Cours de Probabilités & Statistique (L1 MI)

A. MENNI

Chapitre4 : Calcul de Probabilités

---

1 Introduction.

La notion de probabilité permet de quantifier le hasard. Ce dernier exprime un manque de cause à effet d'un événement. Dans une perspective déterministe, la notion de hasard est liée à l'incapacité d'appréhender complètement certains phénomènes dans leur complexité naturelle et donc à les prévoir infailliblement. Dans un contexte spirituel, on parle de providence, de destin, de fatalité...etc.

En résumé, le hasard n'est en fait qu'une expression de notre ignorance des conséquences liées au phénomène étudié et de notre méconaissance des lois qui régissent son déroulement. La probabilité quant à elle est une mesure de cette ignorance.

2 Expérience Aléatoire et son Espace Fondamental

Un phénomène aléatoire est un processus lié au hasard (donc à l'incertain!). Le mot "**Aléatoire**" vient du latin "**alea**" qui signifie "**les dés**".

Une expérience aléatoire est un phénomène aléatoire dont on ne peut pas connaître le résultat mais dont on peut prévoir l'ensemble de tous les résultats possibles. Cet ensemble est appelé **Espace Fondamental** de l'expérience aléatoire et il est en général noté Ω. Le nombre d'éléments appartenant à Ω est appelé **cardinal de** Ω et il est noté $|\Omega|$.

Exemples

1. Lancer une pièce de monnaie.

2. Lancer un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

3. Lancer deux fois de suite un dé.

4. Lancer une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention d'un Pile.

5. Tirer une boule dans une urne contenant cinq boules de couleurs différentes : Bleue, Rouge, Verte, Jaune et Noire.

6. Tirer simultanément deux boules d'une urne contenant trois boules numérotées de 1 à 3.

7. Tirer successivement deux boules d'une urne contenant trois boules numérotées de 1 à 3 et ne pas remettre la boule tirée dans l'urne.

8. Tirer successivement deux boules d'une urne contenant trois boules numérotées de 1 à 3 en remettant, à chaque tirage, la boule tirée dans l'urne.

3 Evénements

On appelle **événement aléatoire** (ou tout simplement **événement**) toute partie de l'espace fondamental Ω. Les éléments de Ω sont appelés **événements élémentaires**. En calcul des probabilités, les événements sont nommés par des lettres majuscules qui peuvent parfois être indicées.

Exemples

On reprend dans l'ordre les espaces fondamentaux donnés en exemples dans le paragraphe précédent.

1. A="Obtenir un Pile".

2. A="Obtenir un nombre pair".

3. A_1="Obtenir un nombre pair et un nombre impair".

   A_2="La somme des deux nombres obtenus vaut quatre".

4. A_1="Obtenir une face".

   A_2="Obtenir deux fois face"

   A_3="Obtenir un nombre pair de faces"

5. A_1="Tirer une boule rouge ou noire".

   A_2="Tirer une boule blanche"

   A_3="Tirer une boule noire et une boule verte"

6. A="Tirer les boules numéros 1 et 2"

7. A="Tirer les boules numéros 3 et 2"

8. A="Tirer les boules numéros 1 et 2"

Remarques

- $A = \emptyset$ est appelé **Evénement impossible**
- $A = \Omega$ est appelé **Evénement certain**

4 Tribu d'événements

Une famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω est appelée **Tribu** ou $\sigma-$**algèbre** si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
2. $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$ où $\bar{A} = \Omega \setminus A$.
3. Si $A_n \in \mathcal{A}, \forall n = 1, 2, 3, \ldots, N,$ alors $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé **Espace Probabilisable**.

Remarque

La condition 3 reste valable dans le cas où la suite des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infinie.

Exemple

Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu appelée "Tribu triviale" ou "grossière".
- $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$ est la plus petite tribu contenant le singleton $\{1\}$.
- $\mathcal{A}_3 = \{1\}$ n'est pas une tribu.

5 Réalisation d'un événement

Soient Ω un ensemble fondamental et ω le résultat observé de l'expérience aléatoire associée. On dit qu'un événement A est réalisé si $\omega \in A$.

Exemple

L'expérience aléatoire consiste à lancer un dé. L'espace fondamental $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Soit l'événement $A =$ " obtenir un nombre pair". $A = \{2, 4, 6\}$.

A est réalisé si le résultat observé de l'expérience aléatoire est pair.

5.1 Propriétés

Soient A et B deux événements dans $\mathcal{A}$.

1. Si $A \subseteq B$ alors : A est réalisé $\Rightarrow$ B est réalisé.
2. A ou B se réalise $\Leftrightarrow$ $A \cup B$ se réalise. (le "ou" est ici inclusif)
3. A et B se réalisent $\Leftrightarrow$ $A \cap B$ se réalise.
4. A est réalisé $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ est non réalisé.
5. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
6. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

5.2 Définitions

1. Deux événements A et B sont dits **incompatibles** ou **s'excluent mutuellement** s'ils ne peuvent se réaliser en même temps $(A \cap B = \emptyset)$.
2. Les deux événements A et $\bar{A}$ sont dits **contraires** si $A \cup \bar{A} = \Omega$.

6 Calcul de Probabilités

6.1 Espace probabilisé

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et soit P une mesure de probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
P est une application

$$\begin{aligned} P :&\mathcal{A} \to [0,1] \\ &\omega \mapsto P(\omega) \end{aligned}$$

et elle vérifie $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé **espace de probabilité** ou **espace probabilisé**

Théorème 1

Soient A et B deux événements quelconques de $\mathcal{A}$. Alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6.2 Propriétés

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et A et B deux événements de $\mathcal{A}$. Alors :

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
3. Si $A \subseteq B$ alors $P(A) \leq P(B)$
4. $P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$
5. $P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

Démonstration

1.

2.

3.

4.

5.

6.3 Formule de Poincaré

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements de $\mathcal{A}$. Nous avons

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right)$$

Application

Pour $n = 3$ on a :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =& P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ & - \Big(P(A_1 \cap A_2) + (P(A_1 \cap A_3) + (P(A_2 \cap A_3) \Big) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

6.4 Probabilité d'un événement

Un événement A de $\mathcal{A}$ se réalise avec une probabilité (une chance) définie par

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple

L'expérience aléatoire consiste à lancer un dé. On veut calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair. Soit alors $A =$ "obtenir un nombre pair" $= \{2, 4, 6\}$. On a :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

6.5 Evénement certain et Evénement impossible

Un événement A est dit certain si et seulement si $P(A) = 1$.

Exemple

Un événement A est dit impossible si et seulement si $P(A) = 0$.

Exemple

7 Probabilité Conditionnelle (Formule de Bayes)

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, A un événement telle que $P(A) > 0$ et B un événement quelconque de $\mathcal{A}$. On définit la probabilité de B sachant A par :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

Exemple

Dans l'expérience de la lancée d'un dé, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soient $A =$"Le résultat obtenu est pair" et $B =$"Le résultat obtenu est inférieur ou égal à 4". On a donc $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ et donc $A \cap B = \{2, 4\}$. Il en découle que

$$P(B/A) = \frac{|A \cap B|}{|A|} = \frac{2}{3}$$

8 Formule des Probabilités Totales

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements dans $\mathcal{A}$ formant un système complet telle que $P(A_i) > 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Soit B un événement défini sur la même tribu $\mathcal{A}$. Alors

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

Exemple

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant respectivement 5, 6 et 9 boules. Les boules de U_1 sont numérotées de 1 à 5. Les boules de U_2 sont numérotées de 6 à 11. Celles de U_3 sont numérotées de 12 à 20.

On tire au hasard une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre premier ?

Soit $B =$"obtenir un nombre premier".

Soient $A_i =$"Tirer la boule dans U_i", $i = 1, 2, 3$.

Il est évident que A_1, A_2 et A_3 forment un système complet d'événement car

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega = \{1, 2, \ldots, 20\} \text{ et } A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall (i, j)$$

En effet on a $A_1 = \{1, \ldots, 5\}$, $A_2 = \{6, \ldots, 11\}$ et $A_3 = \{12, \ldots, 20\}$. Donc

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B/A_i) \\ &= P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3) \\ &= \frac{5}{20} \times \frac{3}{5} + \frac{6}{20} \times \frac{2}{6} + \frac{9}{20} \times \frac{3}{9} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

9 Événements indépendants

9.1 Définition.1

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

1. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
2. $P(A/B) = P(A)$
3. $P(A/\bar{B}) = P(A)$
4. $P(A/B) = P(A/\bar{B})$

9.2 Définition.2

Les événements A_1, A_2, $\ldots$, A_n sont dits **mutuellement indépendants** si et seulement si

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$