Chapitre 3

Cinématique

La cinématique permet de décrire de manière générale l'évolution d'un mobile (un point ou un ensemble de points) au cours du temps, sans s'intéresser aux causes du mouvement. Pour ceci, des concepts essentiels sont introduits tel que "le vecteur vitesse", "la notion de référentiel", "le moment cinétique" et bien d'autres... La cinématique repose sur des principes physiques permettant de relier mathématiquement et/ou conceptuellement toutes ces notions.

3.1 Quelques définitions

3.1.1 L'observateur

L'observateur est un être qui a conscience de l'écoulement du temps, fléché du passé vers le futur, et qui perçoit l'existence d'objets indépendants de lui-même, localisés dans l'espace et pouvant se déplacer au cours de temps.

3.1.2 Notion de référentiel

Un référentiel est un système d'axes de coordonnées, liés à un observateur muni d'une horloge. La notion de mouvement n'a pas de caractère absolu mais est relative au référentiel par rapport auquel il est décrit. En effet, deux observateurs placés dans deux référentiels en mouvement relatif décriront de façon différentes le mouvement d'un même point de l'espace.

3.1.3 Une classe de référentiels particuliers : les référentiels "galiléens"

Les référentiels galiléens sont les référentiels animes d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic. Le référentiel de Copernic est le référentiel dont l'origine est au barycentre du système solaire et dont les axes sont dirigés vers des étoiles lointaines dites "étoiles fixes" (Livre JP-Faroux).

Il est difficile de saisir la notion de référentiel galiléen avant d'introduire les concepts de changement de référentiels (chapitre 4). En pratique, un référentiel sera considéré comme galiléen si, dans ce dernier et pour un temps d'observation donné, le mouvement d'un mobile n'étant soumis à aucune force extérieure est <u>rectiligne</u> et de vitesse <u>constante</u>.

3.1.4 Notion de repère de temps

Un repère de temps (O', t) est constitué d'un point d'origine O' du temps, et d'un vecteur $\vec{s}$ selon l'axe du temps. Tout évènement observé à un instant τ donné par un observateur est daté. Ainsi, à tout instant τ l'observateur peut associer un nombre réel tel que : $\vec{O'\tau} = t.\vec{s}$. En mécanique classique, le temps est considéré comme un paramètre du mouvement et sera de ce fait, plutôt représenté par un **scalaire**.

3.1.5 Notion de point matériel

Il s'agit d'un point géométrique associé à un système de corps dont la position est parfaitement déterminée par la donnée de trois coordonnées (dans l'espace à trois dimensions) et d'un paramètre temporel. En pratique on "modélisera" un corps quelconque par un son centre de gravité (un point) auquel est associé toute la masse du corps en question. Dans certains cas, cette approximation est trop grossière et ne peut pas correctement décrire le mouvement réel d'un corps. C'est le cas par exemple des corps déformables, ou de grande dimensions devant les variations de potentiel auxquels ils sont soumis, ou encore des corps de dimensions très petites (électrons) délocalisés.

3.1.6 Repère et coordonnées

Pour tout observateur, 3 coordonnées suffisent à positionner un point dans l'espace (à 3 dimensions). Le repère d'espace permet d'introduire la notion de coordonnées. Il est constitué d'un point origine O et d'une base de trois vecteurs non colinéaires $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$. Un repère d'espace orthonormé est un repère d'espace tels que les 3 vecteurs de base associés sont orthogonaux 2 a 2 et de norme unité. En général, on distingue trois repères d'espace usuels : le repère **cartésien**, le repère **cylindrique** et le repère **sphérique**.

Repère cartésien

Le repère cartésien est orthonormé. Il est constitué de trois vecteurs unitaires "fixes" dans le référentiel choisi. Les trois vecteurs unitaires $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ déterminent les trois directions usuelles de l'espace $\{[Ox),\ [Oy),\ [Oz)\}$. La position d'un point quelconque M dans ce repère est définie à partir du point origine O et des coordonnées (x, y, z). Le vecteur position s'écrit :

$$\vec{OM} = x.\vec{e_x} + y.\vec{e_y} + z.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Les trois vecteurs unitaires du repère cartésien sont "fixes" dans le référentiel d'observation. On dit aussi qu'ils sont "liés" au référentiel. En d'autres termes, cela signifie que ni la **norme**, ni la **direction**, ni le **sens** de ces vecteurs unitaires ne changent au cours du temps.

Repère cylindrique

Le repère cylindrique est orthonormé. Il est constitué de trois vecteurs unitaires $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ dont un $(\vec{e_z})$ est "fixe" dans le référentiel choisi tandis que les deux autres $(\vec{e_\rho}\ et\ \vec{e_\theta})$ sont "variables". La position d'un point quelconque M dans ce repère est définie à partir du point origine O et des coordonnées $(\rho,\ \theta\ z)$. Le vecteur position s'écrit :

$$\vec{OM} = \rho.\vec{e_\rho} + z.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Remarque 1 : nous verrons dans le chapitre suivant que le vecteur $\vec{e_\theta}$ est utilisé pour exprimer, entre autre, la vitesse et l'accélération d'un point matériel.

Remarque 2 : le repère polaire, à deux dimensions, se déduit du repère cylindrique en supprimant la troisième composante de l'espace représentée par le vecteur $\vec{e_z}$. Les vecteurs de base sont $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$ et le vecteur $\vec{OM}$ s'écrit simplement : $\vec{OM} = \rho.\vec{e_\rho}$

Remarque 3 : Nous verrons par la suite que les vecteurs $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$ peuvent être exprimés en fonction des vecteurs du repère cartésien $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$. Cette opération est utile dans la démonstration de certaines relations, mais devra être évitée lorsque l'on travaille dans le repère cylindrique.

Repère sphérique

Le repère sphérique est orthonormé. Il est constitué de trois vecteurs unitaires $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\phi})$, tous sont "variables" dans le référentiel choisi. La position d'un point quelconque M dans ce repère est définie à partir du point origine O et des coordonnées $(r,\ \theta,\ \phi)$. Le vecteur position s'écrit :

$$\vec{OM} = r.\vec{e_r} \quad \text{ou} \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Remarque 1 : nous verrons dans le chapitre suivant que les vecteurs $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_\phi}$ sont utilisés pour exprimer, entre autre, la vitesse et l'accélération d'un point matériel.

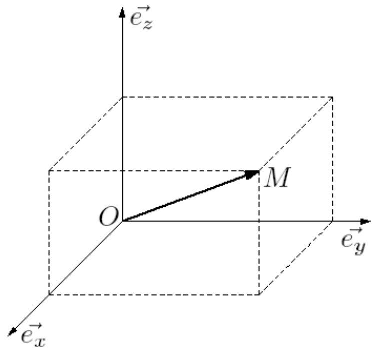
Remarque 2 : Nous verrons par la suite que les vecteurs $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_\phi}$ peuvent être exprimés en fonction des vecteurs du repère cartésien $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$. Cette opération est utile dans la démonstration de certaines relations, mais devra être évitée lorsque l'on travaille dans le repère sphérique.

ATTENTION : Il ne faut pas confondre les concepts de *référentiel* et de *repère d'espace*. Dans un référentiel donné, le *même* mouvement d'un mobile peut être décrit en utilisant des repères d'espace différents. Par contre le mouvement d'un mobile ne sera pas le même suivant le référentiel dans lequel l'observateur se situe.

3.1.7 La notion de trajectoire

La trajectoire d'un point matériel constitue l'ensemble des positions de l'espace que ce dernier occupe en fonction du temps. La trajectoire est parfaitement définie lorsque l'on connait explicitement l'évolution temporelle de toutes les coordonnées du vecteur position $\vec{OM}$. Autrement dit, à chaque "valeur" du temps t, il est possible d'associer une position du point M dans l'espace, repéré par ses coordonnées. Bien que la définition de la trajectoire nous semble intuitif, rappelons que celle-ci n'existe plus dans le cadre de la mécanique quantique...

3.2 Cinématique dans le repère cartésien



3.2.1 Expression du vecteur position

En coordonnées cartésiennes, le vecteur position s'écrit simplement :

$$\boxed{\vec{OM} = x.\vec{e_x} + y.\vec{e_y} + z.\vec{e_z}}$$

3.2.2 Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

Le vecteur "déplacement" $\vec{\Delta\ell}$ est obtenu logiquement en soustrayant la position du point M' au temps t' à celle du point M au temps t (avec $t' > t$). On a : $\vec{\Delta\ell} = \vec{OM'} - \vec{OM}$. La définition du vecteur "déplacement élémentaire" $\vec{d\ell}$ est similaire à celle du vecteur "déplacement", mais cette fois-ci les temps t et t' sont très proches de sorte que $t' - t \to 0$. On a alors : $\vec{d\ell} = \lim_{(t'-t)\to 0} \left[\vec{OM'} - \vec{OM}\right]$. Mathématiquement, cela revient à **différencier** l'expression de $\vec{OM}$. Il vient :

$$\vec{d\ell} = d\vec{OM} = (dx.\vec{e_x} + x.d\vec{e_x}) + (dy.\vec{e_y} + y.d\vec{e_y}) + (dz.\vec{e_z} + z.d\vec{e_z})$$

Dans le repère cartésien, les vecteurs de base sont "fixes" par rapport au référentiel choisi, cela revient à dire qu'ils n'évoluent pas au cours du temps, ou bien qu'ils n'ont aucun déplacement élémentaire soit : $d\vec{e_x} = 0, d\vec{e_y} = 0, d\vec{e_z} = 0$,. Finalement, on obtient :

$$\boxed{\vec{d\ell} = dx.\vec{e_x} + dy.\vec{e_y} + dz.\vec{e_z} \qquad (3.4)}$$

3.2.3 Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse se déduit de celui du vecteur "déplacement élémentaire" : $\vec{v} = \frac{\vec{d\ell}}{dt}$.

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dx}{dt}.\vec{e_x} + \frac{dy}{dt}.\vec{e_y} + \frac{dz}{dt}.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \dot{x}.\vec{e_x} + \dot{y}.\vec{e_y} + \dot{z}.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad (3.5)}$$

3.2.4 Expression du vecteur accélération

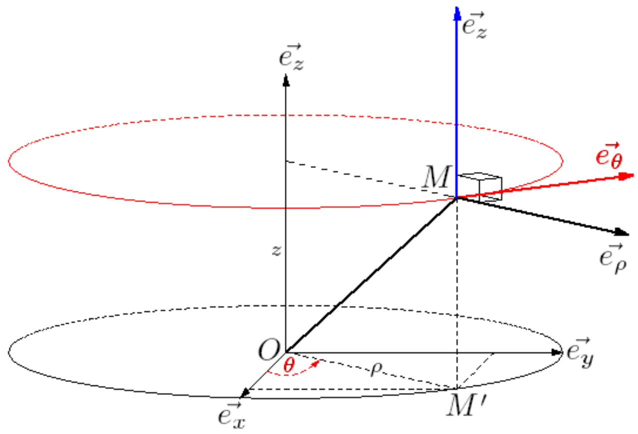
Le vecteur accélération se déduit de celui du vecteur vitesse : $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$. Il vient : $\vec{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}.\vec{e_x} + \frac{dx}{dt}.\frac{d\vec{e_x}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2y}{dt^2}.\vec{e_y} + \frac{dy}{dt}.\frac{d\vec{e_y}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z} + \frac{dz}{dt}.\frac{d\vec{e_z}}{dt}\right)$. De la même manière que précédemment, les vecteurs $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ sont fixes dans le référentiel choisi, leur dérivée par rapport au temps est donc nulle. Il reste :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}.\vec{e_x} + \frac{d^2y}{dt^2}.\vec{e_y} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \ddot{x}.\vec{e_x} + \ddot{y}.\vec{e_y} + \ddot{z}.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \qquad (3.6)}$$

NOTA : La dérivée première par rapport au temps $\left(\frac{d}{dt}\right)$ *d'une grandeur* X *se note aussi* $\dot{X}$. *La dérivée seconde par rapport au temps* $\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)$ *d'une grandeur* X *se note aussi* $\ddot{X}$

NOTA : La vitesse $\vec{v}$ *est aussi obtenue directement en dérivant le vecteur position :* $\vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{OM})$.

3.3 Cinematique dans le repère cylindrique



3.3.1 Expression du vecteur position

En coordonnées cylindriques, le vecteur position s'écrit :

$$\boxed{\vec{OM} = \rho.\vec{e_\rho} + z.\vec{e_z} \qquad (3.7)}$$

Si on "attache" au référentiel un repère cartésien (en plus du repère cylindrique) avec la même origine, il est possible de d'exprimer (par trigonométrie élémentaire) les vecteurs $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ du repère cartésien (ou inversement) :

$$\begin{array}{c} \vec{e_\rho} = \cos\theta.\vec{e_x} + \sin\theta.\vec{e_y} \\ \vec{e_\theta} = -\sin\theta.\vec{e_x} + \cos\theta.\vec{e_y} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \vec{e_x} = \cos\theta.\vec{e_\rho} - \sin\theta.\vec{e_\theta} \\ \vec{e_y} = \sin\theta.\vec{e_\rho} + \cos\theta.\vec{e_\theta} \end{array}$$

3.3.2 Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

Nous procédons de la même manière que précédemment en différentiant le vecteur position :

$$d\vec{OM} = \vec{d\ell} = (d\rho.\vec{e_\rho} + \rho.d\vec{e_\rho}) + (dz.\vec{e_z} + z.d\vec{e_z})$$

On sait que $d\vec{e_z} = 0$ mais par contre $d\vec{e_\rho} \neq 0$ car le vecteur $\vec{e_\rho}$ est susceptible de varier pour le repère cylindrique. Pour connaître l'expression de $d\vec{e_\rho}$, revenons dans le repère cartésien un petit moment... Nous avons :

$$\begin{aligned} d\vec{e_\rho} &= d\left(\cos\theta.\vec{e_x} + \sin\theta.\vec{e_y}\right) \\ &= \left[d\left(\cos\theta\right).\vec{e_x} + \cos\theta.d\vec{e_x}\right] + \left[d\left(\sin\theta\right).\vec{e_y} + \sin\theta.d\vec{e_y}\right] \\ &= d\left(\cos\theta\right).\vec{e_x} + d\left(\sin\theta\right).\vec{e_y} \\ &= -d\theta.\sin\theta.\vec{e_x} + d\theta.\cos\theta.\vec{e_y} \\ &= d\theta.\left(-\sin\theta.\vec{e_x} + \cos\theta.\vec{e_y}\right) \\ &= d\theta.\vec{e_\theta} \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur "déplacement élémentaire", en coordonnées cylindriques, s'écrit :

$$\boxed{\vec{d\ell} = d\rho.\vec{e_\rho} + \rho.d\theta.\vec{e_\theta} + dz.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{d\ell} = \begin{pmatrix} d\rho \\ \rho.d\theta \\ dz \end{pmatrix} \qquad (3.8)}$$

3.3.3 Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse se déduit de celui du vecteur "déplacement élémentaire" : $\vec{v} = \frac{\vec{d\ell}}{dt}$.

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}.\vec{e_\rho} + \rho.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + \frac{dz}{dt}.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \dot{\rho}.\vec{e_\rho} + \rho.\dot{\theta}.\vec{e_\theta} + \dot{z}.\vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad (3.9)}$$

3.3.4 Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération se déduit de celui du vecteur vitesse : $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left[\frac{d^2\rho}{dt^2}.\vec{e_\rho} + \frac{d\rho}{dt}.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right] + \left[\frac{d\rho}{dt}.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + \rho.\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta}\right)\right] + \left[\frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z} + \frac{dz}{dt}.\frac{d\vec{e_z}}{dt}\right] \\ &= \left[\frac{d^2\rho}{dt^2}.\vec{e_\rho} + \frac{d\rho}{dt}.\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right] + \left[\frac{d\rho}{dt}.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + \rho.\frac{d^2\theta}{dt^2}.\vec{e_\theta} + \rho.\frac{d\theta}{dt}.\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\right] + \left[\frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z} + \frac{dz}{dt}.\frac{d\vec{e_z}}{dt}\right] \\ &= \left[\frac{d^2\rho}{dt^2}.\vec{e_\rho} + \frac{d\rho}{dt}.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta}\right] + \left[\frac{d\rho}{dt}.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + \rho.\frac{d^2\theta}{dt^2}.\vec{e_\theta} + \rho.\frac{d\theta}{dt}.\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\right] + \left[\frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z}\right] \end{aligned}$$

En passant de la deuxième ligne à la troisième, nous avons utilisé la relation $d\vec{e_\rho} = d\theta.\vec{e_\theta}$ démontrée précédemment. Il ne nous reste plus qu'à exprimer le vecteur $d\vec{e_\theta}$ en fonction des vecteurs de base $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$. Nous procédons de la même manière que précédemment, en utilisant l'expression de $\vec{e_\theta}$ dans le repère cartésien et en effectuant une différentiation $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} d\vec{e_\theta} &= d\left(-\sin\theta.\vec{e_x} + \cos\theta.\vec{e_y}\right) \\ &= \left[-d\left(\sin\theta\right).\vec{e_x} - \sin\theta.d\vec{e_x}\right] + \left[d\left(\cos\theta\right).\vec{e_y} + \cos\theta.d\vec{e_y}\right] \\ &= -d\left(\sin\theta\right).\vec{e_x} + d\left(\cos\theta\right).\vec{e_y} \\ &= -d\theta.\cos\theta.\vec{e_x} - d\theta.\sin\theta.\vec{e_y} \\ &= -d\theta.\left(\cos\theta.\vec{e_x} + \sin\theta.\vec{e_y}\right) \\ &= -d\theta.\vec{e_\rho} \end{aligned}$$

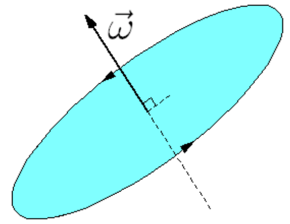
En utilisant cette dernière identité et en regroupant les composantes des vecteurs de base, il vient :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left[\frac{d^2\rho}{dt^2}.\vec{e_\rho} + \frac{d\rho}{dt}.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta}\right] + \left[\frac{d\rho}{dt}.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + \rho.\frac{d^2\theta}{dt^2}.\vec{e_\theta} - \rho.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.\vec{e_\rho}\right] + \left[\frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z}\right] \\ &= \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho.\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right).\vec{e_\rho} + \left(2\frac{d\rho}{dt}.\frac{d\theta}{dt} + \rho.\frac{d^2\theta}{dt^2}\right).\vec{e_\theta} + \frac{d^2z}{dt^2}.\vec{e_z}\end{aligned}$$

Cette dernière équation constitue l'expression générale de l'accélération dans le repère cylindrique. En notation simplifiée, elle s'écrit aussi :

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right).\vec{e_\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right).\vec{e_\theta} + \ddot{z}.\vec{e_z} \qquad \text{ou} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix}\ddot{\rho} \\ 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} - \rho\dot{\theta}^2 \\ \ddot{z}\end{pmatrix}} \qquad (3.10)$$

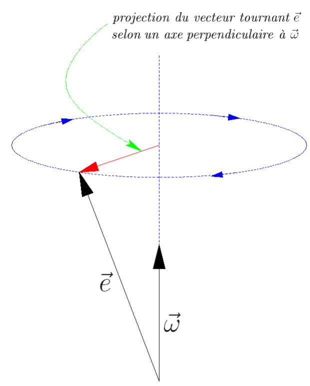
Remarque 1 : La dérivée par rapport au temps de l'angle θ se note aussi ω. Cette grandeur représente la vitesse angulaire du point M, son unité est le $rad.s^{-1}$ ($[T]^{-1}$). Par extension, on introduit aussi le "vecteur" $\vec{\omega}$ pour indiquer le plan dans lequel s'effectue la rotation, ainsi que son sens. Par définition, le vecteur $\vec{\omega}$ est toujours perpendiculaire au plan de la rotation, sa norme est proportionnelle à la vitesse angulaire, et sa direction indique le sens de rotation selon la règle du bonhomme d'Ampère



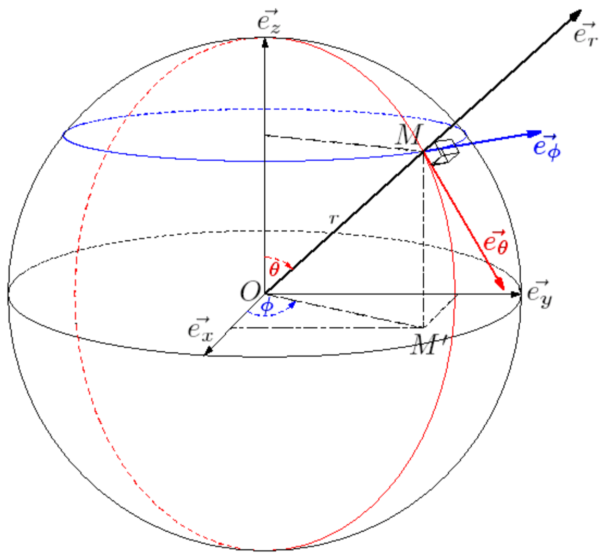
Remarque 2 : Nous avons vu que la dérivée par rapport au temps des vecteurs unitaires $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$ conduisent aux égalités suivantes : $\frac{d}{dt}\vec{e_\rho} = \omega.\vec{e_\theta}$ et $\frac{d}{dt}\vec{e_\theta} = -\omega.\vec{e_\rho}$. Il vient alors naturellement : $\frac{d^2}{dt^2}\vec{e_\rho} = -\omega^2.\vec{e_\rho}$. Nous remarquons aussi qu'il est possible d'exprimer très simplement la dérivée par rapport au temps des vecteurs "tournants" $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$ en utilisant le produit vectoriel :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{e_\rho} = \vec{\omega} \wedge \vec{e_\rho} \qquad \textit{et} \qquad \frac{d}{dt}\vec{e_\theta} = \vec{\omega} \wedge \vec{e_\theta}} \qquad (3.11)$$

Remarque 3 : Même dans le cas où le vecteur $\vec{\omega}$ n'est pas perpendicualire aux vecteurs tournants $\vec{e_\theta}$ ou $\vec{e_\rho}$, les relations établies ci-dessous restent valables : en effet, le produit vectoriel fait intervenir le sinus de l'angle entre les vecteurs concernés ! Ainsi, on ne considère que la projection du vecteur tournant selon un axe perpendiculaire à $\vec{\omega}$, puisque uniquement cette composante varie au cours du temps (et est donc susceptible de donner une dérivée non-nulle).



3.4 Cinématique dans le repère sphérique



3.4.1 Expression du vecteur position

En coordonnées sphériques, le vecteur position s'écrit :

$$\boxed{\vec{OM} = r.\vec{e_r} \qquad (3.12)}$$

En plus du repère sphérique, nous "attachons" au référentiel utilisé un repère cartésien avec la même origine. Il est possible de d'exprimer (par trigonométrie élémentaire) les vecteurs $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_\phi}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$ du repère cartésien :

$$\begin{aligned}
\vec{e_r} &= \sin\theta\cos\phi.\vec{e_x} + \sin\theta\sin\phi.\vec{e_y} + \cos\theta.\vec{e_z} \\
\vec{e_\theta} &= \cos\theta\cos\phi.\vec{e_x} + \cos\theta\sin\phi.\vec{e_y} - \sin\theta.\vec{e_z} \\
\vec{e_\phi} &= -\sin\phi.\vec{e_x} + \cos\phi.\vec{e_y}
\end{aligned}$$

3.4.2 Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

Pour établir l'expression mathématique du vecteur $\vec{d\ell}$, nous pouvons procéder exactement de la même manière que précédemment, c'est à dire en exprimant le vecteur $\vec{OM}$ à l'aide de ses coordonnées cartésiennes et en le différentiant, puis en essayant de faire ressortir à nouveau des vecteurs unitaires du repère sphérique. Le calcul ne présente aucune difficulté technique... il est d'ailleurs effectué dans le paragraphe suivant ! Cependant (et pour changer), nous allons établir l'expression de $\vec{d\ell}$ à partir de considérations géométriques. Nous recherchons $\vec{d\ell}$ sous la forme $\vec{d\ell} = dA.\vec{e_r} + dB.\vec{e_\theta} + dC.\vec{e_\phi}$ ou dA, dB et dC sont des éléments différentiels (scalaires) respectivement égaux à $d\ell$ lorsque...

- $dA = d\ell$ lorsque θ et ϕ sont fixes, seule la coordonnée r peut changer. On a donc : $dA = dr$
- $dB = d\ell$ lorsque r et ϕ sont fixes, seule la coordonnée θ peut changer. On a donc : $dB = r.d\theta$
- $dC = d\ell$ lorsque r et θ sont fixes, seule la coordonnée ϕ peut changer. On a donc : $dC = r.\sin\theta.d\phi$

Il vient :

$$\boxed{\vec{d\ell} = dr.\vec{e_r} + r.d\theta.\vec{e_\theta} + r.\sin\theta.d\phi.\vec{e_\phi} \qquad (3.13)}$$

Remarque : La technique utilisée ici est aussi valable pour retrouver rapidement l'expression de $\vec{d\ell}$ dans le repère cylindrique (ou cartésien) ! Ainsi, il est inutile d'apprendre "par coeur" l'expression du vecteur $\vec{d\ell}$ puisqu'il est possible de le retrouver très facilement.

3.4.3 Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse se déduit de celui du vecteur "déplacement élémentaire" : $\vec{v} = \frac{\vec{d\ell}}{dt}$.

$$\boxed{\vec{v} = \frac{dr}{dt}.\vec{e_r} + r.\frac{d\theta}{dt}.\vec{e_\theta} + r.\sin\theta.\frac{d\phi}{dt}.\vec{e_\phi} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \dot{r}.\vec{e_r} + r.\dot{\theta}.\vec{e_\theta} + r.\sin\theta.\dot{\phi}.\vec{e_\phi} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r.\sin\theta.\dot{\phi} \end{pmatrix} \qquad (3.14)}$$

3.4.4 Expression du vecteur accélération

Le vecteur accélération se déduit de celui du vecteur vitesse : $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v}$. Il vient (en utilisant les notations simplifiées) :

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{r}.\vec{e_r} + r.\dot{\theta}.\vec{e_\theta} + r.\sin\theta.\dot{\phi}.\vec{e_\phi}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\dot{r}.\vec{e_r}\right) + \frac{d}{dt}\left(r.\dot{\theta}.\vec{e_\theta}\right) + \frac{d}{dt}\left(r.\sin\theta.\dot{\phi}.\vec{e_\phi}\right) \\
&= \left(\ddot{r}.\vec{e_r} + \dot{r}.\dot{\vec{e_r}}\right) + \left(\dot{r}.\dot{\theta}.\vec{e_\theta} + r.\frac{d}{dt}\left[\dot{\theta}.\vec{e_\theta}\right]\right) + \left(\frac{d}{dt}\left[r.\sin\theta\right].\dot{\phi}.\vec{e_\phi} + r.\sin\theta.\frac{d}{dt}\left[\dot{\phi}.\vec{e_\phi}\right]\right) \\
&= \left(\ddot{r}.\vec{e_r} + \dot{r}.\dot{\vec{e_r}}\right) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\left[\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{\theta}\dot{\vec{e_\theta}}\right]\right) + \left(\left[\dot{r}.\sin\theta + r.\dot{\theta}.\cos\theta\right]\dot{\phi}.\vec{e_\phi} + r.\sin\theta\left[\ddot{\phi}.\vec{e_\phi} + \dot{\phi}.\dot{\vec{e_\phi}}\right]\right) \\
&= \left(\ddot{r}.\vec{e_r} + \dot{r}.\dot{\vec{e_r}}\right) + \left(\dot{r}.\dot{\theta}.\vec{e_\theta} + r.\ddot{\theta}.\vec{e_\theta} + r.\dot{\theta}.\dot{\vec{e_\theta}}\right) + \left(\dot{r}.\sin\theta.\dot{\phi}.\vec{e_\phi} + r.\dot{\theta}.\cos\theta.\dot{\phi}\vec{e_\phi} + r.\sin\theta.\ddot{\phi}\vec{e_\phi} + r.\sin\theta.\dot{\phi}.\dot{\vec{e_\phi}}\right)
\end{aligned}$$

Pour poursuivre le calcul, nous sommes (cette fois-ci) contraints de calculer explicitement $\dot{\vec{e_r}}$; $\dot{\vec{e_\theta}}$ et $\dot{\vec{e_\phi}}$

Rappel : $\vec{e_r} = \sin\theta\cos\phi.\vec{e_x} + \sin\theta\sin\phi.\vec{e_y} + \cos\theta.\vec{e_z}$, $\vec{e_\theta} = \cos\theta\cos\phi.\vec{e_x} + \cos\theta\sin\phi.\vec{e_y} - \sin\theta.\vec{e_z}$ et $\vec{e_\phi} = -\sin\phi.\vec{e_x} + \cos\phi.\vec{e_y}$ soit...

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{e_r}} &= \frac{d}{dt}(\sin\theta\cos\phi).\vec{e_x} + \frac{d}{dt}(\sin\theta\sin\phi).\vec{e_y} + \frac{d}{dt}(\cos\theta).\vec{e_z} \\
\dot{\vec{e_r}} &= \left(\dot\theta\cos\theta\cos\phi - \dot\phi\sin\theta\sin\phi\right).\vec{e_x} + \left(\dot\theta\cos\theta\sin\phi + \dot\phi\sin\theta\cos\phi\right).\vec{e_y} - \dot\theta\sin\theta.\vec{e_z} \\
&= \dot\theta\cos\theta\cos\phi.\vec{e_x} + \dot\theta\cos\theta\sin\phi.\vec{e_y} - \dot\phi\sin\theta\sin\phi.\vec{e_x} + \dot\phi\sin\theta\cos\phi.\vec{e_y} - \dot\theta\sin\theta.\vec{e_z} \\
&= \dot\theta\vec{e_\theta} + \dot\phi\sin\theta.\vec{e_\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{e_\theta}} &= \frac{d}{dt}(\cos\theta\cos\phi).\vec{e_x} + \frac{d}{dt}(\cos\theta\sin\phi).\vec{e_y} + \frac{d}{dt}(-\sin\theta).\vec{e_z} \\
\dot{\vec{e_\theta}} &= \left(-\dot\theta\sin\theta\cos\phi - \dot\phi\cos\theta\sin\phi\right).\vec{e_x} + \left(-\dot\theta\sin\theta\sin\phi + \dot\phi\cos\theta\cos\phi\right).\vec{e_y} - \dot\theta\cos\theta.\vec{e_z} \\
&= -\dot\theta\sin\theta\cos\phi.\vec{e_x} - \dot\theta\sin\theta\sin\phi.\vec{e_y} - \dot\phi\cos\theta\sin\phi.\vec{e_x} + \dot\phi\cos\theta\cos\phi.\vec{e_y} - \dot\theta\cos\theta.\vec{e_z} \\
&= -\dot\theta\vec{e_r} + \dot\phi\cos\theta.\vec{e_\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{e_\phi}} &= \frac{d}{dt}(-\sin\phi).\vec{e_x} + \frac{d}{dt}(\cos\phi).\vec{e_y} \\
\dot{\vec{e_\phi}} &= -\dot\phi\cos\phi.\vec{e_x} - \dot\phi\sin\phi.\vec{e_y} \\
&= -\dot\phi\sin\theta\vec{e_r} - \dot\phi\cos\theta.\vec{e_\theta} \text{ \textit{(remplacez $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ par leurs expressions dans le repère cartésien et vérifiez la validité de cette relation)}}
\end{aligned}$$

En remplaçant les expressions de $\dot{\vec{e_r}}$; $\dot{\vec{e_\theta}}$ et $\dot{\vec{e_\phi}}$ dans celle de $\vec{a}$, puis en regroupant les termes et en les simplifiant, il vient finalement :

$$\vec{a} = \left(\ddot r.\vec{e_r} + \dot r.\left(\dot\theta\vec{e_\theta} + \dot\phi\sin\theta.\vec{e_\phi}\right)\right) + \left(\dot r\dot\theta\vec{e_\theta} + r\ddot\theta\vec{e_\theta} + r\dot\theta\left(-\dot\theta\vec{e_r} + \dot\phi\cos\theta.\vec{e_\phi}\right)\right) + \left(\dot r.\sin\theta.\dot\phi.\vec{e_\phi} + r.\dot\theta\cos\theta.\dot\phi\vec{e_\phi} + r\sin\theta.\ddot\phi\vec{e_\phi} + r\sin\theta.\dot\phi\left(-\dot\phi\sin\theta\vec{e_r} - \dot\phi\cos\theta.\vec{e_\theta}\right)\right)$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\phi^2\sin^2\theta\right).\vec{e_r} + \left(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta - r\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta\right).\vec{e_\theta} + \left(2r\dot\phi\dot\theta\cos\theta + 2\dot r\dot\phi\sin\theta + r\ddot\phi\sin\theta\right).\vec{e_\phi}} \quad (3.15)$$

Méthode : Par construction, les expressions des vecteurs $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$ et $\vec{e_\phi}$ dans la base $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$ s'expriment à l'aide du cosinus et du sinus des angles θ et ϕ. Il ne sert à rien d'apprendre ces expressions "par coeur" puisque, une fois que l'on a compris comment elles sont construites, on peut toujours les redémontrer. Toutefois une erreur est si vite arrivée... Vous pouvez (devez) **tester** vos projections vectorielles dans des cas simples. Par exemple, un étudiant a trouvé les expressions suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned}
\vec{e_r} &= \sin\theta\cos\phi.\vec{e_x} + \sin\theta\sin\phi.\vec{e_y} + \cos\theta.\vec{e_z} \\
\vec{e_\theta} &= \cos\theta\cos\phi.\vec{e_x} + \cos\theta\sin\phi.\vec{e_y} - \sin\theta.\vec{e_z} \\
\vec{e_\phi} &= -\sin\phi.\vec{e_x} + \cos\phi.\vec{e_y}
\end{aligned}}$$

On sait que si $\theta = 0$ et $\phi = 0$, alors $\vec{e_r} = \vec{e_z}$, $\vec{e_\theta} = \vec{e_x}$ et $\vec{e_\phi} = \vec{e_y}$
Il ne reste plus qu'à tester les expressions trouvées :
$\vec{e_r} = \sin 0\cos 0.\vec{e_x} + \sin 0\sin 0.\vec{e_y} + \cos 0.\vec{e_z} \stackrel{?}{=} \vec{e_z}$
$\vec{e_\theta} = \cos 0\cos 0.\vec{e_x} + \cos 0\sin 0.\vec{e_y} - \sin 0.\vec{e_z} \stackrel{?}{=} \vec{e_x}$
$\vec{e_\phi} = -\sin 0.\vec{e_x} + \cos 0.\vec{e_y} \stackrel{?}{=} \vec{e_y}$

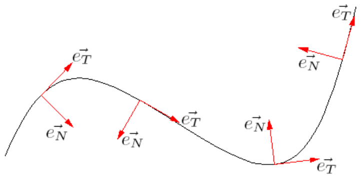
On sait que si $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\phi = 0$, alors $\vec{e_r} = \vec{e_x}$, $\vec{e_\theta} = -\vec{e_z}$ et $\vec{e_\phi} = \vec{e_y}$
On vérifie :
$\vec{e_r} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos 0.\vec{e_x} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin 0.\vec{e_y} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_z} \stackrel{?}{=} \vec{e_x}$
$\vec{e_\theta} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos 0.\vec{e_x} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin 0.\vec{e_y} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_z} \stackrel{?}{=} -\vec{e_z}$
$\vec{e_\phi} = -\sin 0.\vec{e_x} + \cos 0.\vec{e_y} \stackrel{?}{=} \vec{e_y}$

On sait que si $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\phi = \frac{\pi}{2}$, alors $\vec{e_r} = \vec{e_y}$, $\vec{e_\theta} = -\vec{e_z}$ et $\vec{e_\phi} = -\vec{e_x}$
On vérifie :
$\vec{e_r} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_x} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_y} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_z} \stackrel{?}{=} \vec{e_y}$
$\vec{e_\theta} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_x} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_y} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_z} \stackrel{?}{=} -\vec{e_z}$
$\vec{e_\phi} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_x} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).\vec{e_y} \stackrel{?}{=} -\vec{e_x}$

On sait que si $\theta = \pi$ et $\phi = \pi$, alors $\vec{e_r} = -\vec{e_z}$, $\vec{e_\theta} = \vec{e_x}$ et $\vec{e_\phi} = -\vec{e_y}$
On vérifie :
$\vec{e_r} = \sin\pi\cos\pi.\vec{e_x} + \sin\pi\sin\pi.\vec{e_y} + \cos\pi.\vec{e_z} \stackrel{?}{=} -\vec{e_z}$
$\vec{e_\theta} = \cos\pi\cos\pi.\vec{e_x} + \cos\pi\sin\pi.\vec{e_y} - \sin\pi.\vec{e_z} \stackrel{?}{=} \vec{e_x}$
$\vec{e_\phi} = -\sin\pi.\vec{e_x} + \cos\pi.\vec{e_y} \stackrel{?}{=} -\vec{e_y}$

Etc... Toutes les expressions sont correctes, les équations semblent *a priori* bien être les bonnes !

3.5 Repère de Frenet



On désigne par $x_{(t)}$, $y_{(t)}$ et $z_{(t)}$ les coordonnées cartésiennes d'un point M. Sa trajectoire définie une courbe qui est orientée dans le sens du mouvement (suivant les valeurs croissantes du temps). La direction de la tangente à une courbe en un point M est la direction d'une corde MM' lorsque M tend vers M'. On définit le vecteur unitaire $\vec{e_T}$ comme étant le vecteur unitaire tangent à la courbe et orienté dans le sens du mouvement. On introduit le vecteur $\vec{e_N}$, orthogonal à $\vec{e_T}$ et dirigé selon la concavité de la trajectoire. Le plan formé par les vecteurs $\vec{e_T}$ et $\vec{e_N}$ est aussi appelé le plan "osculateur" au point M considéré. On complète ces deux vecteurs unitaires par le vecteur $\vec{e_B} = \vec{e_T} \wedge \vec{e_N}$. Le vecteur ainsi définit porte le nom de binormale. La base $(\vec{e_T},\ \vec{e_N},\ \vec{e_B})$ constitue le trièdre de Frenet.

3.5.1 Expression du vecteur position

Dans le repère de Frenet, il est impossible d'écrire de manière explicite le vecteur position $\vec{OM}$. Nous définissons cependant une abscisse curviligne s (un scalaire) de M de long de la trajectoire comme étant égal à la longueur de l'arc $\widehat{OM}$.

3.5.2 Expression du vecteur "déplacement élémentaire"

Le vecteur "déplacement élémentaire" s'écrit simplement :

$$\boxed{d\vec{OM} = \vec{d\ell} = ds.\vec{e_T} \qquad (3.16)}$$

Remarque 1 : $\vec{d\ell} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.\vec{e_T}$ *en exprimant ds à l'aide des coordonnées cartésiennes,* $\vec{d\ell} = \sqrt{dr^2 + (r.d\theta)^2 + dz^2}.\vec{e_T}$ *en exprimant ds à l'aide des coordonnées cylindriques et* $\vec{d\ell} = \sqrt{dr^2 + (r.d\theta)^2 + (r\sin\theta.d\phi)^2}.\vec{e_T}$ *en exprimant ds selon les coordonnées sphériques*

Remarque 2 : Cette équation permet aussi de donner une nouvelle définition du vecteur $\vec{e_T}$: $\vec{e_T} = \frac{d(\vec{OM})}{ds}$

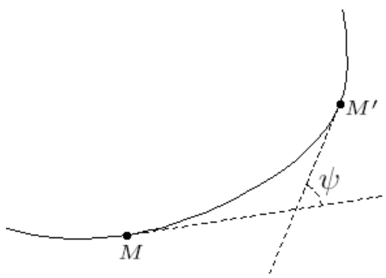
3.5.3 Expression du vecteur vitesse

Le vecteur vitesse se déduit du vecteur "déplacement élémentaire" :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt}.\vec{e_T} \qquad (3.17)}$$

Le vecteur vitesse est toujours dirigé selon le vecteur $\vec{e_T}$, Naturellement, il vient : $\vec{v} = \|\vec{v}\|.\vec{e_T}$

3.5.4 Expression du rayon de courbure



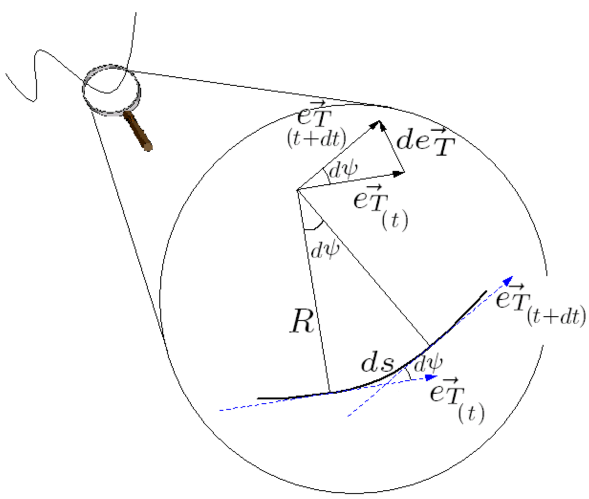
La courbure d'une courbe C (scalaire) au point M est définie de la manière suivante :

$$C = \lim_{M' \to M} \frac{\psi}{MM'} = \frac{d\psi}{ds}$$

Le rayon de courbure est défini comme l'inverse de la courbure : $R = \frac{1}{C} = \frac{ds}{d\psi}$. Dans le repère de Frenet, il vient :

$$d(\vec{e_T}) = \lim_{M' \to M} \left(\vec{e_T}_{(M')} - \vec{e_T}_{(M)}\right) = d\psi.\vec{e_N} = \frac{ds}{R}\vec{e_N} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\frac{d\vec{e_T}}{ds} = \frac{\vec{e_N}}{R}}$$

3.5.5 Expression du vecteur accélération



Le vecteur accélération se déduit du vecteur vitesse : $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d^2s}{dt^2}.\vec{e_T} + \frac{ds}{dt}.\frac{d}{dt}(\vec{e_T})$. Or nous avons vu précédemment que $d(\vec{e_T}) = \frac{ds}{R}\vec{e_N}$, soit $\frac{d}{dt}(\vec{e_T}) = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt}\vec{e_N}$. Il vient naturellement :

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}.\vec{e_T} + \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.\vec{e_N} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}.\vec{e_T} + \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}.\vec{e_N}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}.\vec{e_T} + \frac{\|\vec{v}\|^2}{R}.\vec{e_N} \qquad (3.18)}$$

3.6 Pourquoi avons-nous besoin de ces repères ?

A l'évidence, le repère cartésien est certainement le plus intuitif d'entre tous. C'est peut-être aussi le plus "facile" à utiliser puisque ses vecteurs de base sont "fixes" dans le référentiel choisi.. ? Cette dernière affirmation n'est peut-être pas tout à fait correcte : Pour s'en convaincre, reprenons le principe de Curie :

- Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les éléments de symétrie des effets produits

- Lorsque certains effets révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance.

Les éléments de symétrie d'un objet physique sont les transformations géométriques qui laissent cet objet invariant, c'est à dire qui peuvent l'amener en coïncidence avec lui-même. Nous verrons, au cours des prochains chapitres, que l'application de forces précède le mouvement. Les forces peuvent donc être considérées comme des "causes" et le mouvement d'un corps comme un "effet". Si les forces possèdent des éléments de symétrie cylindrique (par exemple), alors le mouvement du corps sur lequel s'appliquent ces forces possèdera aussi des éléments de symétrie cylindrique... et nous avons tout intérêt à utiliser le repère cylindrique ! Choisir un autre repère (cartésien, sphérique...) est possible, mais dans ce dernier les éléments de symétrie du mouvement seront très difficiles à intuiter, et les équation de la trajectoire deviendront très vite intraitables (bien que toujours justes !).

Les formules établies de la position, de la vitesse et de l'accélération d'un point matériel dans les repères cartésiens, cylindriques, sphériques et de Frenet sont générales : c'est à dire qu'elles sont susceptibles de décrire parfaitement toutes les trajectoires possibles, vitesses ou accélérations. Dans la pratique, de nombreux termes disparaissent naturellement en étudiant (entre autre) les symétries des causes du mouvement (les forces). En outre, l'étude de la dimension du mouvement peut aussi simplifier considérablement les calculs... par exemple, si le mouvement d'un corps a lieu dans un plan horizontal $\{\vec{e_x}, \vec{e_y}\}$ il est possible de supprimer les composantes selon $\vec{e_z}$ dans le repère cartésien et/ou cylindrique...

ATTENTION : Si vous êtes susceptibles d'utiliser un repère autre que ceux énoncés dans ce chapitre, assurez-vous qu'il reste toutefois orthonormé !

3.7 Exemples de mouvements simples

3.7.1 Le mouvement rectiligne

Il s'agit certainement du mouvement le plus simple d'entre tous. Pour traiter ce type de mouvement, nous choisissons le repère cartésien (en ne s'intéressant qu'à la composante selon $\vec{e_x}$). Nous aurions aussi pu choisir le repère cylindrique (composante selon $\vec{e_\rho}$ uniquement) ou le repère sphérique (composante selon $\vec{e_r}$ uniquement).

- Si le mouvement est rectiligne uniforme : $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{v} = \vec{C^{te}} = v_0.\vec{e_x}$ et $R = \infty$ (rayon de courbure). Notons que $v = 0 = C^{te}$ est un cas particulier de mouvement rectiligne uniforme : l'objet est immobile.

- Si le mouvement est rectiligne uniformément accéléré (retardé) : $\vec{a} = \vec{C^{te}} = a_0.\vec{e_x}$, $\vec{v} = v(t).\vec{e_x}$ et $R = \infty$
  les vecteurs vitesse et accélération sont dans le même sens ($\vec{a}.\vec{v} > 0$) dans le cas accéléré, tandis qu'ils sont en sens opposé ($\vec{a}.\vec{v} < 0$) dans le cas retardé.

- Si le mouvement est rectiligne non-uniformément accéléré : $\vec{a} = a(t).\vec{e_x}$, $\vec{v} = v(t).\vec{e_x}$ et $R = \infty$

3.7.2 Le mouvement circulaire

Le mouvement "circulaire" signifie mathématiquement $R = C^{te}$. Il s'agit d'un mouvement plan. Nous choisissons de l'étudier dans le repère cylindrique dépourvu de la composante selon $\vec{e_z}$ - il s'agit du repère polaire $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$. Nous aurions aussi pu étudier le mouvement circulaire dans le repère sphérique en supprimant la composante selon $\vec{e_\theta}$ et en posant $\theta = C^{te} \neq 0$.

- Si le mouvement est circulaire uniforme, alors $\rho = C^{te} = \rho_0$ et $\frac{d\theta}{dt} = C^{te} = \omega$. De ce fait, $\frac{d\rho}{dt} = 0$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, l'expression de l'accélération devient : $\vec{a} = -\rho_0\omega^2.\vec{e_\rho}$ et l'expression de la vitesse devient : $\vec{v} = \rho_0\omega.\vec{e_\theta}$. Dans ce cas uniquement, le repère cylindrique et le repère de Frenet correspondent (presque !) : $\vec{e_\rho} = -\vec{e_N}$ et $\vec{e_\theta} = \vec{e_T}$

- Si le mouvement est circulaire uniformément accéléré ($\rho = C^{te} = \rho_0$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2} = C^{te} = \dot{\omega}$), il vient $\vec{a} = -\rho_0\omega^2_{(t)}.\vec{e_\rho} + \rho_0\dot{\omega}.\vec{e_\theta}$ et $\vec{v} = \rho_0.\omega_{(t)}.\vec{e_\theta}$

- Si le mouvement est non-uniformément accéléré, nous avons uniquement $\rho = C^{te} = \rho_0$ soit $\dot{\rho} = 0$. Il vient : $\vec{a} = -\rho_0\dot{\theta}^2.\vec{e_\rho} + \rho_0\ddot{\theta}.\vec{e_\theta}$ et $\vec{v} = \rho_0.\omega_{(t)}.\vec{e_\theta}$

3.7.3 Autres types de mouvement...

- Le mouvement hélicoïdal, à étudier de préférence dans le repère cylindrique, ou $\rho = C^{te}$ mais $z = z_{(t)}$
- Le mouvement de spirale, à étudier de préférence dans le repère cylindrique, ou $z = 0$ et $\rho = \rho_{(t)}$
- Le mouvement cycloïdal, à étudier de préférence dans le repère cartésien (ex : la trajectoire de la valve d'une roue de vélo en circulation)
- Les mouvements vibratoires, à étudier dans l'un ou l'autre des repères selon les symétries de la vibration
- Le mouvement elliptique, le mouvement hyperbolique, le mouvement parabolique etc...