Durée: $1H30'$

Université de M'hamad Bougara de Boumerdès
Faculté des Sciences
Deuxième Année Master
Recherche Opérationnelle
Département de Mathématiques
Responsable du Module:
Mr. M. BEZOUI

Semestre 03

Examen Final de Théorie des Jeux

Barème: Exo1: 09pt=3+3+3 ✠ Exo2: 06pt=2+2+1+1 ✠ Exo3: 05pt=2+3

Remarque: Les Téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. *Pour chacun des jeux suivants,*

1. *Déterminer les équilibres de Nash en Stratégie pure*
2. *Déterminer l'équilibre de Nash en Stratégies mixtes.*
3. *Représenter les correspondances des meilleures réponses.*

		Joueur 2			
		a	b	c	d
Joueur 1	A	(10,1)	(1,-2)	(2,-1)	(0,0)
	B	(-1,0)	(9,7)	(8,8)	(0,1)
	C	(1,2)	(4,1)	(3,0)	(0,2)
	D	(0,0)	(8,8)	(9,9)	(1,10)

		J2	
		G	D
J1	H	(4,4)	(0,0)
	B	(4,1)	(4,0)

		J2	
		G	D
J1	H	(1,4)	(0,2)
	B	(1,2)	(0,4)

Exercice 2. *Considérons le jeu matriciel suivant:* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. *Écrire le jeu matriciel A sous sa forme normale, en précisant tous les éléments caractérisant ce jeu. Quels sont les qualificatifs associés à ce jeu ?*
2. *Calculer les stratégies de sécurité et les gains de sécurité des deux joueurs (Valeurs inférieures et supérieures).*
3. *Est ce que le jeu admet une valeur du jeu? Si oui donner cette valeur.*
4. *Le jeu matriciel A admet-il un point-selle? Si oui, le calculer.*

Exercice 3. *On considère un jeu où un frère et une soeur doivent se partager un gâteau de taille 1. Un partage du gâteau est donc un couple (x, y) où x est la part revenant à la soeur et y la part revenant au frère, avec $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, et $x + y = 1$.*

Le jeu se déroule de la manière suivante. La soeur commence par proposer un partage (x_1, y_1). Le frère décide alors d'accepter ou refuser ce partage. Si il accepte, le gâteau est partagé comme proposé et le jeu est terminé. Si il refuse, il propose à son tour un partage (x_2, y_2). La soeur décide alors d'accepter ou refuser ce partage. Si elle accepte, le gâteau est partagé comme proposé et le jeu est terminé. Si elle refuse, le frère et la soeur obtiennent chacun un quart du gâteau (le chat ayant entre temps mangé la moitié restante) et le jeu est terminé.

1. *Quelle est la classe du jeu? Ce jeu est-il à information parfaite?*
2. *Représentez ce jeu sous forme extensive et trouvez les équilibres parfaits en sous-jeu (en fonction de x_1, x_2, y_1, y_2).*

Université de M'hamad Bougara de Boumerdès
Faculté des Sciences
Deuxième Année Master
Recherche Opérationnelle
Département de Mathématiques
Responsable du Module:
Mr. M. BEZOUI

Durée: $1H30'$

Semestre 03

Correction de l'Examen Final de Théorie des Jeux

Barème: Exo1: 09pt=3+3+3 ✠ Exo2: 06pt=2+2+1+1 ✠ Exo3: 05pt=2+3

Remarque: Les Téléphones portables sont interdits.

Exercice 4.

		Joueur 2			
		a	*b*	*c*	*d*
Joueur 1	*A*	$(\underline{10},\underline{1})$	$(1,-2)$	$(2,-1)$	$(0,0)$
	B	$(-1,0)$	$(\underline{9},7)$	$(\underline{8},8)$	$(0,1)$
	C	$(1,\underline{2})$	$(4,1)$	$(3,0)$	$(0,2)$
	D	$(0,0)$	$(8,8)$	$(\underline{9},9)$	$(\underline{1},\underline{10})$

1. *L'équilibre de Nash en stratégie pure est* (A, a) *et* (D, d).

2. *Il est clair que chaque joueur va jouer l'une des stratégies qui lui procure un gain correspondant à l'un des deux équilibres de Nash, alors, le jeu sera réduit uniquement aux deux équilibres de Nash pour chaque joueur:*

   (a) $10y = (1 - y) \Rightarrow y = \frac{1}{9}$.

   (b) $x = 10 - 10x \Rightarrow x = \frac{10}{11}$.

3. *Correspondances des meilleures réponses, Voir la figure 1.1.*

		J2	
		G	*D*
J1	*H*	$(\underline{4},\underline{4})$	$(0,0)$
	B	$(\underline{4},\underline{1})$	$(\underline{4},0)$

1. *Équilibre de Nash en Stratégie Pure: Dans le jeu de la table 1.6, la stratégie D de J2 est strictement dominée par la stratégie G. Elle peut donc être éliminée pour l'étude des équilibres de Nash. Une fois cette élimination faite, J1 est indifférent entre H et B. Ce jeu possède donc deux équilibres de Nash en stratégies pures :* (H, G) *et* (B, G).

2. *Équilibre de Nash en stratégies Mixtes: Après réduction du jeu, on obtient le tableau suivant:*

		J2
		G
J1	*H*	$(4,4)$
	B	$(4,1)$

Alors le joueur J2, joue la stratégie G avec une probabilité $y = 1$. *Par contre le joueur J1, est indifférent entre la stratégie H et B. Qui lui procure le même gain (4). Donc l'équilibre de Nash est* $((x, (1 - x)), (1, 0)), x \in [0, 1]$.

3. *Correspondances des meilleures réponses, Voir la figure 1.2.*

		J2	
		G	*D*
J1	*H*	$(\underline{1},\underline{4})$	$(\underline{0},2)$
	B	$(\underline{1},2)$	$(\underline{0},\underline{4})$

1. *Les équilibres de Nash en stratégie pure:* (H, G) *et* (B, D).

2. *L'équilibre de Nash en stratégies mixtes:* $y = y \Longrightarrow x \in [0,1]$, $4x+2(1-x) = 2x+4(1-x) \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$
Alors l'équilibre de Nash est: $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (y, 1-y)), y \in [0,1]$.

3. *Les correspondances de MR. Voir la figure Fig.1.3.*

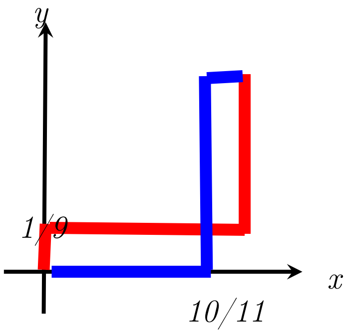


Fig. 1.1. Correspondances des MR du jeu 1

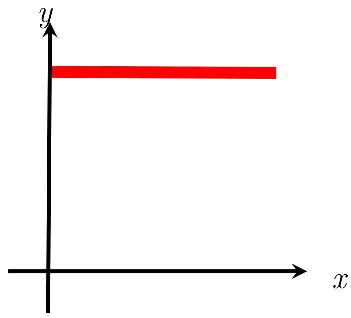


Fig. 1.2. Correspondances des MR du jeu 2

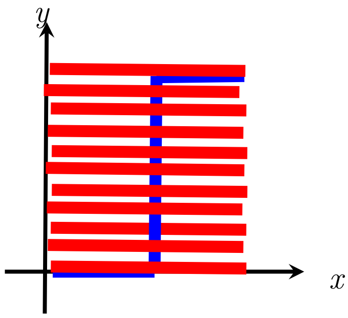


Fig. 1.3. Correspondances des MR du jeu 3

Exercice 5. *Considérons le jeu matriciel suivant:* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. *La forme normale du jeu est:*

$$< I, \{X_i\}_{i \in I}, \{f_{i\_}i \in I >,$$

où:

- $I = \{1, 2\}$ *est l'ensemble des deux joueurs*
- $X_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}\}$ *est l'ensemble des stratégies pures du joueur 1.*
- $X_2 = \{x_{21}, x_{22}\}$ *est l'ensemble des stratégies pures du joueur 2.*
- *Pour* f_1 *et* f_2*, voir le tableau suivant:*

		Joueur2	
		X_{21}	X_{22}
Joueur1	X_{12}	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	*1,-1*
	X_{12}	*1,-1*	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$
	X_{13}	*0*	*2,-2*

2. *Calcul des stratégies de sécurité des joueurs*

   (a) *Pour le joueur J1:*

$$\underline{v} = \left(\begin{array}{cc|c|c} & & \min & \max \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & \end{array} \right) = \frac{1}{2}.$$

   (b) *Pour le joueur 2:*

$$\overline{v} = \left(\begin{array}{ccc|c|c} & & & \min & \max \\ & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & 0 & 2 & 0 & \\ \max & 1 & 2 & & \\ \min & 1 & 2 & & \end{array} \right) = 1.$$

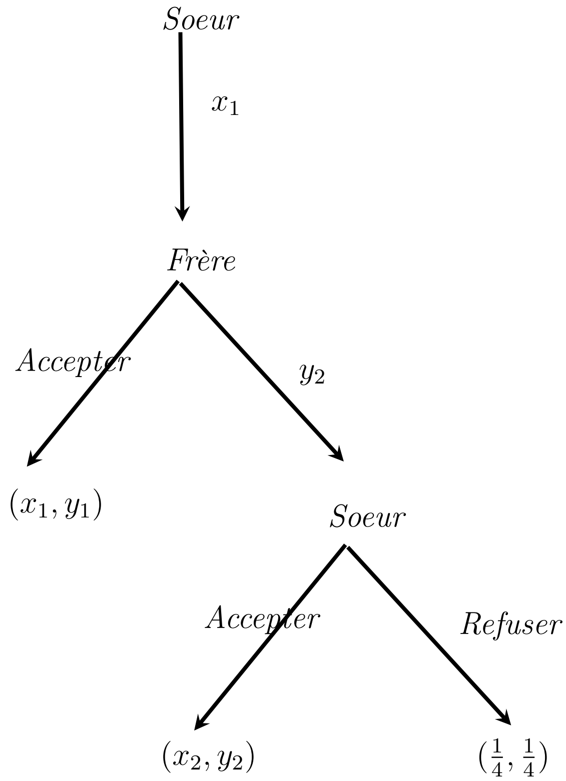
3. *On a $\underline{v} \neq \overline{v}$ donc le jeu n'admet pas de valeur en stratégie pure.*

4. *Comme le jeu n'admet pas de valeur en stratégies pures, alors le jeu n'admet pas de point-selle en stratégies pures.*

Exercice 6. *On considère un jeu où un frère et une soeur doivent se partager un gâteau de taille 1. Un partage du gâteau est donc un couple (x, y) où x est la part revenant à la soeur et y la part revenant au frère, avec $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, et $x + y = 1$.*

Le jeu se déroule de la manière suivante. La soeur commence par proposer un partage (x_1, y_1). Le frère décide alors d'accepter ou refuser ce partage. Si il accepte, le gâteau est partagé comme proposé et le jeu est terminé. Si il refuse, il propose à son tour un partage (x_2, y_2). La soeur décide alors d'accepter ou refuser ce partage. Si elle accepte, le gâteau est partagé comme proposé et le jeu est terminé. Si elle refuse, le frère et la soeur obtiennent chacun un quart du gâteau (le chat ayant entre temps mangé la moitié restante) et le jeu est terminé.

1. *Ce jeu est dynamique à information complète et parfaite. L'information est parfaite parce que à chaque étape du jeu, chaque joueur a connaissance commune de l'historique du jeu.*



2. *Représentation du jeu: Voir la figure suivante.*

3. *Résolution:*

   - *Si $x_2 > \frac{1}{4}$ et $y_2 \geq y_1$ (ce qui est obligatoire, puis que le frère a refusé y_1 et a proposé y_2), alors, l'équilibre parfait en sous jeu est $(x_1, Accepter; y_2)$.*
   - *Si $x_2 < \frac{1}{4}$ et $y_1 < \frac{1}{4}$ alors l'équilibre parfait en sous jeu est: $(x_1, Refuser; y_2)$.*
   - *Si $x_2 < \frac{1}{4}$ et $y_1 \geq \frac{1}{4}$ alors l'équilibre parfait en sous jeu est: $(x_1, Refuser; y_1)$.*
   - *Si $x_2 = \frac{1}{4}$ et $y_1 \geq (\frac{1}{2}.\frac{3}{4} + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}$ alors l'équilibre parfait en sous jeu est: $(x_1, Accepter; y_1)$ et $(x_1, refuser; y_1)$.*
   - *Si $x_2 = \frac{1}{4}$ et $y_1 \leq (\frac{1}{2}.\frac{3}{4} + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}$ alors l'équilibre parfait en sous jeu est: $(x_1, Accepter; y_2)$ et $(x_1, refuser; y_2)$.*