Théorie des jeux — TD 1
Élements de correction
École nationale des ponts et chaussées

Joon Kwon & Bruno Ziliotto

mardi 24 octobre 2017

Jeux sous forme normale en stratégies pures

Exercice 1. — *Équilibres de Nash et dominance dans les jeux* 2×3. — En utilisant les définitions du cours, on obtient :

1) $f \geqslant b$; $f \geq d$; $e \geq k$.
2) $a > g$, $c > i$ et $e > k$.
3) $d \geqslant b$, $j \geqslant h$, $d \geqslant f$ et $j \geqslant l$.

Exercice 2. — *Compétition à la Bertrand.* — Les ensembles de stratégies sont $S_1 = S_2 = \mathbb{R}_+$. La fonction de paiement pour l'entreprise i est :

$$g_i(s_i, s_j) = \begin{cases} s_i & \text{si} \quad s_i < s_j, \\ 0 & \text{si} \quad s_i > s_j, \\ s_i/2 & \text{si} \quad s_i = s_j. \end{cases}$$

$(0, 0)$ est le seul équilibre de Nash. En effet,

$$\mathrm{BR}_i(s_j) = \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si } s_j = 0 \\ \emptyset & \text{si } s_j > 0. \end{cases}$$

Exercice 3. — *Passager clandestin.* —

2) Le jeu est donné par la matrice suivante.

	0	50
0	65, 65	−115, 50
50	50, 115	100, 100

Il s'agit d'un dilemne du prisonnier.

3) Pour tout $s_i > 0$, on a $g_i(0, s_{-i}) > g_i(s_i, s_{-i})$. 0 est une stratégie strictement dominante pour le joueur i. Et ce, pour tout joueur i. Donc le profil $(0, \dots, 0)$ est composé de stratégies strictement dominantes. C'est donc l'unique équilibre de Nash. Le paiement est alors de 65 pour chaque joueur. Or, l'optimum social est atteint par le profil $(50, \dots, 50)$ qui correspond à un paiement égal à $50n$ pour chaque joueur.

Exercice 4. — *Jugement majoritaire.* —

1) Pour $N = 2$, $a_1 = 5$ et $a_2 = 5$, on a $\mathrm{BR}_1(10) = \{0\}$ et $\mathrm{BR}_1(0) = \{10\}$. Donc le joueur 1 n'a pas de stratégie dominante. De même pour le joueur 2.
2) Montrons que le profil $(s_1, \dots, s_N)$ où $s_i = a_i$ pour tout i est un équilibre de Nash en stratégies dominantes. Soit i un juge, $(s_1, \dots, s_N)$ un profil de stratégies, et supposons dans un premier temps que $a_i \geqslant x(s_1, \dots, a_i, \dots, s_N)$. Montrons que

$$x(s_1, \dots, a_i, \dots, s_N) \geqslant x(s_1, \dots, s_i, \dots, s_N).$$

Si $s_i \leqslant a_i$, c'est vrai par monotonie de la médiane. Si $s_i \geqslant a_i$, on a même égalité dans la relation ci-dessus par propriété de la médiane. On a donc

$$\begin{aligned} g_i(a_i, s_{-i}) &= -\left|a_i - x(s_1, \dots, a_i, \dots, s_N)\right| \\ &= -a_i + x(s_1, \dots, a_i, \dots, s_N) \\ &\geqslant -a_i + x(s_1, \dots, s_i, \dots, s_N) \\ &= -\left|a_i - x(s_1, \dots, s_i, \dots, s_N)\right| \\ &= g_i(s_i, s_{-i}). \end{aligned}$$

On raisonne de façon similaire lorsque $s_i \geqslant a_i$. On a donc montré que $s_i = a_i$ est une stratégie dominante pour le joueur i. Le profil $(a_1, \dots, a_N)$ est donc un équilibre de Nash en stratégies dominantes.

Exercice 5. — *Enchères au second prix.*

1) Les joueurs sont les agents $i \in \{1, \dots, N\}$. Les ensembles de stratégies sont $S_1 = \dots = S_N = \mathbb{R}_+$, qui correspondent à l'ensemble des prix que les jouers peuvent proposer. Soit $i \in \{1, \dots, N\}$.
Pour $s_{-i} \in S_{-i}$, on note $M_i(s_{-i}) := \max_{j \neq i} s_j$. Le paiement du joueur i s'écrit

$$g_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_i < M_i(s_{-i}) \\ \frac{v_i - M_i(s_{-i})}{\mathtt{Card}\left\{j \in \{1, \dots, N\},\, s_j = s_i\right\}} & \text{si } s_i \geq M_i(s_{-i}). \end{cases}$$

Lorsqu'il y a plusieurs meilleures offres, l'issue du jeu est aléatoire. On prend alors comme paiement l'espérance du paiement réalisé. Le terme $1/m$ dans le paiement correspond à la probabilité que le joueur i obtienne l'objet, s'il a fait la meilleure offre et si $m-1$ autres agents ont fait la même offre que lui.

2) Il suffit de montrer que v_i est une stratégie dominante pour le joueur i. Soit $s = (s_1, \dots, s_N)$ un profil de stratégies. Montrons que $g_i(v_i, s_{-i}) \geqslant g_i(s_i, s_{-i})$.
   — Si $s_i < M_i(s_{-i})$, on a $g_i(s_i, s_{-i}) = 0$ et on peut voir facilement qu'on a toujours $g_i(v_i, s_{-i}) \geqslant 0$. Donc $g_i(v_i, s_{-i}) \geqslant g_i(s_i, s_{-i})$.
   — Si $s_i \geqslant M_i(s_{-i})$ et $v_i \leqslant M_i(s_{-i})$, on a $g_i(v_i, s_{-i}) \geqslant 0 \geqslant g_i(s_i, s_{-i})$.
   — Si $s_i \geqslant M_i(s_{-i})$ et $v_i > M_i(s_{-i})$, on a $g_i(s_i, s_{-i}) = v_i - M_i(s_{-i}) > g_i(s_i, s_{-i})$.
3) Ce mécanisme d'enchères incite les joueurs à annoncer leur vraie estimateur de l'objet. Ce ne serait pas le cas d'une enchère au premier prix.

Jeux sous forme normale en stratégies mixtes

Exercice 6. — Le premier jeu comporte un profil de stratégies strictement dominantes. C'est donc l'unique équilibre de Nash.

Le deuxième jeu a deux équilibres de Nash en stratégies pures : (E, E) et (C, C). Déterminons les équilibres de Nash en stratégies mixtes. Soit (x, y) un équilibre de Nash en stratégies mixtes (où on identifie x à la stratégie mixte $x\mathrm{E} + (1-x)\mathrm{C}$ du joueur 1, et de même pour y et le joueur 2). On a x ou y qui appartient à $]0,1[$. Supposons que c'est x. Alors, le joueur 1 est indifférent entre les actions sur lesquelles il assigne une probabilité strictement positive (c'est-à-dire E et C) ; cela s'écrit $g_1(1, y) = g_1(0, y)$, ou encore $y = 1 - y$, d'où $y = 1/2$. Puisque $y \in]0,1[$, par symmétrie, le même raisonnement donne $x = 1/2$. Réciproquement, on vérifie que $(1/2, 1/2)$ est bien un équilibre de Nash.

Le troisième admet deux équilibres de Nash en stratégies pures : (F, F) et (O, O). Soit (x, y) un équilibre de Nash en stratégies mixtes. Supposons par exemple que $x \in]0,1[$. Le joueur 1 est indifférent entre les stratégies pures appartenant au support de x : $g_1(1, y) = g_1(0, y)$, c'est-à-dire $2y = 1 - y$, ou encore $y = 1/3$. Puisque $y \in]0,1[$, un raisonnement similaire donne $x = 1/3$. Réciproquement, $(1/3, 1/3)$ est bien un équilibre de Nash.

Le quatrième jeu d'admet pas d'équilibre de Nash en stratégies pures. Soit (x, y) un équilibre de Nash en stratégies mixtes. Si on suppose $x \in]0,1[$, le principe d'indifférence pour le joueur 1 donne $y = 3/4$. De même, on obtient $x = 3/4$. Réciproquement, on vérifie que $(3/4, 3/4)$ est bien un équilibre de Nash.

Exercice 7. — *Jeu d'inspection.* —

1)

	I	L
T	$-g+w,\ -h+v-w$	$-g+w,\ v-w$
P	$0,\ -h$	$w,\ -w$

2) En procédant comme dans l'exercice précédent, on obtient que l'unique équilibre de Nash est $(1-h/w,\ g/w)$. Il donne la fréquence optimale à laquelle l'emplyeur doit inspecter son employé et celle à laquelle l'employé doit travailler.

Exercice 8. — *Le bon Samaritain.* — Les joueurs $\{1, \dots, \mathrm{N}\}$ sont les N témoins. Chaque joueur i a pour ensemble de stratégies pures $S_i = \{\mathrm{R}, \mathrm{I}\}$ (répondre, ignorer), et sa fonction de paiement s'écrit $g_i(\mathrm{R}, s_{-i}) = 1 - c$ et

$$g_i(\mathrm{I}, s_{-i}) = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } j \neq i \text{ tel que } s_j = \mathrm{R} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminons les équilibres de Nash en stratégies pures. Si tous les joueurs jouent I, chaque joueur obtient 0 et aurait alors strictement intérêt à dévier car il obtiendrait $1-c > 0$ en jouant R ; ce n'est pas un équilibre. Si plus d'un joueur joue R, chacun de ceux-là aurait strictement intérêt à dévier car il obtiendrait 1 en jouant I (au lieu de $1-c$) ; ce n'est pas un équilibre. Si un seul joueur joue R, on peut vérifier qu'aucun joueur n'a strictement intérêt à dévier. Les équilibres de Nash en stratégies pures sont les profils où un unique joueur joue R.

Déterminons les équilibres de Nash en stratégies mixtes. Soit $(x_1, \dots, x_\mathrm{N})$ un équilibre de Nash (où x_i est la probabilité que met le joueur i sur la stratégie pure R). Notons $m \geqslant 1$ le nombre de joueurs jouant une stratégie strictement mixte (i.e. non pure). Par symétrie, on peut supposer qu'il s'agit des m premiers. On a donc $x_i \in]0,1[$ pour $i \leqslant m$. Pour $i > m$, on a $x_i \in \{0,1\}$ et en fait $x_i = 0$ car si le joueur i jouait R, le joueur 1 aurait strictement intérêt à dévier en jouant la stratégie pure I et le profil ne constituerait pas un équilibre de Nash. Le cas $m = 1$ est à exclure car la meilleure réponse pour le joueur 1 serait alors $\{\mathrm{R}\}$: ce dernier aurait strictement intérêt à dévier de $x_1 \in]0,1[$ et le profil ne serait pas un équilibre de Nash. Supposons dorénavant que $m \geqslant 2$. Soit $i \leqslant m$ et déterminons la valeur de x_i. Puisque $x_i \in]0,1[$, le joueur i est indifférent entre R et I :

$$g_i(\mathrm{R}, x_{-i}) = 1 - c = 1 - \prod_{j \neq i}(1 - x_j) = g_i(\mathrm{I}, x_{-i}),$$

et donc

$$c = \prod_{j \neq i}(1 - x_j) = \prod_{\substack{j \leqslant m \\ j \neq i}}(1 - x_j).$$

En prenant le produit de cette relation pour $i' \leqslant m$, on a :

$$c^m = \prod_{i' \leqslant m} \prod_{j \neq i'}(1 - x_j) = \prod_{i' \leqslant m}(1 - x_{i'})^{m-1}$$

ou encore

$$c^{m/(m-1)} = \prod_{i \leqslant m}(1 - x_i).$$

En divisant cette relation par la seconde, on obtient

$$c^{1/(m-1)} = 1 - x_i,$$

d'où $x_i = 1 - c^{1/(m-1)}$. Réciproquement, montrons que les profils de stratégies ayant m $(2 \leqslant m \leqslant \mathrm{N})$ composantes égales à $1 - c^{1/(m-1)}$ et $\mathrm{N} - m$ composantes nulles sont des équilibres de Nash. Les relations ci-dessus montrent qu'un joueur i, pour $i \leqslant m$, jouant une stratégie non pure est indifférent entre R et I, et donc entre toutes ses stratégies mixtes : il n'a aucun intérêt strict à dévier. Un joueur i jouant $x_i = 0$ (i.e. la stratégie pure I) obtient un paiement égal à $1 - c^{m/(1-m)}$. S'il déviait pour son autre stratégie pure R, il obtiendrait $1-c$; or on peut voir que

$$1 - c^{m/(1-m)} \geqslant 1 - c \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{m}{m-1} \geqslant 1.$$

Il n'a donc aucun intérêt strict à dévier pour R, ni donc pour aucune stratégie mixant R et I. Il s'agit bien d'un équilibre de Nash.