_S = (0{,}5 + 2.\,0{,}4 + 1)\cdot\frac{U^2}{2.9{,}81} = \boxed{0{,}1172\,U^2 = \Delta H_S}$$ 0,5

3- L'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\cancel{\frac{U_1^2}{2g}} + \cancel{\frac{P_1}{\rho g}} + z_1 = \cancel{\frac{U_2^2}{2g}}^{\simeq 0} + \cancel{\frac{P_2}{\rho g}} + z_2 + \Delta H_l + \Delta H_S$$ 0,5

On a :

$U_1 = U_2 = 0$ 0,5

$P_1 = P_2 = P_{atm}$ 0,5

$z_1 - z_2 = 2{,}5\,m$.

donc :

$$\boxed{2{,}5 = 0{,}0637\,U^2 + 0{,}1172\,U^2}$$ — 1 0,5

4- La vitesse d'écoulement dans la conduite : U :

Suivant l'éq. (1) : $U = \sqrt{\dfrac{2{,}5}{0{,}0637 + 0{,}1172}}$

$$\boxed{U = 3{,}7175\,m/s}$$ 0,5

Le débit volumique d'eau :

$$Q = U \cdot A = U \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad (0,5)$$

$$Q = 3,7175 \cdot \frac{\pi \cdot (0,4)^2}{4}$$

$$\boxed{Q = 0,467 \ m^3/s} \quad (0,5)$$

11

6- La nature du régime :

pour connaître la nature du régime on calcule le nombre de Reynolds : Re.

$$Re = \frac{U \cdot D_H}{\nu} = \frac{U \cdot d}{\nu} \quad (0,5)$$

$$Re = \frac{3,7175 \cdot 0,4}{10^{-6}} = \boxed{1487 \times 10^3 \ Re.} \quad (0,5)$$

$Re > 2300$ donc le régime est turbulent (0,5)

7- La pression effective au pt A.

En appliquant l'eq. de Bernoulli entre A et 2 (ou bien entre A et 1) on trouve :

$$\frac{U_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + Z_A = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \Delta H_{l(A-2)} + \Delta H_{S(A-2)} \quad (0,5)$$

$$= \frac{\cancel{U_2^2}^{\,0}}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \lambda \frac{U^2}{2g} \cdot \frac{l'}{d} + k_s \cdot \frac{U^2}{2g}$$

(0,5) (0,5)

$U_A = U$

$U_2 = 0$ (0,5)

$P_2 = P_{atm} \Rightarrow$

$Z_A - Z_2 = 4,5 m = h$

$$P_A - P_{atm} = \rho g \left[(Z_2 - Z_A) + \frac{\lambda l' U^2}{2gd} + k_s \frac{U^2}{2g} - \frac{U^2}{2g} \right]$$

on trouve alors : $\boxed{P_{A eff} = -\rho g h + \rho \frac{U^2}{2} \left(-1 + \frac{\lambda l'}{d} + k_s \right)}$ (0,5)

$$P_{A eff} = -1000 \times 9,81 \cdot 4,5 + 1000 \cdot \frac{(3,7175)^2}{2} \left(-1 + \frac{0,02 \times 5}{} + 1 \right)$$

$P_{A eff} = -42417,52 \ Pa$