Université A. Mira - Béjaia
Faculté des Sciences Exactes — Département de Mathématiques & MI

1° année MI — **Examen de Rattrapage d'Analyse 1** — 28 juin 2014

Durée: 2 heure

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements influent sur la notation

Exercice 1 (07 points)
Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} - 1 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1) Étudier la continuité et la dérivable de f sur $\mathbb{R}$, Calculer f'.

2) Étudier la continuité de f' en 0, la fonction f est - elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$? Justifier.

Exercice 2 (06 points)
Soit f la fonction définie sur $]-2, +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x+2) - x$$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions c_1 et c_2 telle que

$$-2 < c_1 < 0 < c_2$$

.

Exercice 3 (07 points)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1+n}} < 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

2) Montrer que

$$u_n > 2\sqrt{n+1} - 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

3) Déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

4) On pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$

4-a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

4-b) Déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

– – Bon courage – –