Systèmes de Com.
Partiel du 27 mars 2008
Correction

—

1 Questions de cours : voir cours.

2.1 Codage de canal

a) dim (G) = 3 × 6
Donc les mots à coder sont de taille 3,
les mots de code sont de taille 6.
→ rendement = $3/6 = 1/2$

b) Pour chaque mot m de 3 bit,
le mot de code correspondant est $c = mG$

m	c	P_H
000	000 000	0
001	001 111	4
010	010 101	3
011	011 010	3
100	100 110	3
101	101 001	3
110	110 011	4
111	111 100	4

distance min = poids de Hamming $P_H > 0$ minimal
= 3

Pouvoir de détection $= d_{min} - 1 = 2$

Pouvoir de correction $= \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor = 1$

c) Les distances entre r et les différents mots de code sont respectivement 5, 3, 4, 2, 4, 2, 1, 3

On décode donc 110011

Le décodage est fiable, car l'erreur correspond au pouvoir de correction

2.2 Codage de source

a) $(1-p)\log_2(1-p) = \frac{1-p}{\ln 2}\ln(1-p)$

Or $\ln(1-p) \sim -p$ quand $p \to 0$

Donc $(1-p)\log_2(1-p) \sim \frac{-p}{\ln 2}$

Par conséquent, $\frac{(1-p)\log_2(1-p)}{p\log_2 p} \xrightarrow[p \to 0]{} 0$

Comme $H(X) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$,

$H(X) \sim -p\log_2 p$

b)

Mot	probabilités
00	$(1-p)^2$
01	$p(1-p)$
10	$p(1-p)$
11	p^2

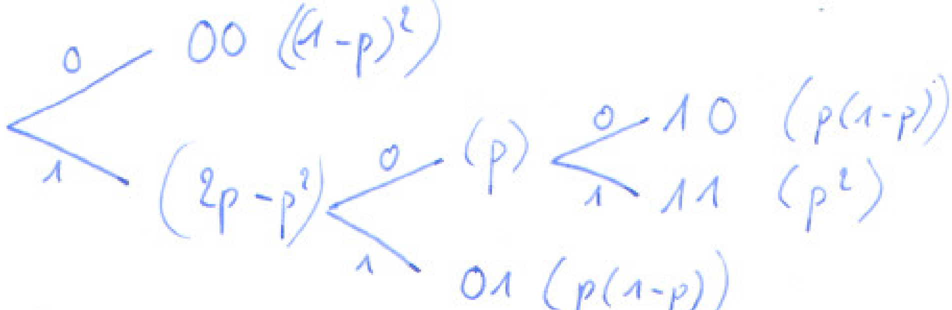
La source étant sans mémoire, les éléments binaires sont indépendants, donc : $P(ij) = P(i)P(j)$

L'entropie est l'information moyenne par symbole
Si l'on groupe 2 symboles indépendants en 1 seul, on double donc l'info moyenne par symbole.

$$H(X^2) = 2H(X) \sim -2p\log_2 p$$

Codage de Huffman de X^2 :

Comme $p \to 0$, $p^2 < p(1-p) < (1-p)^2$



On a donc le codage suivant :

00 → 0
01 → 11
10 → 100
11 → 101

Longueur moyenne des mots de code :

$L = \sum_i p(x_i) n_i$ avec | x_i le $i^{\text{ème}}$ symbole
| n_i sa longueur

$= (1-p)^2 + 2p(1-p) + 3p(1-p) + 3p^2$

$= 1 + 3p - p^2$

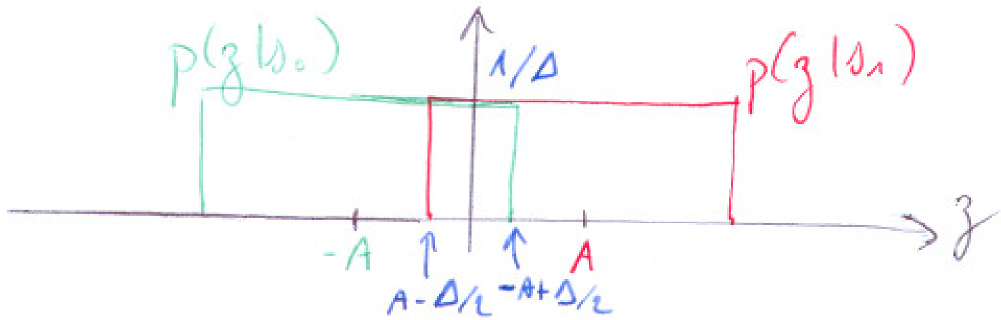
Efficacité : $\eta_2 = \dfrac{H(X^2)}{L} = \dfrac{-2p\log_2 p}{1+3p-p^2}$

Dans a), $\eta = -p\log_2 p$

Comme $p \to 0$, $\eta_2 \simeq 2 \times \eta$: efficacité doublée !

2.3 Détection de symboles

a) $z|s_i$ est une variable aléatoire de densité de probabilité uniforme autour de s_i :



b) $$P(s_0|z) \underset{r_1}{\overset{r_0}{\gtrless}} P(s_1|z)$$

(Règle de Bayes) $$\frac{p(z|s_0)P(s_0)}{p(z)} \underset{r_1}{\overset{r_0}{\gtrless}} \frac{p(z|s_1)P(s_1)}{p(z)}$$

(le cas $p(z)=0$ n'est pas envisagé, puisque par définition, il n'arrive jamais !)

Comme s_0 et s_1 sont équiprobables,

$$p(z|s_0) \underset{r_1}{\overset{r_0}{\gtrless}} p(z|s_1)$$

D'après les courbes de densité de probabilité,

$z < A - \frac{\Delta}{2} \rightarrow r_0$

$z > -A + \frac{\Delta}{2} \rightarrow r_1$

$z \in [A - \frac{\Delta}{2} ; -A + \frac{\Delta}{2}] \rightarrow$ pas de décision car $p(z|s_0) = p(z|s_1)$

c) $P(r_0 | s_1) = P(z < 0 | s_1)$

$$= \int_{-\infty}^{0} p(z | s_1)\, dz$$

$$= \int_{A-\frac{\Delta}{2}}^{0} \frac{1}{\Delta}\, dz$$

$$= \frac{1}{\Delta} \times \left(\frac{\Delta}{2} - A\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{A}{\Delta}$$

$P(r_1 | s_0) = P(z > 0 | s_0)$

$$= \int_{0}^{+\infty} p(z | s_0) dz$$

$$= \int_{0}^{\frac{\Delta}{2} - A} \frac{1}{\Delta}\, dz$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{A}{\Delta}$$

d) erreur $= \{(s_0, r_1) ; (s_1, r_0)\}$

$P_e = P(s_0, r_1) + P(s_1, r_0)$

(événements disjoints)

$$= P(r_1 | s_0) P(s_0) + P(r_0 | s_1) P(s_1)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\Delta}\right) \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\Delta}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{A}{\Delta}$$