على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة بحدّها الأوّل u_0 حيث $u_0=-2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$.

1) أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<2$.

ب) عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرّفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n=2u_n-4$.

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأوّل v_0.

ب) جد عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

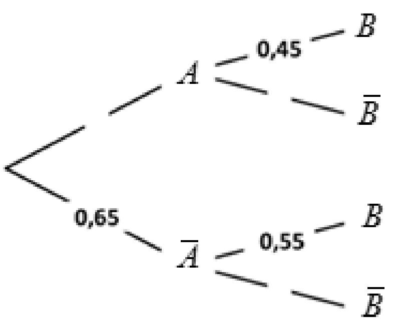
3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الشّجرة المقابلة تنمذج تجربة عشوائية حيث A و B حادثتان، $\overline{A}$ و $\overline{B}$ حادثتاهما العكسيتان على الترتيب .

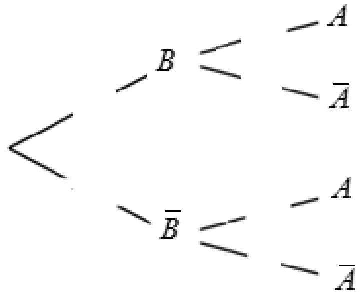
1) انقل وأكمل الشّجرة المقابلة ثمّ احسب الاحتمالات الآتية :

$P(A\cap B)$ و $P(A\cap\overline{B})$.



2) أ) احسب الاحتمالات الآتية: $P(B)$ ، $P_B(A)$ و $P_{\overline{B}}(A)$

ب) انقل وأكمل الشّجرة المقابلة .



التمرين الثالث: (04 نقاط)

الجدول الآتي يعطي نسبة الأمية في بلد ما، خلال الفترة الممتدة من1948 إلى2008 .

السّنة	1948	1958	1968	1978	1988	1998	2008
الرتبة x_i	1	2	3	4	5	6	7
نسبة الأمية y_i	14	92	74,6	60	31	38,4	22

1) أ) احسب إحداثيي النّقطة المتوسطة G. (تدور النتائج إلى 10^{-2})

ب) مثّل سحابة النّقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد (على حامل محور الفواصل $1cm$ يمثل رتبة واحدة وعلى حامل محور التراتيب $1cm$ يمثّل 10%) .

2) بيّن أنّ معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدّنيا هي : $y=-4,53x+65,54$.

3) باستعمال التّعديل الخطّي السّابق ، قدّر نسبة الأمية في سنة 2038 في هذا البلد.

4) ابتداءً من أيّ سنة تكون نسبة الأمية في هذا البلد أقل من 5%.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) لتكن g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2x-1-e^{2x}$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g .

2) استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2-x-\frac{1}{2}e^{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (يعطى: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}=+\infty$)

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,25<\alpha<-0,24$.

ب) أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A إحداثياها $(0;\frac{-1}{2})$.

جـ) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النّقطة A .

4) ارسم (T) و (C_f) .

5) أ) احسب بالسّنتمتر مربع المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ، $x=\alpha$ و $y=0$.

ب) تحقّق أنّ $A(\alpha)=\frac{1}{3}(4\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha+3)cm^2$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يمثّل الجدول الآتي تطور إنتاج مصنع للإسمنت خلال الفترة الممتدة من 2010 إلى 2014.

السّنة	2010	2011	2012	2013	2014
ترتيب السّنوات x_i	1	2	3	4	5
الإنتاج بالمليون طن y_i	4,8	5	5,5	6,2	7

1) عيّن إحداثيي النّقطة المتوسطة G ثمّ مثّل سحابة النّقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد
($1cm$ يمثل رتبة واحدة على حامل محور الفواصل ، $1cm$ يمثل 1 مليون طن على حامل محور التراتيب)

2) لتكن $y=ax+b$ معادلة (Δ)، مستقيم الانحدار بالمربعات الدّنيا للسّلسلة $(x_i\ ;\ y_i)$.
بيّن أنّ: $a=0,56$ ثمّ احسب b. (تعطى النّتيجة مدورة إلى 10^{-2})

3) من أهداف المصنع الوصول إلى إنتاج يفوق $8,45$ مليون طن في سنة 2017 .
هل يمكن تحقيق هذا الهدف باستعمال التعديل الخطي السّابق ؟ مع التبرير.

4) ابتداءً من أيّ سنة يتعدى إنتاج المصنع $10,17$ مليون طن في السّنة .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^2 والحد الأول v_0 حيث $v_0=1$. (e أساس اللوغاريتم النيبيري)

1) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$.

2) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (w_n) المعرّفتين كما يلي:
من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n=2n+4+e^{2n}$ و $u_n=w_n-v_n$.
بيّن أنّ : المتتالية (u_n) حسابية ، حدّد أساسها r و حدّها الأول u_0.

3) أثبت أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $4+6+8+\cdots+(2n+4)=(n+1)(n+4)$.

4) استنتج المجموع T_n بدلالة n حيث $T_n=w_0+w_1+\cdots+w_n$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

في كل حالة من الحالات الآتية ، اقتُرحت ثلاث إجابات واحدة منها فقط صحيحة، عيّن الاقتراح الصّحيح مع التّبرير.

1) A و B حادثتان مستقلتان .
إذا كان : $P(A\cap B)=0,03$ و $P(A)=0,4$ فإنّ :

أ) $P(B)=0,43$ ب) $P(B)=0,075$ جـ) $P(B)=0,37$

2) A و B حادثتان.

إذا كان : $P(A\cap B)=\dfrac{3}{100}$ و $P_A(B)=\dfrac{1}{4}$ فإنّ :

أ) $P(A)=\dfrac{3}{25}$ **ب)** $P(A)=\dfrac{4}{25}$ **جـ)** $P(A)=\dfrac{3}{400}$

3) A و B حادثتان .

إذا كان : $P(A)=0,4$ و $P(B)=0,5$ و $P(\overline{A\cup B})=0,55$ فإنّ :

أ) $P(A\cap B)=0,2$ **ب)** $P(A\cap B)=0,45$ **جـ)** $P(A\cap B)=0,9$

4) الجدول التّالي يُعرّف قانون احتمال تجربة عشوائية.

x_i	-2	-1	α	3
$P(X=x_i)$	0,12	0,50	β	0,30

قيمتا α و β حتّى يكون الأمل الرّياضياتي للمتغير العشوائي X يساوي $0,32$ هما :

أ) $\alpha=1$ و $\beta=0,08$ **ب)** $\alpha=2$ و $\beta=0,03$ **جـ)** $\alpha=2$ و $\beta=0,08$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I) نعتبر الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^3-x^2-1$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,46<\alpha<1,48$.

4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) مؤسسة صناعية تنتج يوميا كميّة q (مقدرة بالطّن) من منتوج بكلفة متوسطة C_M (مقدرة بملايين الدّنانير) معرّفة على $[0;10]$ بـ: $C_M(q)=\dfrac{1}{2}q^2-q+1-\dfrac{1}{2}\ln\left(q^2+1\right)$.

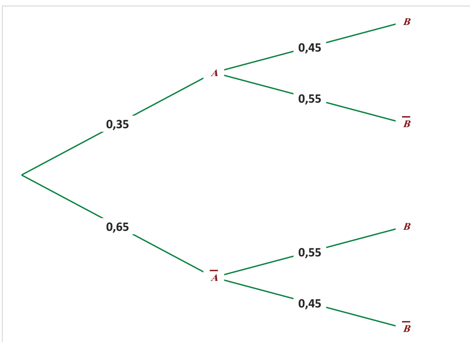
1) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي q من $[0;10]$ ، $C'_M(q)=\dfrac{g(q)}{q^2+1}$.

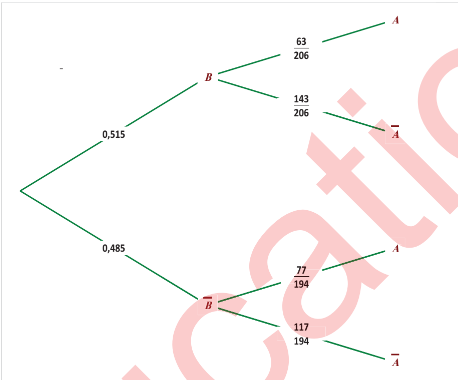
2) عيّن اتجاه تغيّر الكلفة المتوسطة C_M ثمّ شكّل جدول تغيراتها. (نأخذ $\alpha\simeq1,47$)

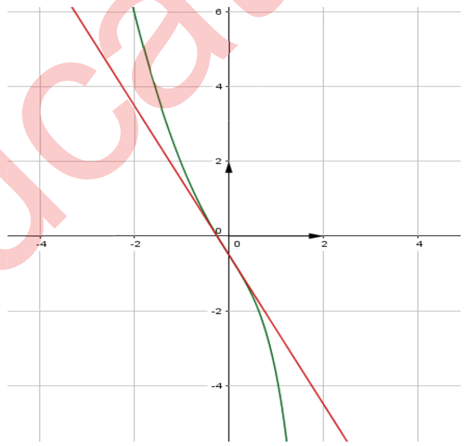
3) عيّن الكمّية التي تُنتج يوميا بأقل كلفة متوسطة ثمّ حدّد هذه الكلفة المتوسطة .

4) ما هي الكلفة الإجمالية C لإنتاج 2 طن يوميا؟

انتهى الموضوع الثاني

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجزأة
الموضوع الأول		
التمرين الأول: (04 نقاط)		
1) أ) لما $n=0$ ؛ $u_0=-2$ و $u_0<2$ فالخاصية صحيحة من أجل $n=0$ نفرض $u_n<2$ ومنه $\frac{1}{2}u_n+1<2$ أي $u_{n+1}<2$ وعليه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n<2$	0.25 0.25 0.25	01.50
ب)المتتالية (u_n) متزايدة تماما لأن $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{2}(u_n-2)$ و $u_n-2<0$ ومنه $u_{n+1}-u_n\succ 0$ بما أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2 ومتزايدة تماما فهي متقاربة .	0.50 0.25	
2) أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ أساسها $q=\frac{1}{2}$ حدّها الأوّل $v_0=-8$	0.50 0.25 0.25	02.00
ب) عبارة v_n بدلالة n : $v_n=-8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ استنتاج عبارة u_n بدلالة n : $u_n=-4\left(\frac{1}{2}\right)^n+2$	0.50 0.50	
3) المجموع S_n : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n=8\left(\frac{1}{2}\right)^n+2n-6$	0.50	00.50
التمرين الثاني : (04 نقاط)		
1) نقل واكمال الشجرة 	0.50	01.50
$p\ A\cap B\ =p\ A\ \times p_A\ B\ =0,1575$ $p\ A\cap \overline{B}\ =p\ A\ \times p_A\ \overline{B}\ =0,1925$	0.50 0.50	

عناصر الإجابة	العلامة: مجزأة	العلامة: مجزأة
2) أ) حساب الاحتمالات $p(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=0,515$	0.50 0.50	02.50
$p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{63}{206}$	0.25	
لدينا $P(\overline{B})=p(A\cap\overline{B})+p(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(B)=0,485$	0.50	
ومنه يكون لدينا $P_{\overline{B}}(A)=\dfrac{p(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{77}{194}$		
ب) انقل وأكمل الشّجرة المقابلة . 	0.75	
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
1) أ) احسب إحداثيي النّقطة المتوسطة G.	01.00	02.00
ب) مثّل سحابة النّقط $M_i(x_i;y_i)$	01.00	
2) بيّن أنّ معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدّنيا هي : $y=-4,53x+65,54$.	01.00	01.00
3) باستعمال التّعديل الخطّي السّابق ، قدّر نسبة الأمية في سنة 2038 في هذا البلد.	0.50	0.50
4) ابتداءً من أيّ سنة تكون نسبة الأمية في هذا البلد أقل من 5% .	0.50	0.50
التمرين الرابع: (08 نقاط)		
I) 1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g . $g'(x)=2(1-e^{2x})$ إشارة $g'(x)$ g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ ومتزايدة تماما على $]-\infty;0]$	0.25 0.50 0.25	01.75
2) استنتج إشارة $g(x)$.	0.75	
II) 1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.	2x0.50	01.00

<table>
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجزأة</th></tr>
<tr><td>2) $f'(x)=2x-1-e^{2x}=g\ x$
$f'\ x<0$
جدول التغيّرات
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$ ↘ $-\infty$</td></tr>
</table>
</td><td>0.50
0.50
0.25</td><td>01.25</td></tr>
<tr><td>3) أ) تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,25<\alpha<-0,24$</td><td>0.50</td><td rowspan="3">01.50</td></tr>
<tr><td>ب) إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A إحداثياها $(0;\frac{-1}{2})$.</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>جـ) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة A
$\mathrm{T}:\ y=-2x-\frac{1}{2}$</td><td>0.50</td></tr>
<tr><td>4) رسم (T)

5) رسم المنحنى (C_f)</td><td>0.25
0.50</td><td>00.75</td></tr>
<tr><td>6) أ) المساحة $A(\alpha)$</td><td>01</td><td rowspan="2">01.75</td></tr>
<tr><td>ب) التحقق أنّ: $A(\alpha)=\frac{1}{3}\left(4\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha+3\right)cm^2$.</td><td>0.75</td></tr>
</table>

عناصر الإجابة	العلامة	
	مجزأة	مجزأة

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)		
1) إحداثيي النّقطة المتوسطة $G(3;5,7)$ تمثيل سحابة النّقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد	01.00 0.50	01.50
2) $a=0,56$ $b=5.7-0.56(3)=4.02$	0.50 0.50	01.00
3) الهدف محقق مع التبرير : رتبة 2017 هي 8 ومنه $y=0.56\times 8+4.02=8.5$	0.25 0.50	0.75
4) $0.56x+4.02>10.17$ ومنه $x>10.98$ وبتالي $x=11$ إذن السنة هي 2020	0.25 0.50	0.75
التمرين الثاني: (04 نقاط)		
1) $S_n=\dfrac{e^{2(n+1)}-1}{e^2-1}$	0.75	00.75
1- لدينا $w_n=u_n+v_n$ و $v_n=e^{2n}$ ومنه $u_n=2n+4$ (u_n)متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول $u_0=4$	0.50 2×0.50	01.50
2) اثبات أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $4+6+8+\cdots+(2n+4)=(n+1)(n+4)$ يمكن اعتبار المجموع كمجموع n حدا متتابعا لمتتالية حسابية حدها الأول 4 واساسها 2 او بالبرهان بالتراجع .	0.75	00.75
3) $T_n=(n+1)(n+4)+\dfrac{e^{2(n+1)}-1}{e^2-1}$.	01.00	01.00
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
1) الإجابة الصحيحة هي (ب) $p(B)=0.075$ التعليل: $p(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}=\dfrac{0.03}{0.4}=0.075$	0.25 0.25	00.50
2) الإجابة الصحيحة هي (أ) $p(A)=\dfrac{3}{25}$ التعليل: $p(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p_A(B)}=\dfrac{\frac{3}{100}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{25}=0.12$	0.25 0.75	01.00
3) الإجابة الصحيحة هي (ب) $p(A\cap B)=0.45$ التعليل: $p(A\cap B)=p(A)+p(B)+p(\overline{A\cup B})-1=0.4+0.5+0.55-1=0.45$	0.25 0.75	01.00

عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	 مجزأة
4) الإجابة الصحيحة هي (ج) $p(X\geq 2)=0.38$ التعليل: $0.12+0.50+\beta+0.30=1$ ومنه $\beta=0.08$ $E(x)=-2\times0.12-1\times0.50+\alpha\times0.08+3\times0.30=0.16+0.08\alpha$ $0.16+0.08\alpha=0.32$ ومنه $\alpha=2$	0.50 0.50 0.50	01.50
التمرين الرابع: (08 نقاط)		
I) 1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.	0.50	00.50
2) $g'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$ اشارة $g'(x)$ g متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0]$ و $\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ ومتناقصة تماما على $\left[0;\frac{2}{3}\right]$ جدول التغيرات: $\begin{array}{c\|ccccccc} x & -\infty & & 0 & & \frac{2}{3} & & +\infty \\ \hline g'(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \\ \hline g(x) & -\infty & \nearrow & -1 & \searrow & -\frac{31}{27} & \nearrow & +\infty \end{array}$	0.50 0.25 0.25 0.50	01.50
3) تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}46<\alpha<1{,}48$.	0.50	00.50
4)استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x . $g(x)\prec 0$ من اجل $x\in]-\infty;\alpha[$ و $g(x)\succ 0$ من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ و $g(\alpha)=0$	0.50	00.50
II) 1) من أجل كل q من $]0;+\infty[$: $C'_M(q)=\dfrac{q^3-q^2-1}{q^2+1}$	01.00	01.00
2) إشارة $C'_M(q)$ من إشارة $g(q)$ منه $q=\alpha$ C_M متناقصة تماما على $]q;+\infty[$ و متزايدة تماما على $]-\infty;\ q[$. جدول التغيرات:	01.00 01.00	02.00
3) عدد الوحدات هو: $q=\alpha\times100=147$ وحدة بكلفة	01.00	01.00
4) الكلفة الإجمالية C لإنتاج 2 طن هي $390000DA$	01.00	01.00