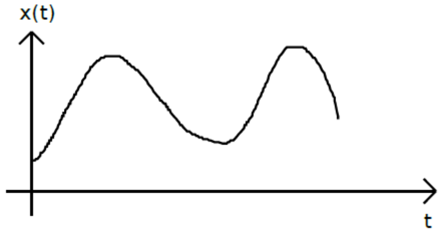
Echantillonnage des signaux

Définitions des signaux :

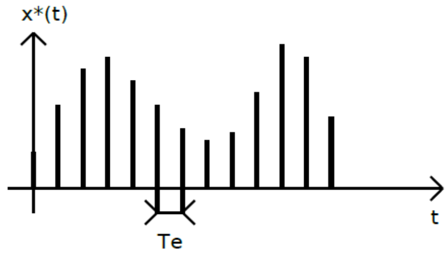
a) Les signaux continus

Les signaux continus sont présents à tous les instants mais peuvent présenter des discontinuités. Leur énergie est finie. L'énergie d'un signal x(t) est proportionnelle au carré de x(t), intégré de 0 à t.



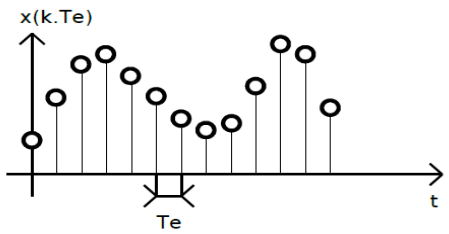
b) Les signaux échantillonnés

Un signal échantillonné est constitué d'une suite d'impulsions de Dirac δ(t) ou **peigne de Diracs**. Ces impulsions de Dirac sont périodiques de période Te, ou période d'échantillonnage. On le note x*(t).



c) Les signaux discrets

Un signal discret est une suite de valeurs numériques définies aux instants d'échantillonnage. Cette suite de valeurs numériques est associée au signal *x(t)* pour le représenter : On la note *x(kTe)* ou x_k.



- **Introduction**

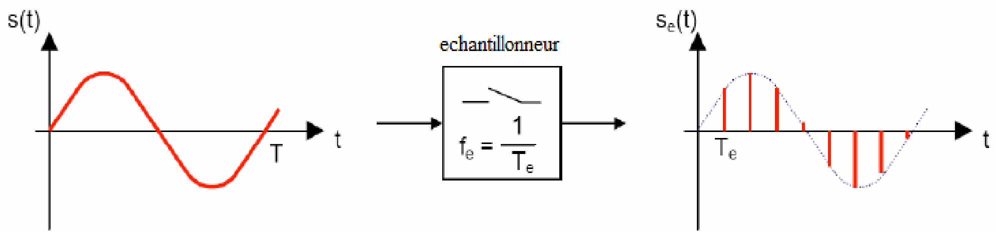
L'échantillonnage consiste à prélever des valeurs instantanées d'un signal continu prises à des instants précis, le plus souvent équidistants.

Soit un signal continu s(t), sa représentation échantillonnée est un ensemble de valeurs discrètes.

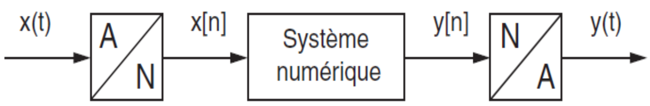
$$s(t) \xrightarrow{\text{échantillonnage}} s_e(t) = s(nT_e),\ s_e(t) = s(n)$$

n: *entier* , T_e: *un pas d'échantillonnage ou période d'échantillonnage.*

La représentation ci-dessous donne la modélisation d'un échantillonneur avec un interrupteur dont le Te est le temps mis pour se connecter (temps entre deux impulsions successive).



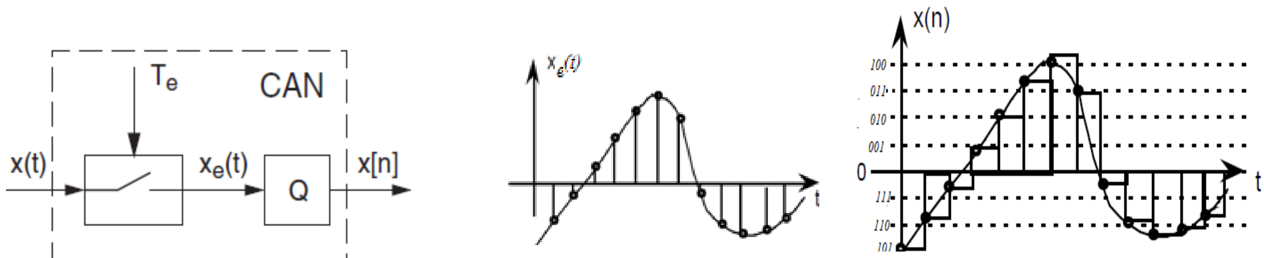
- **<u>Chaine de conversion A/N et N/A</u>**



X(t) : signal d'entrée continu , X(n) : signal échantillonné, y(t) : signal de sortie reconstruit

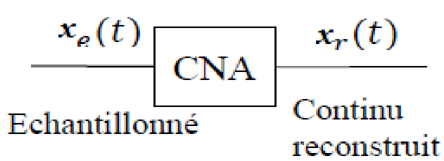
Système numérique : correspond au microprocesseur (unité de traitement).

Le convertisseur A /N : processus faisant intervenir trois actions successives : l'échantillonnage de période Te, la quantification du signal et son codage. Pratiquement, ces opérations sont effectuées dans un même élément, le convertisseur A/N, qui reçoit le signal analogique et le convertit en un signal discret quantifié.

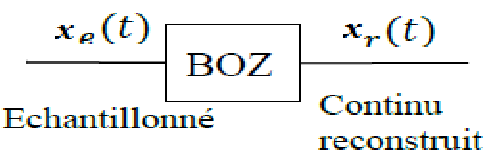


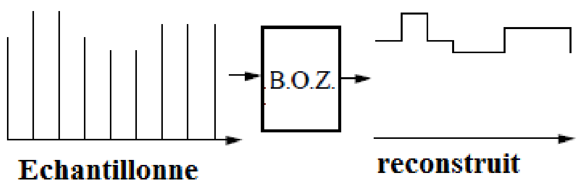
Echantillonné **Quantifié**

Le convertisseur N/A : a pour but retrouver la valeur analogique des signaux échantillonnés équivalents de manière exacte a tout temps.



En pratique, les convertisseurs numériques - analogique réalisent simplement le blocage de la valeur échantillonnée pendant une période d'échantillonnage.

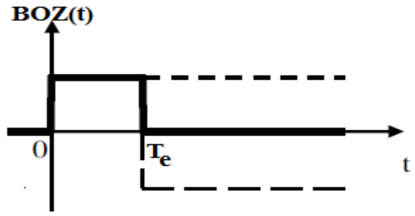




La fonction de transfert d'un bloqueur d'ordre zéro (extrapolation d'ordre zéro) est donnée

$BOZ(t) = u(t) - u(t - T_e)$

$\xrightarrow{TL} BOZ(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-pT_e} = \frac{1 - e^{-pT_e}}{p}$



- **Modélisation de l'échantillonnage**

L'opération mathématique associée à cette discrétisation revient à multiplier le signal d'entrée x(t) par un peigne de Dirac δ_{nT_e}(t), c'est un échantillonnage idéalisé.

$$x^*(t) = x_e(t) = x(t).\delta_{nT_e}(t)$$

$$x^*(t) = x_e(t) = x(t).\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = x(nT_e).\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

$\delta_{nT_e}(t)$, étant un peigne de Dirac de période Te, sa transformée de Fourier est donnée

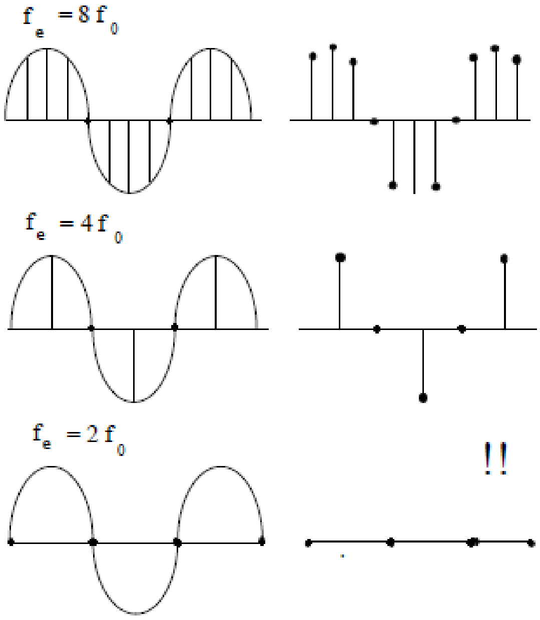
$$TF\{\delta_{nT_e}(t)\} = TF\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi F_e nt}\right\} = \frac{1}{T_e} TF\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi F_e nt}\right\}$$

$$TF\{\delta_{nT_e}(t)\} == \frac{1}{T_e}\sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi F_e nt}\ e^{-j2\pi ft}.dt = \frac{1}{T_e}\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(f - nF_e)$$

Donc, la transformée de Fourier du signal échantillonné $x_e(t)$ est

$$TF\{x_e(t)\} = \frac{1}{T_e}\sum_{-\infty}^{+\infty} x(f) * \delta(f - nF_e) = \frac{1}{T_e}\sum_{-\infty}^{+\infty} x(f - nF_e)$$

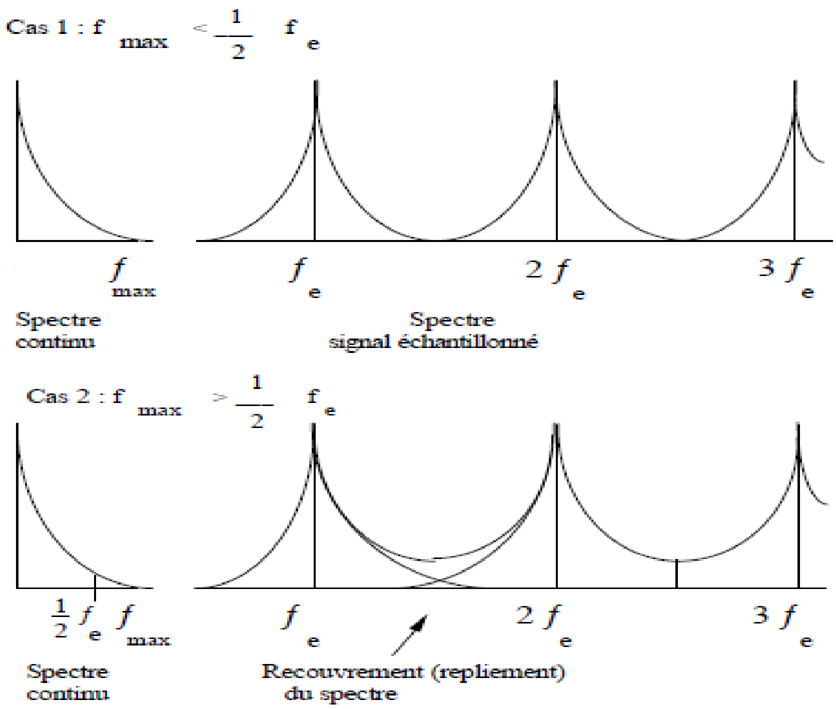
- **<u>Echantillonnage dans le domaine temporel</u>**



Lorsqu'on effectue l'échantillonnage d'un signal dans son domaine temporel, sa reconstruction risque d'être déformée si le pas d'échantillonnage T_e est de plus en plus grand, ce qui résulte la perte de l'information.

Alors, pour préserver l'information des pertes dues à l'échantillonnage dans le domaine temporel, on étudie le signal dans le domaine spectral. Dans ce cas, le signal continu est représenté par son spectre délimité par $[-f_0, +f_0]$. Par suite, le spectre du signal échantillonné comprend la fonction x(f), désignée par la bande de base et des bandes latérales correspondent à la translation de la bande de base (multiples entier de la fréquence d'échantillonnage).

- **<u>Echantillonnage dans le domaine fréquentiel</u>**



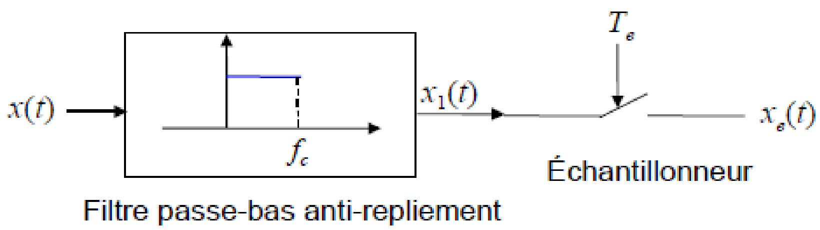
Dans le cas2, il y a recouvrement de spectre, comme le montre la figure ci dessus, et il n'est alors pas possible de reconstituer $x(t)$ à partir des seuls échantillon $x(nTe)$. Nous allons de plus mettre en évidence le phénomène dit "d'aliasing".

On peut alors énoncer **le théorème de Shannon:**

<u>Théorème</u> : Si on échantillonne un signal à temps continu x(t), le signal échantillonné x*(t) obtenu à la fréquence d'échantillonnage fe, permet la reconstitution exacte de x(t), si la fréquence maximum contenue dans le spectre de x(t) est inférieure à la demi-fréquence d'échantillonnage $f_e > 2f_{max}$.

- **<u>Filtrage d'anti repliement</u>**

Pour éviter le « repliement du spectre » les signaux analogiques doivent être filtrés avant échantillonnage pour assurer: $f_{max} < \frac{f_e}{2}$. Un bon filtre anti-repliement doit avoir au minimum 2 cellules du 2^{ime} ordre en cascade (sauf si $f_{max} < \frac{f_e}{2}$).

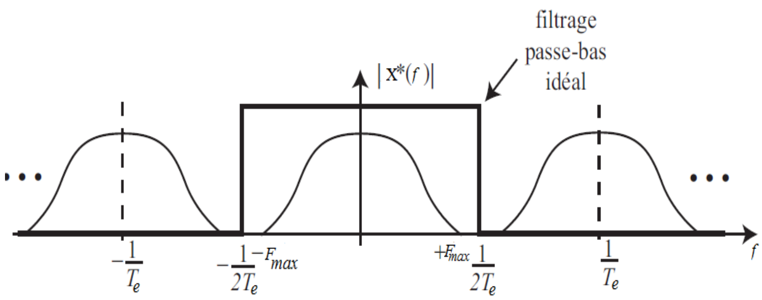


- **Choix de la fréquence d'échantillonnage**

1er ordre : $\frac{\tau}{4} < T_e < \tau$, 2^{ieme} $ordre$: $\frac{0.25}{w_0} < T_e < \frac{1.5}{w_0}$ $0.7 \leq \xi \leq 1$

- **Reconstruction de signal analogique**

Si on souhaite récupérer le signal *x(t)* à partir du signal *x*(t)* à la sortie d'un système de traitement numérique, on installe un processus de conversion N/A à la sortie de la chaine de traitement pour éliminer l'ensemble des spectres centrés autour des multiples de la fréquence d'échantillonnage par un filtre passe bas de fréquence de coupure $f_c = \frac{f_e}{2}$



Pour reconstruire le signal x(t) , il suffit de prendre la TF inverse de la bande de base après le filtrage passe bas.

La reconstruction mathématiquement est possible, mais physiquement irréalisable car le filtre passe-bas idéal n'est pas causal.

- **Reconstruction par extrapolation**

La reconstruction d'un signal analogique x(t) à partir de ses échantillons x(nTe) ou x(nTe) se fait par un bloqueur d'ordre zéro BOZ.