Traitement du Signal
La FFT dans Matlab

Benjamin Labbé, Rémi Flamary
ASI, INSA de Rouen

2009-11-13

0.1 Problématique

Que s'est il passé lors du TP sur le filtrage analogique ? Pour tout le monde, les résultats du flitrage étaient un peu perturbants !!

Comment le filtrage d'un signal réel $x(t)$ par un filtre réel $h(t)$ a pu donner un signal de sortie $y(t) = h(t)*x(t)$ complexe ? Ce résultat n'est pas consistants avec le principe de la convolution réelle.

Lors du TP, nous avons calculé le filtrage dans l'espace des fréquences par utilisation du théorème de Plancherel. La dualité de la convolution temporelle et de la multiplication fréquentielle nous indique que le résultat $y(t)$ devait être un signal réel. Un filtre réel passe bas appliqué sur une somme de sinus réels doit donner une restitution quasiment parfaite des sinus réels de fréquences basses.

Les résultats obtenus au TP 'filtrage analogique' ne sont pas cohérents avec le principe de filtre réel. La sortie $y(t)$ doit être réelle. La stratégie de secours employée est souvent la visualisation du module de $y(t)$ pour constater l'atténuation effective des fréquences hautes, mais il reste toujours un mysère.

Mais alors que s'est-il passé ?

... ... C'est la faute de '`fftshift`'!!!!!

0.2 L'estimation de spectre avec l'algorithme Fast-Fourier-Transformation Le mystère de `fftshift`

On dispose d'un signal $x(t)$ echantilloné sur une suite d'instants d'acquisition $t = [-10s,\ 10s]$ avec un pas d'échantillonage de $Te = 0.01s$ (soit n échantillons). (cf $x(t)$ sur la fig1, en haut). On souhaite estimer le spectre $X(f)$ de $x(t)$. (cf $X(f)$ sur la fig1, en bas).

L'algorithme FFT de Matlab appliqué à $x(t)$ propose directement un échantillonage du spectre $X(f)$ au pas de fréquence $\frac{Fe}{n} = \frac{1}{Te\ n}$. Les n puissances spectrales estimées par FFT correspondent aux fréquences $f = [0,\ Fe]$. Cette estimation de puissance spectrale par FFT est calculée par periodisation du signal $x(t)$ et cela se traduit par un spectre periodique également.

Le spectre estimé est donc est periodique (de periode Fe), cela signifie que les puissances spectrales estimées entre $Fe/2$ et Fe sont équivalentes aux fréquences négatives entre $-Fe/2$ et $0\ Hz$ du signal $x(t)$.

La représentation du spectre $X(f)$ sur l'échantillonage de fréquence $f = [0,\ Fe]$ est parfaitement correcte. Seulement, la lecture du spectre $X(f)$ sur un graphe est difficilement lisible avec un tel échantillonage de fréquence.

... et Matlab créa `fftshift`

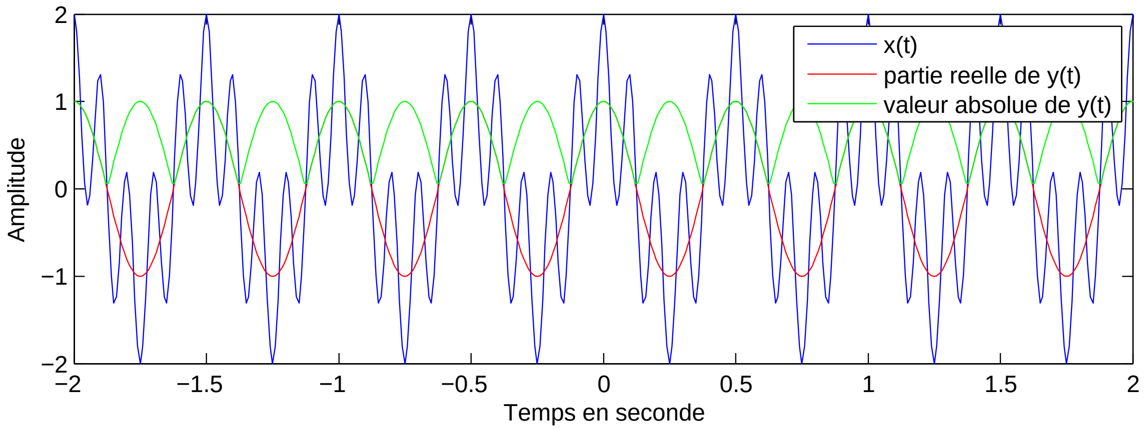
Pour faciliter la lecture du spectre, monsieur Matlab a inventé `fftshift`. Cette fonction permet de retourner le vecteur des puissances spectrales pour l'afficher sur un échantillonage $[Fe/2 + \frac{Fe}{n}, \dots Fe,\quad 0, \dots Fe/2]$, soit par équivalence sur l'échantillonage $[-Fe/2 + \frac{Fe}{n},\ Fe/2]$

Il faut bien comprendre que la fonction `fftshift` sert au départ pour faciliter la lecture des graphiques dans l'espace des fréquences (cf $X(f)$ fig1, en bas).

Application d'un filtre dans l'espace des fréquences

Éventuelement on peut travailler dans l'espace des fréquences $[-Fe/2 + \frac{Fe}{n},\ Fe/2]$ pour créer des filtres $H(f)$ dont on a la définition uniquement en fréquence. Mais attention, la définition d'un filtre passe bas n'est pas identique selon que l'on travail sur $[0,\ Fe]$ ou $[-Fe/2 + \frac{Fe}{n},\ Fe/2]$.

- Si on choisit de travailler sur $[-Fe/2 + \frac{Fe}{n},\ Fe/2]$, on pourra créer un filtre passe bas idéal autour de la fréquence nulle : $H(f) = 1$ si $f \in [-Fc/2,\ Fc/2]$, 0 sinon. (cf fig1, en bas).
- Si on choisit de travailler sur $[0,\ Fe]$, le filtre est strictement non nul pour les fréquences inférieures à $Fc/2$ et pour les fréquences supérieures à $Fe - Fc/2$. (cf fig 2, en bas).



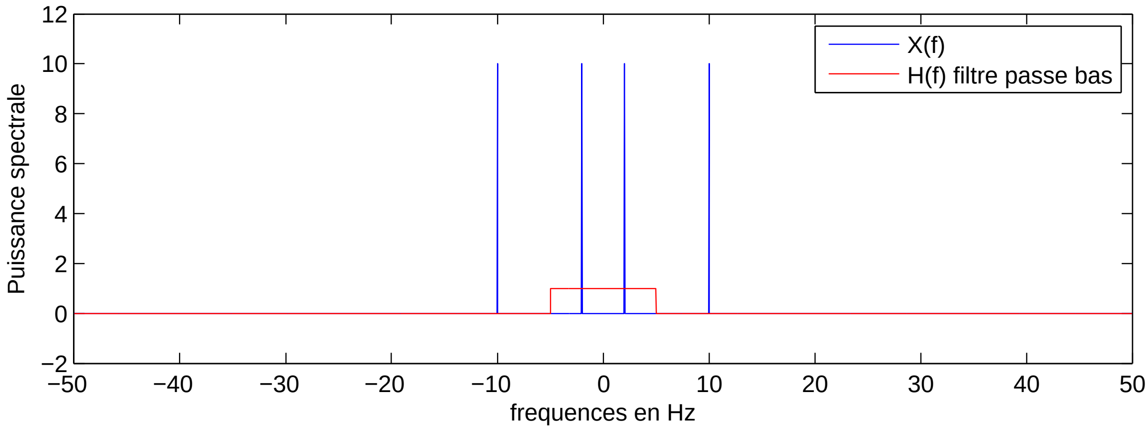


Figure 1: En utilisant FFTshift

Quelque soit la représentation fréquentielle, on peut appliquer le filtrage idéale pour couper les fréquences hautes. $Y(f) = H(f) \times X(f)$.

Selon le théorème de Placherel, on a donc une estimation du spectre $Y(f)$ du signal $y(t)$ en sortie du filtre $h(t)$. Il va falloir repasser du fréquentiel au temporel pour visualiser $y(t)$.

Retour dans le temporel

Pour l'instant, on avait tout juste, tout ce passait comme on l'attendait, les graphes ressemblaient à ce que l'on voulait. Mais c'est maintenant qu'il faut faire attention.

Selon la représentation fréquentielle que l'on a choisit ($[-Fe/2+\frac{Fe}{n},\ Fe/2]$ ou $[0,\ Fe]$) le retour en temporel ne se fait de la même façon.

- Si on a choisit $[0,\ Fe]$, iFFT interprète les puissances spectrales de $Y(f)$ directement et revient à une estimation de $y(t)$ correcte.
- Si on a choisit de travailler sur $[-Fe/2 + \frac{Fe}{n},\ Fe/2]$, alors les puissances spectrales de $Y(f)$ sont inversées et il faut utiliser la fonction `ifftshift` pour replacer les éléments de $Y(f)$ en face des fréquences $[0,\ Fe]$.

Attention, `ifftshift` et `fftshift` ne sont pas équivalentes; elles sont complémentatires, tout comme FFT et iFFT. L'inversions dans un sens et dans l'autre des éléments d'un vecteur de puissances spectrales ne se fera pas de la même façon selon que le nombre d'échantillon n est pair ou impair.

Dans le cas oû on a choisit la représentation $[-Fe/2 + \frac{Fe}{n},\ Fe/2]$, il faut donc travailler comme suit:

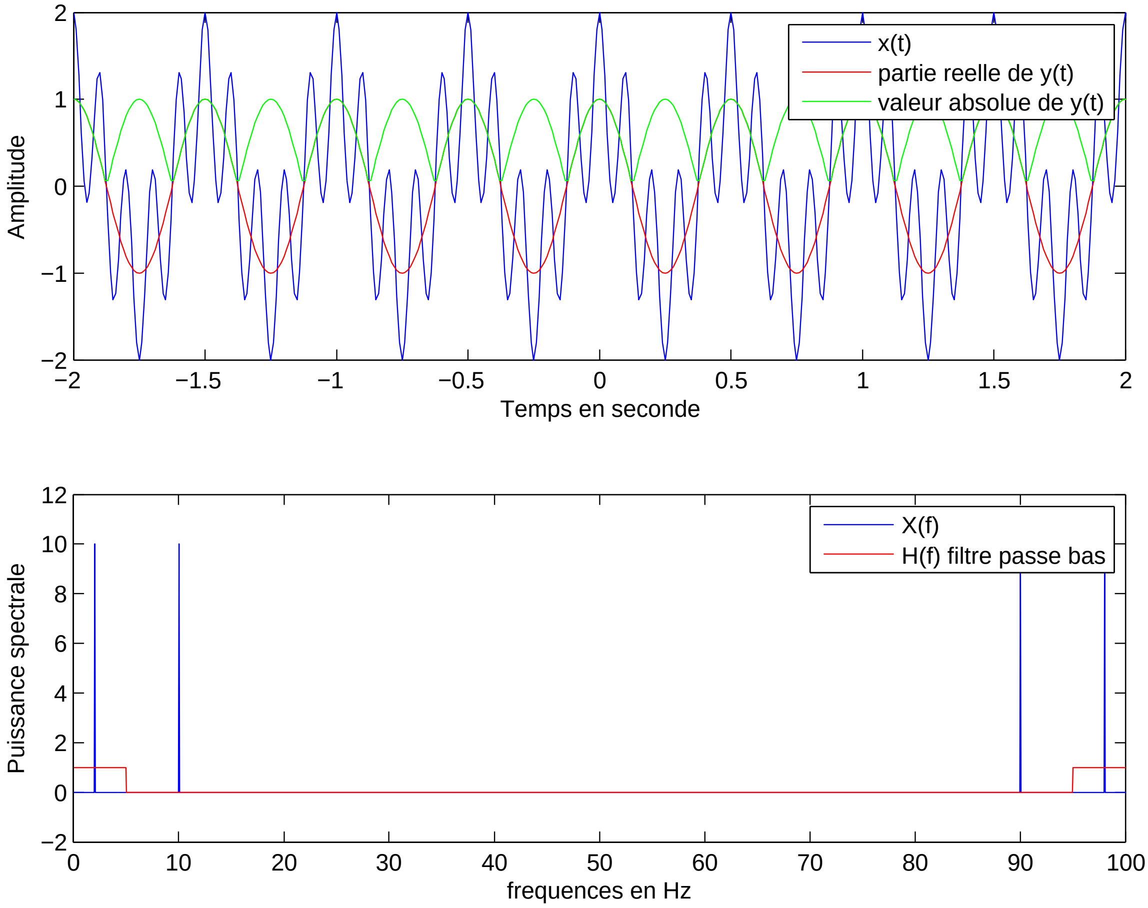


Figure 2: Sans utiliser FFTshift

- X = fftshift(fft(x))
- f = [-Fe/2 : Fe/n : Fe]
- H = abs(f)<Fc/2
- Y = H.*X
- y = ifft(ifftshift(Y))

Si on a effectué les commandes Matlab comme indiquées précédement, alors le signal $y(t)$ a une partie réelle reprenant exactement la fréquence basse de $x(t)$ (la puissance du sinus de basse fréquence de $x(t)$ est conservée). La partie imaginaire de $y(t)$ est alors négligeable ($< \pm 10^{-15}$). Il n'y a pas besoin d'observer le module de $y(t)$ pour observer la composante de fréqence basse.

Que s'est il passe pendant le TP alors ?

L'erreur commune qui est arrivée pendant le TP, a été de confondre les deux représentations fréquentielles. On a donc oublié d'appliquer `ifftshift` au moment de revenir de $Y(f)$ à $y(t)$.

iFFT a donc mal interprété les fréquence comprises dans $Y(f)$. Il a considéré 2 pics de fréquences moyennes (aux environs de $Fe/2 - \frac{Fc}{2}$ et $Fe/2 + \frac{Fc}{2}$). On a obtenu un résultat incohérent. C'est bien fait :-P